

УДК 373.5.016:[512+517.17]

DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-7-19

Змістова лінія «Функції» шкільного курсу математики та особливості її вивчення в середній школі

Василь Швець

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна. E-mail: kmmvm@ukr.net

Анотація

У статті розкриваються важливі обставини і особливості вивчення в шкільному курсі математики змістової лінії «Функції». Серед обставин називається різне трактування поняття функції: у базовій школі функція розглядається (класичний підхід) як залежність між змінними величинами, а в старшій профільній як відповідність (сучасне, модерне означення) між елементами двох множин. Це призводить до різних схем дослідження властивостей функції та побудови її графіка.

Зазначається, що змістова лінія «Функції» є провідною лінією шкільного курсу алгебри, алгебри і початків аналізу. Вона – основа для вивчення рівнянь, нерівностей, тотожних перетворень алгебраїчних виразів, початків теорії ймовірностей, геометричних величин (площа фігури, об'єм тіла, площа поверхні тіла тощо). Її вивчення розпочинається з 7 класу і проходить в три етапи: 1 етап – 7-9 класи, коли вивчаються базові елементарні функції $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$. Основна мета їх вивчення – обґрунтувати вивчення лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь і нерівностей, тотожних перетворень одночленів, многочленів і дробових виразів, навчити застосовувати як математичні моделі під час вивчення фізики, розв'язування практичних та прикладних задач; 2 етап – 10-11 класи, коли вивчаються базові елементарні функції $y = x^r$, де $r \in \mathbb{Q}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$ та їх важливі властивості (зростання, спадання, періодичність, неперервність). Основна мета вивчення – навчити застосовувати до розв'язування ірраціональних, тригонометричних, показникових рівнянь і нерівностей, перетворення відповідних алгебраїчних виразів, будувати графіки складених елементарних функцій методом геометричних перетворень, графіків базових елементарних функцій, застосовувати як математичні моделі під час розв'язування практичних та прикладних задач; 3 етап – 11 клас, коли вивчаються «Похідна» та «Інтеграл». Основна мета вивчення – дати повну схему дослідження властивостей і побудови графіка диференційовної функції за допомогою похідної. Навчити застосовувати здобуті знання про властивості функцій під час розв'язування практичних та прикладних задач, під час формування ключових компетентностей.

Ключові слова: алгебра, алгебра і початки аналізу, змістова лінія «Функції», означення функції, методичні схеми дослідження властивостей функції.

UDC 373.5.016:[512+517.17]

DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-7-19

Content line "Functions" of the school mathematics course and the peculiarities of its study in secondary school

Vasyl Shvets

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine. E mail: kmmvm@ukr.net

Abstract

The article reveals the important circumstances and peculiarities of the study of the content line "Functions" in the school mathematics course. Among the circumstances is a different interpretation of the concept of function: in the basic school, the function is considered (classical approach) as a dependence between variables, and in the senior profile as a correspondence (modern, modern definition) between the elements of two sets. This leads to different schemes for studying the properties of a function and constructing its graph.

It is noted that the content line "Functions" is the leading line of the school course of algebra, algebra and the beginnings of analysis. It is the basis for studying equations, inequalities, identical transformations of algebraic expressions, the beginnings of probability theory, geometric quantities (area of a figure, volume of a body, surface area of a body, etc.). Its study begins with the 7th grade and takes place in three stages: 1st stage – 7-9 grades, when basic elementary functions $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$. The main purpose of their study is to substantiate the study of linear, quadratic, fractional-rational equations and inequalities, identical transformations of monomials, polynomials and fractional expressions, to teach how to use them as mathematical models during the study of physics, solving practical and applied problems; Stage 2 – 10-11 grades, when basic elementary functions $y = x^r$, where $r \in Q$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$ and their important properties (increase, decrease, periodicity, continuity). The main goal of the study is to learn how to solve irrational, trigonometric, exponential equations and inequalities, to transform the corresponding algebraic expressions, to construct graphs of complex elementary functions by the method of geometric transformations, graphs of basic elementary functions, to use them as mathematical models when solving practical and applied tasks; Stage 3 – 11th grade, when "Derivative" and "Integral" are studied. The main purpose of the study is to give a complete scheme of studying the properties and constructing a graph of the differential function using the derivative. Learn to apply the acquired knowledge about the properties of functions when solving practical and applied problems, during the formation of key competencies.

Keywords: algebra, algebra and the beginnings of analysis, content line "Functions", definition of a function, methodical schemes for researching the properties of a function.

*Функції потрібні не лише натуралістові, без них тепер не обійдеться й соціолог.
Узагалі в теперішній час немає жодної галузі людського знання, куди
не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.
К. Ф. Лебединцев*

Постановка проблеми. Однією з цілей вивчення алгебри, алгебри і початків аналізу в середній школі є – систематичне вивчення функцій як важливих математичних моделей, якими описуються та досліджуються багато природних явищ та процесів. На завершальному етапі навчання випускники середньої школи мають навчитись будувати графіки важливих, з точки зору практики, елементарних функцій, встановлювати їх властивості (область визначення та область значень, нулі функцій, проміжки зростання і спадання, парність, непарність, періодичність і т. д.), застосовувати отримані знання під час розв'язування практичних та прикладних задач.

Обсяг навчального матеріалу змістової лінії «Функції» великий, а тому його вивчення, враховуючи вікові можливості учнів, внутрішні зв'язки з іншими змістовими лініями, з іншими шкільними предметами розосереджено: частина матеріалу вивчається в базовій, а частина в старшій профільній школах.

Згідно діючого державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти (<http://surl.li/xedyqf>) учні мають (див. таблиця 1)

Таблиця 1

Змістова лінія «Функції» (базова школа)

	Вивчати		Оволодіти знаннями
Функції.	Лінійна	функція.	Знати і розуміти те, що таке координатна пряма
Обернена		пропорційність.	і координатна площина, означення функціональної
Квадратичні	функції.	Числові	залежності між змінними, способи задання
послідовності			функції, означення та властивості лінійної, квадратичної функції, функції оберненої пропорційності, функції числової послідовності, арифметичної та геометричної прогресії.
			Уміти визначати координати точки на площині, будувати точки за заданими їх координатами, будувати та аналізувати графіки функцій, зокрема лінійної, квадратичної функції, функції оберненої пропорційності, розв'язувати задачі із застосуванням формул загального члена та суми перших членів прогресії, застосовувати

функціональні залежності для створення математичних моделей реальних процесів та явищ

Змістова лінія «Функції» (старша профільна школа)

Вивчати

Властивості функцій. Степенева, тригонометрична, показникова та логарифмічна функції. Похідна. Інтеграл

Оволодіти знаннями

Знати і розуміти означення характерних функцій (зростання, спадання, парність тощо), означення та властивості степеневої, тригонометричної, показникової та логарифмічної функцій, зміст поняття неперервної функції, диференційовної функції, означення та властивості похідної та первісної.

Уміти будувати та аналізувати графіки функцій, зокрема степеневої, тригонометричної, показникової та логарифмічної функцій, знаходити похідні та первісні деяких функцій, застосовувати похідну для встановлення властивостей функцій та побудови їх графіків, первісну та інтеграл – для обчислення площі геометричних фігур

Більш ширше і глибше вивчення даної змістової лінії розкрито в чинних навчальних програмах та діючих альтернативних підручниках.

Таке розосереджене вивчення потребує врахування багатьох **особливостей і обставин**, які часто залишаються невідомими як для учнів, так (це потрібно визнати) і для окремих вчителів. Що ж це за обставини і особливості, які варто враховувати під час вивчення навчального матеріалу змістової лінії «Функції»? Саме на них ми і хочемо зосередити увагу читача. Отже,

Мета статті. Розкрити обставини і особливості вивчення в шкільному курсі математики змістової лінії «Функції», запропонувати авторські методичні рекомендації щодо формування в учнів математичних компетентностей на різних ступенях навчання. Звернути увагу математиків-методистів, авторів шкільних підручників з математики, вчителів математики на різні методичні схеми вивчення властивостей і побудови графіків елементарних функцій, що вивчаються в курсі алгебри та алгебри і початків аналізу.

Методи дослідження. Теоретичні – аналіз, синтез, порівняння, узагальнення теоретичного матеріалу, викладеного в навчальних та наукових джерелах. Емпіричні – опитування вчителів, вивчення учнівських письмових робіт.

Виклад основного матеріалу.

1. Вивчення змістової лінії «Функції» в базовій школі.

Перша обставина, на яку має звернути увагу вчитель та, під час вивчення змістової лінії «Функції», що в шкільному курсі математики вживається два підходи до визначення поняття функції.

Перший – класичний, він склався історично і відповідає точці зору фізиків. За ним функцію визначають як залежність між змінними величинами. Його дотримуються під час вивчення функцій в курсі алгебри базової школи. Поширеним є, наприклад, наступне визначення поняття функції: «Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y , то змінну y називають функцією від x » (Бевз, В. Г., & Бевз, Г. П., 2007, с. 180).

Змінна x та змінна y розглядаються як величини, числовими значеннями яких можуть бути раціональні або дійсні числа чи їх підмножини. Тому множина D – область визначення функції, завжди числова множина. Саме з нею пов'язані ті особливості, які слід враховувати. Коротко про них.

Першими функціями, з якими знайомляться учні є лінійна функція $y = kx + b$ (7 клас) та функція $y = \frac{k}{x}$ (обернена пропорційність, 8 клас). Разом з першою – друга обставина пов'язана саме областю визначення і областю значень функцій. На час вивчення вказаних функцій учні знайомі з множиною раціональних чисел Q . Знають, що результатом виконання арифметичних дій з раціональними числами буде раціональне число (оперують в полі раціональних чисел). Оскільки лінійна і обернена пропорційність функції задані формулою (аналітична), то учням потрібно пояснити, що:

областю визначення буде, у випадку лінійної функції – множина всіх раціональних чисел Q (і не вживати завуальованого терміну «множина всіх чисел», а у випадку функції обернена пропорційність – множина раціональних чисел Q без числа 0;

областю значень буде, у випадку лінійної функції ($k \neq 0$) – множина всіх раціональних чисел, а у випадку функції обернена пропорційність ($k \neq 0$) – множина раціональних чисел Q без числа 0;

Це цікаві і важливі з точки зору математики відомості, не вказати на них не можна.

графіком лінійної функції буде множина точок координатної площини, які розміщені на прямій лінії (і не вживати терміну, який можна зустріти на сторінках підручника), що графіком є пряма лінія, адже це помилка;

графіком функції обернена пропорційність є множина точок, які розміщуються на двох кривих лініях, одна з яких для $k > 0$ розташована в першій, а друга в третій чвертях координатної площини. Для $k < 0$ одна крива розташована в другій чверті, а друга в четвертій.

Таким чином, учні, наочно-оперативним шляхом (шляхом розв'язання практичних завдань) дізнаються, дивлячись на графік і називають без доведення:

а) для лінійної функції:

- якщо $k > 0$, то із збільшенням аргументу значення функції збільшується (постулюється властивість – функція зростає на всій області визначення), а пряма, на якій розміщується графік функції утворює з віссю OX гострий кут;

- якщо $k < 0$, то із збільшенням аргументу значення функції зменшується (постулюється властивість – функція спадає на всій області визначення), а пряма, на якій розміщується графік функції утворює з віссю OX тупий кут;

- якщо $k = 0$, то функція стала, її графік розміщений на прямій, паралельній осі OX .

б) для функції обернена пропорційність:

- якщо $k > 0$, то із збільшенням від’ємних значень аргументу значення функції зменшуються (функція спадає на множині від’ємних раціональних чисел), а графік розташовується на кривій в третій чверті координатної площини;

- якщо $k < 0$, то із збільшенням додатних значень аргументу значення функції зменшується (функція спадає на множині додатних раціональних чисел), а графік розташовується на прямій в першій чверті координатної площини.

Відповідні висновки учні формують також для $k < 0$. У підсумку в учнів, шляхом візуального спостереження, формуються уявлення про такі властивості функції як:

область визначення та область значень;

зростання функції на множині, спадання функції на множині.

Відбувається пропедевтичне ознайомлення з окремими властивостями функції (поступове «занурення» в теоретичний матеріал). Засвоюється відповідна термінологія. Отримані відомості згодом використовуються для графічного ілюстрування розв’язування лінійного рівняння з однією змінною, а також систем двох лінійних рівнянь з двома змінними, коефіцієнти в яких раціональні числа.

Програмою (<http://surl.li/howxnx>) передбачено формування у семикласників вмінь «знаходження за графіком лінійної функції значення функції за даним значенням аргументу і навпаки». Доречним буде при цьому наголосити що такі значення є наближеними і, оскільки область визначення та область значень функції – множина раціональних чисел, показати учням як можна визначити межу похибки, звернути їх увагу на якість такого обчислення, на ціну поділки чи на міліметровому папері чи на екрані комп’ютера, на якому побудовано графік функції. Таким чином учні познайомляться ще з одним джерелом наближених значень чисел і величин. Сказане актуальне і для функції $y = \frac{k}{x}$ (8 клас).

Вивчивши у 8 класі тему «Квадратні корені. Дійсні числа», учні отримують уявлення про множину дійсних чисел, про арифметичні дії над ними, про заміну під час практичних обчислень їх наближеними раціональними числами.

Тому слід повернутися до перегляду властивостей і графіків вивчених функцій $y = kx + b$ та $y = \frac{k}{x}$, які пов’язані з дійсними числами. Показати учням, які з властивостей змінюються,

в чому суть таких змін. Наступним кроком буде вивчення властивостей і графіків функцій $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Завершується **перший етап** вивчення змістової лінії «Функції» розглядом у 9 класі властивостей квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ та її графіка. Методичну схему вивчення найпростіших елементарних функцій $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$ на цьому етапі пропонуємо називати **наочно-пізнавальною (коротко МС-1)**. Її суть полягає в наступному:

За допомогою таблиці значень аргументу і значень функції будується ймовірний графік функції.

Користуючись графіком (зчитуються) постулюються властивості (без доведень, як гіпотези): проміжки зростання, спадання, нулі функції, проміжки знакосталості, особливі точки графіка.

Інші властивості вказаних функцій не розглядаються, а самі вони, як математичні моделі використовуються під час вивчення інших тем курсу алгебри, під час розв'язування практичних та прикладних задачах з суміжних дисциплін. Саме з такою метою вони і вивчаються.

2. Вивчення змістової лінії «Функції» в 10 класі.

Другий етап вивчення змістової лінії «Функції» припадає на 10 клас, під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу. У старшій профільній школі кількість елементарних функцій збільшується: степенева функція з раціональним показником, тригонометричні функції (обернені і необернені), показникова та логарифмічна функції. Розглядаються також функції множини: об'єм геометричного тіла, ймовірність випадкової події, площа поверхні геометричного тіла тощо. З'являється потреба у дослідженні нових важливих властивостей функції: зростання, спадання, періодичність, неперервність, проміжки знакосталості, нулі функції тощо.

Саме тому найпершою темою курсу алгебри і початків аналізу у всіх трьох програмах з математики (<http://surl.li/rtjdez>, <http://surl.li/jnqstc>, <http://surl.li/aaqrqk>) є тема, пов'язана з вивченням сучасного поняття функції та нових властивостей функцій і їх графіків.

Основна мета вивчення теми «Функції і їх графіки» наступна:

сформувані сучасне поняття функцій однієї змінної;

засвоїти нову методичну схему дослідження властивостей функції і її графіка; згідно нової програми здійснити огляд базових елементарних функцій, які вивчались в курсі алгебри основної школи; вивчити нові базові елементарні функції і їх графіки, що вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу;

навчити учнів будувати графіки складених елементарних функцій і встановлювати їх властивості (область визначення і область значень, нулі функції, проміжки зростання і

спадання, парність, непарність, періодичність, вертикальні і горизонтальні асимптоти) за допомогою геометричних перетворень графіків базових елементарних функцій.

Вивчивши тему учень / учениця (мають оволодіти компетентностями):

формулює сучасне означення функції, числової функції;

формулює означення парної, непарної, періодичної функції, монотонно зростаючої (спадної) функції на множині;

знаходить область визначення функції, значення функцій для заданих значень аргументу і значень аргументу за яких функція набуває даного значення;

встановлює за графіком функції її властивості і вміє їх довести, користуючись означенням;

будує графіки складених елементарних функцій методом геометричних перетворень графіків базових функцій.

Тепер поняття функції трактується як відповідність між елементами двох множин, елементами яких можуть бути об'єкти довільної природи. Його можна сформулювати абстрактно-дедуктивним методом. Наприклад, поширеним є наступне означення:

Означення: Нехай задано множину елементів X і множину елементів Y . Відповідність, при якій кожному елементу множини X відповідає один елемент множини Y називається функцією. Символічно це записується у вигляді рівності $y = f(x)$.

Множина X – називається область визначення функції (її позначають символом $D(f)$).

Множина Y – називається множина значень функції (її позначають символом $E(f)$).

Змінюється і методична схема вивчення властивостей функції і її графіка. На зміну схеми МС-1 встановлюється **методична схема МС-2** (її пропонуємо називати **наочно-практичною**). Суть цієї схеми містить наступну послідовність дій.

Встановлюється (обґрунтовується) область визначення функції $D(f)$.

За допомогою табличних значень «накидається» можливий графік функції.

Функція досліджується на парність, непарність.

Знаходяться нулі функції (точки перетину графіка з осями OX та OY).

Досліджується на яких проміжках функція зростає, спадає.

Досліджується чи є функція періодичною, неперервною.

Визначаються особливі точки графіка (нулі функції), за графіком (візуально) називаються найбільші, найменші значення функції і визначається область значень функції f .

За встановленою методичною схемою МС-2 надалі проводиться як огляд базових елементарних функцій, які вивчалися в курсі алгебри основної школи, так і, практично, вивчення нових елементарних функцій: $y = x^r$, де $r \in Q$,

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = e^x, y = a^x, y = \ln x, y = \log_a x.$$

Зразок застосування МС-2 показано нижче.

Приклад 1. Встановити властивості функції $y = \frac{1}{x}$ (обернена пропорційність).

Властивості :

1. Область визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ (відкладається на ОХ).

2. Будуємо графік функції. Для цього складаємо таблицю і на координатній площині будуємо графік (рис. 1):

X	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...
Y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	не існує	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$...

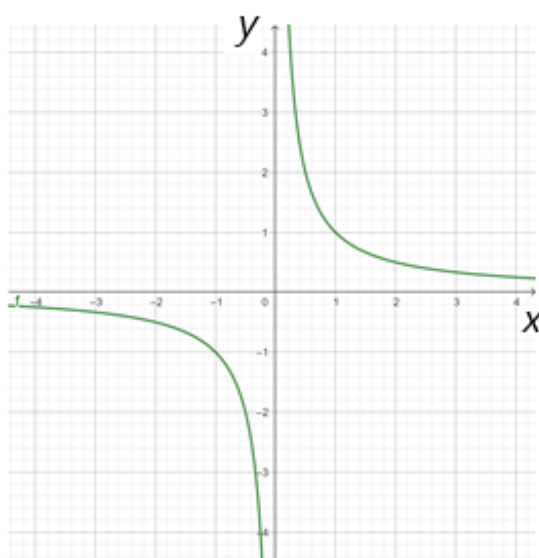


Рис. 1.

Примітка. Учніям варто запропонувати виготовити шаблон на міліметровому папері або придбати готовий. Надалі такі шаблони доцільно мати для функцій $y = x^2$, $y = x^3$ і т. п.

3. Проміжки зростання і спадання. Дивлячись на графік помічаємо, що на проміжках $(-\infty; 0)$ і на $(0; +\infty)$ функція спадає. Користуючись означенням, доведемо, що на проміжку $(0; +\infty)$ функція дійсно спадає.

Доведення. Нехай маємо два довільних значення аргументу:

$$x_1 > x_2, \text{ де } x_1, x_2 \in (0; \infty). \text{ Маємо } y_1 = f(x_1) = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = f(x_2) = \frac{1}{x_2}.$$

$$\text{Записуємо різницю : } y_1 - y_2 = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}.$$

Чисельник – від’ємний, а знаменник додатний, тому різниця $y_1 - y_2$ від’ємна.

Отже, на проміжку $(0; +\infty)$ $y_1 < y_2$ – функція спадна.

Аналогічно доводиться, що функція спадна на проміжку $(-\infty; 0)$.

Примітка. Варто запитати учнів: спадна чи зростаюча функція на всій області визначення $D(f)$?

4. Парна чи непарна функція (властивість). Діємо згідно означення. Перевіряємо властивості:

а) якщо $a \in D(f)$, то й $-a \in D(f)$ - область визначення симетрична відносно початку координат;

б) якщо $f(a) = \frac{1}{a}$, $f(-a) = \frac{1}{-a} = -\frac{1}{a} = -f(a)$.

Виконується рівність $f(-a) = -f(a)$. Отже, функція непарна, її графік симетричний відносно початку координат (показати учням на графіку що це означає).

5. Функція $y = \frac{1}{x}$ неперіодична.

Доведення. Припустимо, що функція періодична.

Тоді, за означенням існує таке число $T \neq 0$, що для всіх x з області визначення $f(x) = f(x + T)$, тобто для $\forall x \in D(f)$ маємо рівність :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+T} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+T} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+T-x}{x(x+T)} = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{x(x+T)} = 0$$

Рівність досягається коли $T = 0$, що суперечить умові. Отже, функція неперіодична.

6. Неперервність. Нехай $x = a \in D(f)$. Тоді $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} x} = \frac{1}{a}$. $f(a) = \frac{1}{a}$. Отже, функція неперервна у всіх точках області визначення.

Якщо $x = 0$, то маємо: $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Точка $x = 0$ - точка розриву графіка.

7. Уточнюємо графік функції згідно встановлених властивостей. Область значень: $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

8. Асимптоти: горизонтальна ОХ, вертикальна ОУ.

Побудова графіків складених елементарних функцій і дослідження їх властивостей здійснюється за допомогою геометричних перетворень графіків раніше вивчених базових функцій. Для цього учні мають знати перетворення і їх зміст, які виражаються формулами: $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$. Зразок такої побудови і дослідження подано нижче.

Приклад 2. Встановити властивості і побудувати графік функції $y = \frac{2x+8}{x+3}$.

Розв'язання. Подамо функцію в іншому вигляді:

$$y = \frac{2x+6+2}{x+3} = \frac{2(x+3)+2}{x+3} = \frac{2}{x+3} + 2, \text{ тобто } y = \frac{2}{x+3} + 2.$$

Схема побудови графіка даної функції наступна (покрокова):

1) виділяємо базову елементарну функцію, властивості якої вже вивчені.

Це функція $y = \frac{1}{x}$. Її графік відомий і є шаблон для побудови (графік 1).

2) за допомогою перетворення, $y = af(x)$ будемо графік функції $y = \frac{2}{x}$ – «розтягнем» графік 1 у два рази вздовж осі ОУ (графік 2).

3) за допомогою перетворення $y = f(x + a)$ будемо графік функції $y = \frac{2}{x+3}$ – паралельним перенесенням графіка 2 на вектор $\vec{n}(-3; 0)$ (графік 3).

4) за допомогою перетворення $y = f(x) + a$ будемо графік функції $y = \frac{2}{x+3} + 2$ – паралельним перенесенням графік 3 на вектор $\vec{m}(0; 2)$ (графік 4).

Допоміжні графіки бажано будувати різним кольором

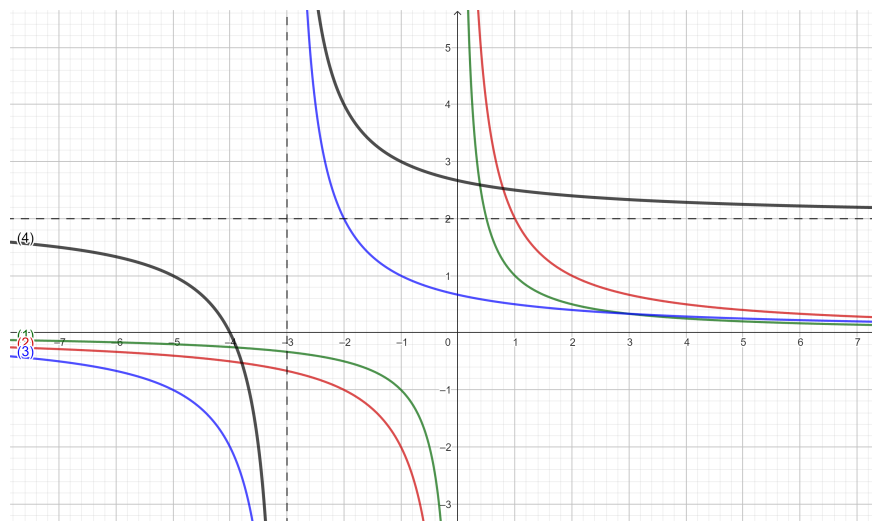


Рис. 2.

Дивлячись на графік, читаємо такі властивості функції $y = \frac{2x+8}{x+3}$:

1. Область визначення $D(f) = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
2. Область значень $E(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
3. Неперіодична.
4. Ні парна, ні непарна (індиферентна).
5. Точки перетину з віссю ОХ: $x = -4$.
6. Проміжки спадання $(-\infty; -3), (-3; \infty)$.
7. Горизонтальна асимптота $y = 2$.
8. Вертикальна асимптота $x = -3$.

Доводити названі властивості не потрібно, вони слідуєть із властивостей базової функції.

З іншими властивостями (екстремуми функції, диференційовність тощо) учні не знайомі. Потрібно сказати учням, що згодом вони з ними ознайомляться і будуть встановлювати за допомогою нових знань про похідну. Тоді схема дослідження МС-2 властивостей функції ще зазначає змін.

3. Вивчення змістової лінії «Функції» з використанням початків диференціального числення.

Третій, завершальний етап вивчення змістової лінії «Функції» розпочинається з вивченням теми «Похідна і її застосування». Похідна, як потужний засіб, дає змогу встановлювати для функцій екстремуми, найбільше та найменше значення, проміжки вогнутості і випуклості функцій, точки перетину графіка, горизонтальні асимптоти графіка. Таким чином методична схема МС-2 поповнюється новими діями, пов'язаними з перерахованими новими властивостями. Таку, нову схему ми пропонуємо називати дослідницько-практичною і коротко позначати МС-3. Її суть загально відома і полягає в наступному.

Встановлюється область визначення функції $D(f)$, будується на площині декартова система координат.

Визначаються нулі функції і відзначаються на осях ОХ та ОУ.

Визначаються проміжки зростання, спадання функції, з'ясовується чи є функція періодична.

Знаходяться екстремуми функції і відзначаються на координатній площині відповідні точки. З'ясовується чи є функція неперервна, наносяться на осі ОХ точки розриву графічно.

Визначаються точки перетину графіка, проміжки випуклості і вогнутості графіка.

Визначаються і будуються асимптоти графіка: вертикальні, горизонтальні, похилі.

Будується схематично з урахуванням властивостей, графік функції. Встановлюється область значень функції $E(f)$.

Приклади застосування МС-3 детально подані в діючих альтернативних підручниках з алгебри і початків аналізу, тому немає потреба їх наводити. Важливо навчити учнів застосовувати отримані знання під час розв'язування практичних та прикладних задач, де затребуваними будуть можливо і не всі, а окремі властивості функцій як властивості математичних моделей. Але це вже тема наступної публікації.

На завершення хочемо ще раз наголосити, змістова лінія «Функції» є фундаментальною лінією і як зазначив видатний радянський математик О. Я. Хінчин: «... Жодне інше поняття не відбиває явищ реальної дійсності з такою безпосередністю і конкретністю, як рухомість, і динамічність реального світу і взаємну обумовленість реальних величин...»

Список використаних джерел

- Бевз, В. Г., & Бевз, Г. П. (2007). Алгебра: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Зодіак-Еко. 304 с.
- Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. (2011). Затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 р. № 1392. Діє в старшій школі. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text>

- Державний стандарт базової середньої освіти. (2020) Затверджено постановою Кабінету Міністрів України, від 30.09.2020 р. № 989. Діє в основній школі 5-9 класи. https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/#google_vignette
- Дубинчук, О. С., Мальований, Ю. І., & Дичек, Н. П. (1991). Методика викладання алгебри в 7-9 кл. Київ: Радянська школа. 252 с.
- Навчальна програма з математики для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. (2017) Затверджена наказом МОН України від 07.06.2017, № 804: <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/>
- Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/>
- Навчальна програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58879/>
- Навчальна програма з математики для 10-11 класів (з поглибленим вивченням математики) <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58881/>
- Слепкань, З. І. (2006). Методика навчання математики. Київ: Зодіак-Еко. 310 с.
- Шунда, Н. М. (1983). Функції та їх графіки: Посібник для вчителів. Київ: Радянська школа. 190 с.

References

- Bevz, V. H., & Bevz, H. P. (2007). *Algebra: Pidruchnyk dlia 7 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv*. [Algebra: Textbook for the 7th grade of secondary schools]. Kyiv: Zodiak-Eco. [in Ukrainian]
- Kabinet Ministriv Ukrainy (2011). Derzhavnyi standart bazovoi i povnoi zahalnoi serednoi osvity. [State standard of basic and complete general secondary education]. Zatverdzheno postanovoiu Kabinetu Ministriv Ukrainy vid 23.11.2011 r. № 1392. Diie v starshii shkoli. [Approved by the Cabinet of Ministers of Ukraine of 23.11.2011 № 1392. It operates in high school]. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text> [in Ukrainian]
- Kabinet Ministriv Ukrainy (2020). Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity. [State standard of basic secondary education]. Zatverdzheno postanovoiu Kabinetu Ministriv Ukrainy vid 30.09.2020 r. № 989. Diie v osnovnii shkoli (5-9 klasy) [Approved by the Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine, dated 30.09.2020. № 989. It operates in the main school grades 5-9]. https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/#google_vignette [in Ukrainian]
- Dubynchuk, O. S., Malovanyi, Yu. I., & Dychek, N. P. (1991). *Metodyka vykladannia alhebra v 7-9 klasakh*. [Methods of teaching algebra in grades 7-9]. Kyiv: Radianska shkola. [in Ukrainian]
- Navchalna prohrama z matematyky dlia 5-9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. (2017). [Ministry of Education and Science of Ukraine. Mathematics curriculum for grades 5-9 of secondary schools] <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/> [in Ukrainian]
- Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Rivn. Standartu [Ministry of Education and Science of Ukraine. The curriculum in mathematics for students of grades 10-11 of secondary schools. standard level] <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/> [in Ukrainian]
- Navchalna prohrama z matematyky dlia 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv (profilnyi rivn). [Ministry of Education and Science of Ukraine. Mathematics curriculum for grades 10-11 of secondary schools (profile level)] <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58879/> [in Ukrainian]
- Navchalna prohrama z matematyky dlia 10-11 klasiv (z pohlyblenym vyvchennem matematyky) [Ministry of Education and Science of Ukraine. Mathematics curriculum for grades 10-11 (with advanced study of mathematics)] <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58881/> [in Ukrainian]
- Slepkan, Z. I. (2006). *Metodyka navchannia matematyky*. [Methods of teaching mathematics]. Kyiv: Zodiak-Eco. [in Ukrainian]
- Shunda, N. M. (1983). *Funktsii ta yikh hrafiky: Posibnyk dlia vchyteliv*. [Functions and their schedules: Manual for teachers]. Kyiv: Radianska shkola. [in Ukrainian]