

УДК 81'23:17.022.1)-053.6

Удосконалення обчислювальної компетентності старшокласників під час навчання математики

Василь Швець

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна. E-mail: kmmvm@ukr.net

Анотація

Реалізація прикладної спрямованості шкільного курсу математики відбувається різними шляхами, один із яких – розв’язання прикладних задач економічного, природничого, фінансового та іншого змісту. Числові дані в таких задачах розглядаються зазвичай як наближені значення величин. Щоб оперувати такими даними необхідно володіти вміннями і навичками виконувати наближені обчислення, тобто бути компетентним у виконанні таких обчислень. У недалекому минулому така компетентність в учнів середньої школи ретельно формувалась. Їх вчили виконувати обчислення користуючись чотиризначними математичними таблицями, автор яких В. М. Брадїс. В шкільних підручниках було багато вправ, прикладних задач на виконання обчислень. У достатній кількості в методичній літературі давалося методичних рекомендацій і порад як успішно формувати належні вміння і навички. Поява нових, потужних обчислювальних засобів-калькуляторів, сучасних ПК тощо, відкрила нові можливості для формування в сучасних умовах обчислювальну компетентність школярів.

У статті, на прикладах розв’язання задач, зокрема прикладних, у фоновому режимі подаються відповідні методичні поради, зразки розв’язань, культура математичних записів щодо формування в учнів обчислювальної компетентності. Автор наголошується на потребі наповнення: в програмах з математики нового покоління чіткими вимогами щодо формування в учнів умінь і навичок виконання наближених обчислень під час вивчення навчальним тем, в альтернативних підручниках нового покоління вправами і задачами на обчислення значень функції, виразів, зокрема прикладними задачами економічного, фінансового, природничого та ін. змісту. Адже, на сьогодні, обчислювальна компетентність школяра є по суті, міжпредметною.

Ключові слова: математика, середня школа, обчислювальна компетентність, основні елементарні функції, прикладні задачі, наближені обчислення

UDC 81'23:17.022.1)-053.6

Improving the computational competence of high school students during mathematics

Vasyl Shvets

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine. E mail: kmmvm@ukr.net

Abstract

Implementation of the applied orientation of the school mathematics course takes place in various ways, one of which is solving of applied problems of economic, natural, financial and other content. Numerical data in such problems are usually considered as approximate values of quantities. In order to operate such data, it is necessary to have the skills and abilities to perform approximate calculations, that is, to be competent in performing such calculations. In the recent past, such competence of students was carefully formed in senior school. They were taught to perform calculations using four-digit mathematical tables, the author of which was Volodymyr Bradis. School textbooks had many exercises, applied problems for performing calculations. A sufficient amount of methodological recommendations and advice on how to successfully form the appropriate skills and abilities was given in appropriate literature. The appearance of new, powerful computing tools, calculators, modern computers, etc., opened up new opportunities for forming the computing competence of schoolchildren in modern conditions.

In the article, on examples of solving problems, in particular applied ones, appropriate methodical advice, sample solutions, the culture of mathematical records regarding the formation of computational competence of students are presented in the background. The author emphasizes the need to fill: in new generation mathematics programs with clear requirements for the formation of students' abilities and skills in performing approximate calculations during the study of educational topics; in alternative textbooks of the new generation with exercises and problems for calculating the values of functions and expressions, in particular, applied problems of economic, financial, natural, etc. content. After all, today, the computing competence of a schoolchild is essentially interdisciplinary.

Keywords: mathematics, secondary school, computational competence, basic elementary functions, applied problem, approximate calculations

Постановка проблеми. Однією з цілей вивчення алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі є – систематичне вивчення функцій як важливого математичного об'єкта засобами алгебри і математичного аналізу.

Мова йде про вивчення основних елементарних функцій: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^r$ (де r – раціональне число), $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$, $y = x^\alpha$, (де α – дійсне число).

За вимогами програми з математики (<http://surl.li/uofys>) вивчаючи такі функції учні повинні навчитись:

- будувати (схематично) їх графіки, «читати» ці графіки і використовувати під час розв'язування практичних та прикладних задач;
- знаходити значення функцій для заданих значень аргументів, в тому числі і для того випадку, коли аргументом є наближене число. Оцінювати точність таких наближених значень;
- обчислювати вирази, що містять вказані в програмі функції з наближеними значеннями даних.

У недалекому минулому, в старшій школі такі вміння формувались ретельно. Учні вчили обчислювати значення функцій, виразів за допомогою чотиризначних математичних таблиць В. М. Брадїса (фото 1).

Фрагмент такого обчислення показано, наприклад, на фото 2. (1966 р., із зошита учня 11 класу).

Задача. У правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основи $AB = a$, $\angle BC_1 D = \alpha$.
Визначити об'єм призми, обчислити, якщо $a = 6,4$ см, $\alpha = 58^\circ$.



Фото 1.

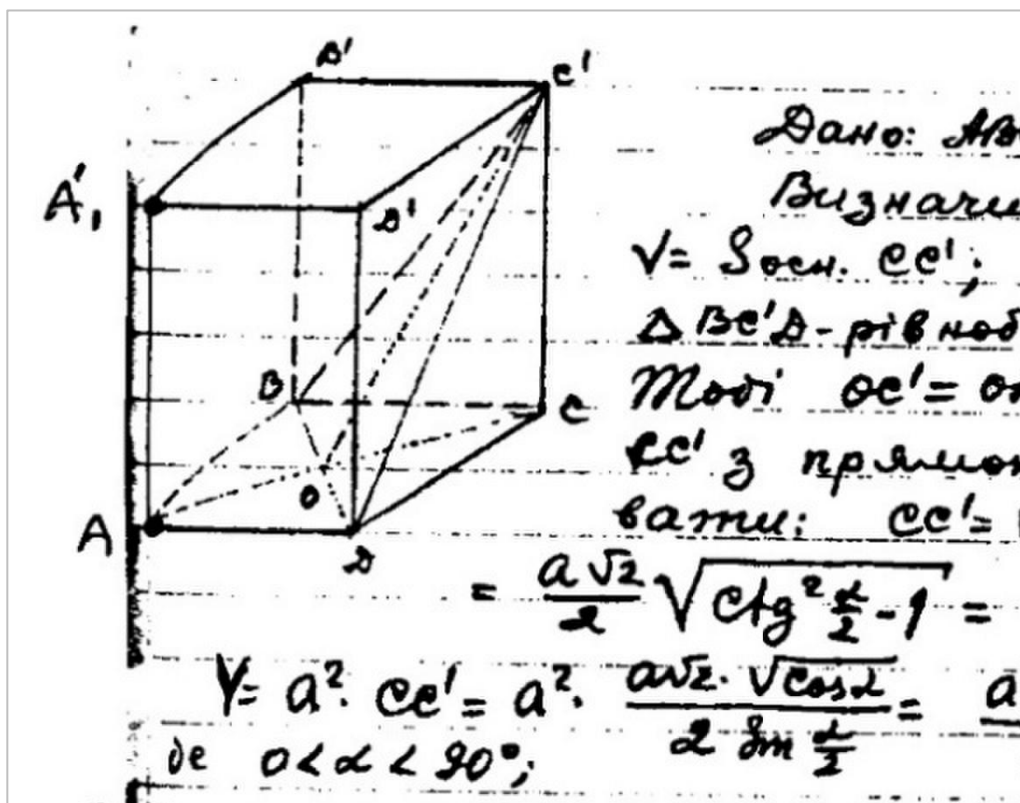


Фото 2.

У програмі з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (<http://surl.li/uogdx>) та в такій же програмі для класів з поглибленим вивченням математики (<http://surl.li/uogay>), профільного рівня (<http://surl.li/uofys>) говориться, що випускник загальноосвітнього навчального закладу (вимога): «виконує математичні розрахунки (дії з числами, представленими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення, тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення».

Більш чіткіше ця вимога звучить як навчальне досягнення учня у програмах (<http://surl.li/uogay>, <http://surl.li/uofys>) під час вивчення окремих тем курсу «Алгебра і початків аналізу»:

Тема 1 10 клас	«Функції, многочлени, рівняння і нерівності»	Учень/учениця знаходить значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення
Тема 2 10 клас	«Степенева функція»	Учень/учениця обчислює, оцінює та порівнює значення виразів, які містять корені і степені з раціональним показником
Тема 3 10 клас	«Тригонометричні функції»	Учень/учениця обчислює значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень

Аналогічна вимога має виконуватися і під час вивчення показникової та логарифмічної функцій, хоч вона в програмах чітко *не зафіксована*.

Якщо ж переглянути діючі альтернативні підручники з алгебри і початків аналізу, то практичних завдань, направлених на реалізацію вказаної вимоги практично немає. А мали б бути! Виконання вимоги призведе до формування в учнів обчислювальної компетентності. Таке державне замовлення слід виконувати. Сформовані уміння і навички є удосконаленням обчислювальної компетентності старшокласників, яка, фактично, стає міжпредметною, необхідною під час розв'язування задач з фізики, хімії, інформатики та інших навчальних предметів.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема формування в учнів умінь і навичок виконувати наближені обчислення була розв'язана ґрунтовно в методичній науці в радянську епоху в дослідженнях В. М. Брадїса, О. М. Крилова, В. І. Грибанова, В. Г. Прочухаєва, А. В. Суткової, З. І. Слепкань та інших. Поява потужних обчислювальних засобів (калькулятори, ноутбуки, комп'ютери і т. п.) з ефективним програмним забезпеченням спонукали до нових досліджень. Вона знову стала актуальною. У дисертаційних дослідженнях Кліндухової В. М. (Кліндухова, 2008), Жук І. В. (Жук, 2015) були запропоновані методичні рекомендації формування в учнів основної та старшої школи умінь і навичок виконувати наближені обчислення з використанням сучасних обчислювальних засобів, однак, на практиці такі напрацювання ще не знайшли належного застосування.

Мета статті. Показати у фоновому режимі на прикладах розв'язання прикладних математичних задач методику удосконалення обчислювальної компетентності старшокласників. Звернути увагу математиків-методистів, авторів шкільних підручників з математики на наповнення задачного матеріалу завданнями, направленими на удосконалення обчислювальної компетентності випускників шкіл.

Методи дослідження. Теоретичні – аналіз, синтез, порівняння, узагальнення. Емпіричні – вивчення і аналіз першоджерел, опитування, вивчення і аналіз письмових робіт учнів (лабораторних, практичних, контрольних).

Виклад основного матеріалу. Навчання учнів можна розпочати з, наприклад, розв'язання наступної доцільної задачі: обчислити $\sin \alpha$, де α дорівнює: а) 0,785; б) $\approx 0,785$.

Скориставшись калькулятором учні знаходять:

а) $\sin 0,785 = 0,706825181$. Очевидно, що це наближене значення, яке знайдене з точністю $t = 10^{-9}$. Всі цифри його запису правильні і, в разі потреби, його можна округлити до потрібного десяткового знаку. Зауважимо, що значення $\alpha = 0,785$ розглядається як точне число.

б) якщо $\alpha \approx 0,785$, то калькулятор знову показує що $\sin 0,785 \approx 0,706825181$, тобто, те ж саме значення що й для точного значення аргументу.

Якою буде точність цього значення, як показало опитування, учні визначити не можуть.

Таким чином перед учнями постає проблемна ситуація, яка спонукає їх навчитись: знаходити значення функції $y = \sin x$, коли значення аргументу – наближене число; визначати з якою точністю це значення потрібно розглядати! Пропонуємо авторський підхід до розв'язання вказаної проблеми.

Наші пропозиції ґрунтуються на властивостях вивчених функцій. Нехай розглядається неперервна, монотонна (зростаюча, чи спадна) на проміжку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ (рис. 1).

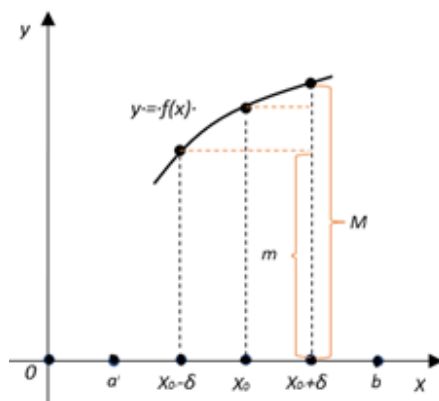


Рис. 1.

Нехай $x = x_0 \in (a; b)$.

Виберемо мале, додатне значення δ так, щоб $x_1 = x_0 - \delta$, та $x_2 = x_0 + \delta$ належали проміжку $[a; b]$.

Знаходимо $f(x_0 - \delta) = m$, і $f(x_0 + \delta) = M$ (Розглядаємо зростаючу функцію, у випадку, коли функція спадна, міркуємо за аналогією).

Якщо числа m і M знайдені, то виходячи з властивостей функції $y = f(x)$ (неперервна і монотонно зростаюча) можна стверджувати, що $f(x_0) \approx \frac{M+m}{2}$, а похибка не перевищуватиме що $h = \frac{M-m}{2}$. У цьому і є суть нашого підходу.

Такі теоретичні відомості рекомендуємо викласти в 10 класі, в першій темі курсі Алгебри і початку аналізу, яка називається «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» (Нелін, 2018).

Далі слід перейти до застосування отриманих знань під час вивчення основних елементарних функцій, які, як відомо, на певних проміжках є і монотонні, і неперервні: $y = x^r$ (де r – раціональне число), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$, $y = \lg x$, $y = x^\alpha$, (де α – дійсне число).

Проілюструємо таке можливе застосування на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити $\sqrt[8]{x}$, якщо: а) $x = 2,44$; б) $x \approx 2,44$.

Розв'язання

а) Число $x = 2,44$ – точне, тому за допомогою калькулятора знаходимо:

$\sqrt[8]{2,44} = 2,44^{0,125} = 1,11795347 \dots$ Значення кореня знайдене з точністю $t = 10^{-8}$. Залежно від потреби його можна округлити до певного десяткового знаку. Всі цифри в записі числа правильні. Отже, $\sqrt[8]{2,44} \approx 1,11795347$.

б) Число $x \approx 2,44$ подане з точністю до сотих. Можна вважати що похибка наближення не перевищує $h = 0,005$. Отже, має місце нерівність $2,435 < 2,44 < 2,445$.

Функція $y = \sqrt[8]{x}$ монотонно зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Знаходимо: $m = \sqrt[8]{2,435} = 2,435^{0,125} \approx 1,117\ 66685$

$$M = \sqrt[8]{2,445} = 2,445^{0,125} \approx 1,118\ 23957$$

Помічаємо, що в обох значеннях співпадають три перші цифри. Розбіжність починається з третього десяткового знаку після коми.

Округлюємо: число m до тисячних з недостаткою, маємо 1,117 (бажано, щоб учні пояснили чому округлення робиться з недостаткою); число M до тисячних з надлишком, маємо 1,119 (теж саме питання, що й в попередньому випадку).

Отримуємо, що $\sqrt[8]{2,44} \in [1,117; 1,119]$.

Тому, $\sqrt[8]{2,44} \approx \frac{1,117+1,119}{2} = 1,118$, а похибка не перевищує $h = \frac{1,119-1,117}{2} = 0,001$.

Отже, $\sqrt[8]{2,44} = 1,118 \pm 0,001$ (умовна рівність) або $\sqrt[8]{2,44} = 1,118$ (наближена рівність, цифра 8 сумнівна).

Відповідь : а) $\approx 1,117\ 95347$ б) $\approx 1,118$.

Приклад 2. Знайти значення кореня $\sqrt[3]{3,14}$, де 3,14 – число точне.

Розв'язання

Під знаком кореня 3,14 – число точне. Скориставшись знову калькулятором, який показник $\frac{1}{7}$ подає як нескінченний періодичний десятковий дріб 0,(142857), помічаємо, що показник потрібно округлити. Тому для подальших обчислень скористаємось нерівністю: $0,142 < \frac{1}{7} < 0,143$. Межі взяті з трьома значущими цифрами, бо під коренем число 3,14 з трьома значущими цифрами. З властивостей степенової функції слідує нерівність $(3,14)^{0,142} < \sqrt[3]{3,14} < (3,14)^{0,143}$. Знаходимо за допомогою калькулятора :

$$(3,14)^{0,142} = 1,17\ 642436 \dots;$$

$$(3,14)^{0,143} = 1,17\ 777123 \dots$$

Розбіжність у значеннях починається з третього десяткового знака після коми. Тоді $m = 1,176$, $M = 1,178$. Тому $\sqrt[3]{3,14} \approx \frac{1,176+1,178}{2} = 1,177$, а похибка не перевищує $h = \frac{1,178-1,176}{2} = 0,001$.

Отже, $\sqrt[3]{3,14} = 1,177 \pm 0,001$ (умовна рівність) або $\sqrt[3]{3,14} \approx 1,177$ (наближена рівність, остання цифра 7 – сумнівна)

Відповідь : $\sqrt[3]{3,14} \approx 1,177$.

Приклад 3. Обчислити значення функції $y = x^r$, де $x \approx 2,3$, $r \approx 0,35$.

Розв'язання

І аргумент і показник степеня наближені числа, взяті з точністю сотих. Тому маємо : $2,25 < x < 2,35$, $0,345 < r < 0,355$. Функція $y = x^r$ монотонна (подвійна монотонність і з огляду аргументу, і з огляду показника). Тому, щоб не вдаватися у подробиці, пропонуємо поступати таким чином. Виконати обчислення за схемою :

$$\begin{array}{ccc} 2,25 & < x < & 2,35 \\ \swarrow & & \searrow \\ 0,345 & < r < & 0,355 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2,25^{0,345} = 1,3\ 2282675 \dots (!) & 2,35^{0,345} = 1,3\ 4282189 \dots (!) \\ 2,25^{0,355} = 1,3\ 3359757 \dots (!) & 2,35^{0,355} = 1,3\ 5434432 \dots (!) \end{array}$$

Очевидно, що найбільшим з цих чотирьох значень буде $2,35^{0,355}$, а найменшим $2,25^{0,345}$. Тому обераємо: $m = 1,32$, $M = 1,36$.

Тоді, $2,3^{0,35} \approx \frac{1,32+1,36}{2} = 1,34$, а похибка не перевищує $h = \frac{1,36-1,32}{2} = 0,02$. Отже, $2,3^{0,35} = 1,34 \pm 0,02$ (умовна рівність), або $2,3^{0,35} \approx 1,3$ (наближена рівність).

Відповідь : $2,3^{0,35} \approx 1,3$.

Приклад 4. Обчислити значення функції $y = \lg x$, якщо $x \approx 5,243$.

Розв'язання

Аргумент поданий з точністю до тисячних.

Функція $y = \lg x$ - неперервна і монотонно зростаюча.

Скориставшись попередніми рекомендаціями, маємо : $x \in [5,2425; 5,2435]$.

Вважаючи числа 5,2425 і 5,2435 - точними, маємо:

$$\lg 5,2425 = 0,719538439 \dots$$

$$\lg 5,2435 = 0,719621272 \dots$$

Помічаємо, що в обох значеннях співпадають перші три десяткові знаки після коми, розбіжність починається з четвертого десяткового знаку.

Округлюємо : для m з недостаткою і маємо $m = 0,7195$;

для M з надлишком і маємо $M = 0,7197$.

Тоді отримуємо: $\lg 5,243 \approx \frac{0,7195+0,7197}{2} = 0,7196$, а межа похибки $h = \frac{0,7197-0,7195}{2} = 0,0001$.

Отже, $\lg 5,243 = 0,7196 \pm 0,0001$ або $\lg 5,243 \approx 0,7196$.

За такою методикою слід вчити учнів знаходити значення інших функцій, коли йде їх безпосереднє вивчення, переводити градусну міру кута в радіанну і навпаки, знаходити значення виразів зі змінними, якщо значення змінних - наближені числа, визначати точність таких значень, відносну точність, робити відповідні висновки про якість обчислень.

Обчислення значень виразів, що містять вказані в програмі з математики функції.

Отримані знання і вміння виконувати наближені обчислення стануть в нагоді під час розв'язування на уроках математики практичних та прикладних задач (дані в яких зазвичай наближені числа), фізики (особливо під час виконання лабораторних робіт), хімії (практичні роботи), тощо. Наведемо кілька прикладів розв'язань таких задач.

Задача 1. Знайти з точністю до одиниці сторону b $\triangle ABC$, у якому $a \approx 36$ см, $c \approx 52$ см, кут $\beta \approx 48^\circ$.

За теоремою косинусів $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$. Щоб обчислити значення такого виразу необхідно знайти наближене значення $\cos \beta$, оцінити точність наближення. Після цього можна обчислювати значення виразу або методом меж, або методом підрахунку правильних цифр, або методом меж похибок, виходячи з того яким способом учень володіє. Отже, знаходимо спочатку $\cos 48^\circ$. Оскільки значення кута β – наближене число, то маємо: $47^\circ < \beta < 49^\circ$ (тут межа похибки дорівнює 1°).

Тоді, $\cos 47^\circ \approx 0,68199836 \dots$ $\cos 49^\circ \approx 0,656059029 \dots$

На проміжку $[0^\circ; 90^\circ]$ функція $y = \cos x$ – спадна. Тому $M = 0,69$ (округлення з надлишком), $m = 0,65$ (округлення з недостатчею).

Тоді $\cos 48^\circ \approx \frac{0,69+0,65}{2} = 0,67$, $h = \frac{0,69-0,65}{2} = 0,02$.

Тобто $\cos 48^\circ = 0,67 \pm 0,02$.

В умовній рівності цифра 6 – правильна, а цифра 7 – сумнівна.

Її беремо для проміжних обчислень. Тому $\cos 48^\circ \approx 0,67$.

Далі, за правилом підрахунку цифр обчислюємо вираз:

$$b = \sqrt{36^2 + 52^2 - 2 \cdot 36 \cdot 52 \cdot 0,67} = \sqrt{1296 + 2704 - 2508,48} = \\ = \sqrt{1491,5} = 38,619943 \approx 38 \text{ см.}$$

(в записі залишаємо дві значущі цифри)

Відповідь: $b \approx 38$ см.

Задача 2. Внаслідок зростання температури води Північного моря виникла екологічна катастрофа – забруднення синьо-зеленими водоростями території довжиною біля 10 км (площа, на якій повністю вбито морське життя). Визначте середній приріст синьо-зелених водоростей протягом доби, виражений у відсотках, якщо кожного місяця їх кількість збільшується у 10 разів.

Розв'язання

Використаємо відому формулу $l = l_0(1 + p)^t$ (математична модель), де l – довжина забрудненої водоростями території в момент часу t , l_0 – початкова довжина забрудненої території, p – середній приріст водоростей протягом доби, виражений у %, t – час, вимірюється добами. Звідси, згідно даних задачі одержуємо рівність: $10(1 + p)^{30} = 100$, якій рівнослнна

рівність $(1 + p)^{30} = 10$. Для визначення p можна піднести обидві частини рівняння до степеня $\frac{1}{30}$ і, виконавши певні перетворення, одержати $p = \sqrt[30]{10} - 1$.

Для обчислення значення виразу спочатку знайдемо значення функції

$y = \sqrt[30]{x}$, де $x = 10$. Оскільки $\frac{1}{30} = 0,03333 \dots$, то маємо $0,033 < \frac{1}{30} < 0,034$.

Тоді, $10^{0,033} = 1,07894672 \dots$, $m = 1,07$; $10^{0,034} = 1,08143395 \dots$, $M = 1,09$.

Отже, $\sqrt[30]{10} \approx \frac{1,09+1,07}{2} = 1,08$, $h = 0,01$.

Умовна рівність $\sqrt[30]{10} = 1,08 \pm 0,01$, наближена рівність $\sqrt[30]{10} \approx 1,08$.

Тоді $p = \sqrt[30]{10} - 1 \approx 0,08$, $p \approx 8 \%$.

Відповідь : $\approx 8 \%$.

Можна діяти по-іншому. Прологарифмувавши рівність $(1 + p)^{30} = 10$ за основою 10 і скориставшись властивістю логарифма, одержуємо : $30 \lg(1 + p) = 1$, звідси $\lg(1 + p) = \frac{1}{30}$.

Тобто, маємо рівняння, в якому змінна міститься лише під знаком логарифма.

Розв'язуємо і приходимо до тієї ж відповіді.

Відповідь : 8% .

Задача 3. Обчислити заряд кульки q , маса якої $m \approx 2,0$ г, що обертається на нитці завдовжки $l \approx 1,2$ м навколо нерухомого такого самого точкового заряду q . Період обертання кульки $T \approx 3,2$ с, а кут відхилення від вертикалі $\alpha \approx 25^\circ$.

Розв'язання задачі зводиться до обчислення значення виразу :

$$q = l \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0 m \left(g \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{4\pi^2}{T^2} l \cdot \sin \alpha \right)}, \text{ де } g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Розв'язання

Із таблиць знаходимо значення електричної сталої $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$.

1) Знаходимо спочатку значення $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \alpha$, якщо $\alpha \approx 25^\circ$.

Виберемо за межу похибки для кута α один градус (ціна поділки).

Тоді маємо : $24^\circ < \alpha < 26^\circ$.

$$\operatorname{tg} 24^\circ = 0,445228685 \dots \quad m_1 = 0,44, M_1 = 0,49.$$

$$\operatorname{tg} 26^\circ = 0,487732589 \dots \quad \operatorname{tg} 25^\circ \approx 0,465, h_1 = 0,025.$$

$$\sin 24^\circ = 0,406736643 \dots \quad m_2 = 0,40, M_2 = 0,44.$$

$$\sin 26^\circ = 0,438371147 \dots \quad \sin 25^\circ \approx 0,42, h_2 = 0,02.$$

Обидва значення функції беремо з двома значущими цифрами.

$$\text{Отже, } \operatorname{tg} 25^\circ \approx 0,46, \sin 25^\circ \approx 0,42.$$

$$2) g \cdot \operatorname{tg} \alpha = 9,8 \cdot 0,46 = 4,508 \approx 4,51.$$

$$3) \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{4 \cdot 3,14^2}{3,2^2} \cdot 1,2 \cdot 0,42 = 1,94110875 \approx 1,94.$$

$$4) g \operatorname{tg} \alpha - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot \sin \alpha \approx 4,51 - 1,94 = 2,57.$$

Зауважимо, що $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг.

$$5) \sqrt{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m \cdot 2,57} = \sqrt{4 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,57} \approx 23,9 \cdot 10^{-8}.$$

$$6) q = l \cdot \sin \alpha \cdot 23,9 \cdot 10^{-8} \approx 1,2 \cdot 0,42 \cdot 23,9 \cdot 10^{-8} \approx 12 \cdot 10^{-8}.$$

Відповідь : $q = 12 \cdot 10^{-8}$ (Кл).

Задача 4. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їхня маса збільшується на 3 % за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хвилин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г.

Розв'язання

Математичною моделлю даної задачі є функція $m(t) = (1 + 0,03)^t = 1,03^t$.

Для функції f , диференційовної в точці x , і достатньо малих Δx має місце наближена рівність : $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Скориставшись цією формулою, маємо : $x_0 = 1, \Delta x = 0,03$,

$$f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1, f'(x_0) = \frac{1}{6} \cdot x_0^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$$

і, отже, $(1 + 0,03)^{\frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,03 \approx 1,005$ (з).

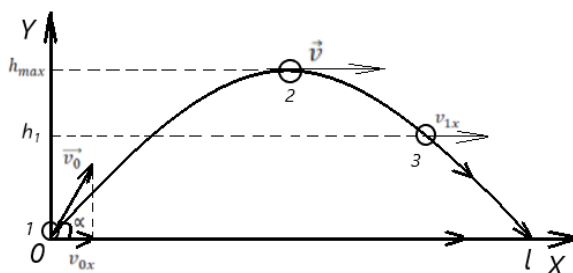
Відповідь : $1,005$ (з).

Задача 5. Міну випущено з міномета зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Визначте максимальну висоту h_{max} підняття міни і на яку відстань пролетить міна при такій швидкості. Під яким кутом до горизонту слід пускати міну, щоб дальність польоту була максимальною? Обчисліть названі величини для армійського міномета М120-15 «Молот» (українського виробництва), знаючи що його дульна швидкість становить 325 м/с, а постріл зроблено під кутом 60° , опором повітря знехтувати.

Розв'язання

1) Побудова математичної моделі для розв'язання задач.

Виконаємо ілюстративний рисунок, на якому зазначимо положення міни і напрямок швидкості її руху. Приведені міркування учні можуть знайти в шкільному підручнику з фізики для 10 класу (Бар'яхтар та ін., 2010).



Оскільки опір повітря відсутній, то можна скористатися законом збереження енергії. Пригадаємо, що під час руху тіла під дією сили тяжіння проекція швидкості на горизонтальну

вісь OX не змінюється $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$. У верхній точці траєкторії швидкість руху тіла напрямлена горизонтально, тому $v_x = v$. Для кожного положення міни запишемо вираз для розрахунку повної механічної енергії:

$$1. W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad 2. W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_{max} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + mgh_{max};$$

$$3. W = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Оскільки повна механічна енергія зберігається, маємо дві рівності:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + mgh_{max}; \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Помноживши обидві рівності на 2 та скоротивши на m , знайдемо невідому величину h_{max} :

$$v_0^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + 2gh_{max} \Rightarrow 2gh_{max} = v_0^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (1)$$

Тоді $l = v_0 \cos \alpha \cdot 2t$, де t – час підйому на висоту h_{max} , тобто час протягом якого вертикальна складова швидкості зменшиться до 0. $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

$$\text{Отже, } l = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (2)$$

Формули (1) і (2) математичні моделі, за якими розв'язується дана фізична задача.

Дальність польоту міни для заданої швидкості v_0 буде максимальною у випадку, коли $\sin 2\alpha = 1$. За допомогою одиничного тригонометричного кола знаходимо, що в цьому випадку $2\alpha = 90^\circ$ $\alpha = 45^\circ$. Отже, найдовшу відстань міна пролетить тоді, коли постріл здійснено під кутом 45° до горизонту.

Обчислимо шукані величини для міномета М120-15 «Молот».

Відомо, що $v_0 = 325$ м/с, $g = 9,8$ м/с, 60° .

Тоді,

$$h_{max} = \frac{325^2 \sin^2 60^\circ}{2 \cdot 9,8} = \frac{105\,625 \cdot 0,75}{19,6} = 4041,7726 \approx 4042 \text{ (м)},$$

$$l = \frac{325^2 \sin 120^\circ}{2 \cdot 9,8} \approx \frac{105\,625 \cdot 0,866}{9,8} \approx 9334 \text{ (м)}.$$

$$\text{Відповідь: } h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, h_{max} \approx 4042 \text{ м}, l = 9334 \text{ м}.$$

*) якщо враховувати опір повітря, то значення знайдених величин будуть меншими. У технічних характеристиках міномета М120-15 «Молот» вказується, що ефективна дальність стрільби з нього до 7000 м.

Висновки. Формування обчислювальної компетентності є актуальною і важливою проблемою, яка недостатньо реалізується в навчанні математики. Цим варто зайнятися як дослідникам, так і практичним педагогам-математикам.

Для розв'язання даної проблеми слід, насамперед, чітко (в програмі з математики для школи) визначити зміст і вимоги до підготовки учнів з кожної навчальної теми, що в комплексі становитиме суть обчислювальної компетентності.

У відповідності до прийнятої програми шкільного курсу математики має бути нове наповнення шкільних підручників вправами, прикладними задачами, розв'язання яких і давало б змогу формувати вказану компетентність.

Названа проблема має стати предметом дослідження науковців, а результатом таких досліджень мають стати розроблені ефективні методики (технології) формування обчислювальної компетентності.

Розроблені методики мають стати предметом вивчення майбутніми вчителями математики, а також діючими вчителями в системі їх неперервної освіти.

Список використаних джерел

- Бар'яхтар, В. Г., & Божинова, Ф. Я. (2010). Фізика 10 клас. Академічний рівень: Підручник для загальноосвіт. навч. закладів. Харків, Україна: Ранок. 256 с.
- Кабінет Міністрів України. (2011). Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти (Постанова № 1392 від 23 листопада 2011 року). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-p>
- Жук І. В. (2015). Розвиток умінь старшокласників виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Київ, 2015. 280 с.
- Кліндухова, В. М., & Швець, В. О. (2010). Наближені обчислення на уроках математики: 5-9 кл. Київ, Україна: Шкільний світ. 128 с.
- Кліндухова В. М. Вивчення наближених обчислень в основній школі : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Київ, 2008. 341 с.
- Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма з математики для 10-11 класів (з поглибленим вивченням математики). <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень). <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. рівень стандарту. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Нелін, С. П. (2018). Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія: Підручник для 10 класу (рівень стандарту). Київ, Україна: Ранок.
- Нелін, С. П. (2019). Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія: підр. для 11 кл. (рівень стандарту). Київ, Україна: Ранок.
- Соколенко, Л. О., Філон, Л. Г., & Швець, В. О. (2010). Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: Практикум. Навчальний посібник. Київ, Україна: НПУ імені М. П. Драгоманова. 128 с.
- Швець, В., & Жук, І. (2014). Наближені обчислення в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. Математика в рідній школі, (11), 25-31.

References

- Baryakhtar, V. G., & Bozhinova, F. Ya. (2010). *Fizyka 10 klas. Akademichnyi riven: Pidruchnyk dlia zahalnoosvit. navch. zakladiv*. [Physics grade 10. Academic level: Textbook for educational institutions]. Kharkiv: Ranok.
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (November 23, 2011). State standard of basic and complete secondary education. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-n>
- Zhuk, I. V. (2015) Rozvytok umin starshoklasnykiv vykonuvaty nablyzheni obchyslennia v protsesi vyvchennia matematyky [Development of skills of high school students to perform approximate calculations in the process of studying mathematics]. Kandydats'ka dysertatsiia [Candidate's dissertation]. Kyiv: Drahomanov National Pedagogical University.
- Klindukhova, V. M., & Shvets, V. A. (2010). *Nablyzheni obchyslennia na urokakh matematyky: 5-9 klasy* [Approximate calculations in mathematics lessons: Grades 5-9]. Kyiv, Ukraine: Shkilnyi svit.
- Klindukhova, V. M. (2008) *Vyvchennia nablyzhenykh obchyslen v osnovnii shkoli* [Study of Approximate Calculations in Basic School]. Kandydats'ka dysertatsiia [Candidate's dissertation]. Kyiv: Drahomanov National Pedagogical University.
- Ministry of Education and Science of Ukraine. Mathematics curriculum for grades 10-11 (with advanced study of mathematics). <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. Mathematics curriculum for grades 10-11 of secondary schools (profile level). <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. The curriculum in mathematics for students of grades 10-11 of secondary schools. standard level. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Nelin, Ye. P. (2018). *Matematyka. Alhebra i pochatky analizu ta heometriia: Pidruchnyk dlia 10 klasu (riven standartu)* [Mathematics. Algebra and the beginnings of analysis and geometry: Textbook for grade 10 (standard level)]. Kyiv: Ranok.
- Nelin, Ye. P. (2019). *Matematyka: Alhebra i pochatky analizu ta heometriia: pidruchnyk dlia 11 kllasiv (riven standartu)*. [Mathematics: Algebra and Pre-Calculus and Geometry: Textbook for 11th grade (standard level)]. Kyiv: Ranok.
- Sokolenko, L. O., Filon, L. G., & Shvets, V. O. (2010). *Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursy alhebry i pochatkiv analizu: Praktykum. Navchalnyi posibnyk*. [Applied problems of natural character in the course of algebra and the beginnings of analysis: Workshop. Textbook]. Kyiv: Mikhail Drahomanov National Pedagogical University.
- Shvets, V., & Zhuk, I. (2014). *Nablyzheni obchyslennia v kursy alhebry i pochatkiv analizu 10 klasu* [Approximate calculations in the course of algebra and beginning analysis in grade 10]. *Matematyka v ridnii shkoli* [Mathematics in the native school], (11), 25-31.