

УДК 373.5.016:[514:510.6]

DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-20-28

Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ

Олександр Школьний

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна.

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.ua ORCID 0000-0002-3131-1915

Анотація

Наразі реформування української школи спрямоване на те, щоб її випускники в дорослому житті стали реалізованими та щасливими громадянами процвітаючої країни. Задля цієї мети основою реформи «Нова Українська Школа» (НУШ) був обраний компетентнісний підхід до навчання, який орієнтує весь процес навчання в школі не на формальне здобуття учнями знань, умінь і навичок у тій чи іншій предметній області, а на формування в них відповідних таких характеристик особистості, котрі дозволять у майбутньому забезпечити їм успішну самореалізацію. Етапами реалізації реформи української школи стало затвердження Державних стандартів освіти та модельних навчальних програм, зокрема, з математики. За цими програмами були створені відповідні підручники, зокрема, підручник інтегрованого курсу «Математика» для 7 класу авторського колективу Олександр Школьний, Євген Нелін, Андрій Милиник і Юлія Простакова. Даний підручник є інноваційним і передбачає еволюційне оновлення змісту шкільної математики в 7 класі, зокрема, введення адаптаційної теми «Поняття та їх означення, твердження та їх доведення», яка стосується логічних основ математики безпосередньо перед вивченням геометричного матеріалу на аксіоматичній основі.

Метою статті є висвітлення методичних особливостей вивчення логічних основ математики в курсі математики 7 класу НУШ. Зокрема, в роботі нами показано, яким чином здійснити адаптацію семикласників до вивчення абстрактного матеріалу з геометрії, який завжди викликав труднощі. Ця адаптація досягається шляхом пояснення на простих прикладах із повсякденного життя логічної суті понять і тверджень. Учні починають розуміти, чому окремим поняттям не дають означень, а лише певним чином їх моделюють, а окремі поняття означають через неозначувані поняття та поняття, означення яких уже дані. Також семикласникам стає зрозуміло, яким чином встановлюється істинність тверджень (на основі життєвого досвіду та домовленості), чому окремі твердження приймають без доведення, а окремі доводять.

Матеріали апробації згаданого підручника з математики для 7 класу свідчать про інтерес учнів до логічних основ математики, а також показують, що після опанування цього матеріалу вони легше сприймають вивчення властивостей найпростіших геометричних фігур. У подальшому ми плануємо продовжувати дослідження в цьому напрямку, оскільки цей підручник рекомендований МОН України для навчання математики в 7 класі НУШ.

Ключові слова: Нова Українська Школа, інтегрований курс «Математика», логічні основи математики, поняття та їх означення, твердження та їх доведення.

UDC 373.5.016:[514:510.6]

DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-20-28

Methodological features of studying the logical basics of mathematics in the integrated course “Mathematics” for students of the 7-th grade of NUS.

Oleksandr Shkolnyi

Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine.

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.ua ORCID 0000-0002-3131-1915

Abstract

Currently, the reform of the Ukrainian school is aimed at ensuring that its graduates become fulfilled and happy citizens of a prosperous country in adulthood. For this reason, the basis of the “New Ukrainian School” (NUS) reform was chosen to be a competency-based approach to learning, which focuses the entire process of learning at school not on the formal acquisition of knowledge, skills and abilities by students in one or another subject area, but on the formation of relevant such personality characteristics that will allow them to ensure their successful self-realization in the future. The stages of implementation of the Ukrainian school reform were the approval of State Education Standards and model programs, in particular, in mathematics. According to these programs, appropriate textbooks were created, in particular, the textbook of the integrated course “Mathematics” for the 7-th grade of the author’s team Oleksandr Shkolnyi, Yevhen Nelin, Andrii Mylianyk and Yuliia Prostakova. This textbook is innovative and involves an evolutionary update of the content of school mathematics in the 7-th grade, in particular, the introduction of the adaptation topic “Concepts and their definitions, statements and their proofs”, which concerns the logical foundations of mathematics immediately before studying geometric material on an axiomatic basis.

The purpose of the article is to highlight the methodological features of studying of math logical foundations in the 7-th grade mathematics course of NUS. In particular, in the article we show how to adapt seventh-graders to studying abstract geometry material, which has always caused difficulties. This adaptation is achieved by explaining the logical essence of concepts and statements using simple examples from everyday life. Students begin to understand why certain concepts are not defined, but only modeled in some way, and certain concepts are defined through undefined concepts and concepts whose definitions have already been given. It also becomes clear to seventh-graders how the truth of statements is established (on the basis of life experience and some agreements), why some statements are accepted without proof, and some of them are proved.

Approbation materials of the mentioned textbook on mathematics for the 7-th grade testify to the students’ interest in the logical foundations of mathematics, and also show that after mastering this material, they more easily perceive studying of the simplest geometric figures properties. In the future, we plan to continue research in this direction, since this textbook is recommended by the MES of Ukraine for teaching mathematics in the 7-th grade of the New Ukrainian School.

Keywords: New Ukrainian School, integrated course "Mathematics", logical foundations of mathematics, concepts and their definitions, statements and their proofs.

Постановка проблеми. Реформа освіти «Нова Українська Школа» (НУШ) виникла в результаті невідповідності запитів українського суспільства щодо української освітньої системи та результатів її функціонування. Ця невідповідність проявилася в результатах державної підсумкової атестації (ДПА) випускників 9 та 11 класів, зовнішнього незалежного оцінювання якості знань (ЗНО) абітурієнтів закладів вищої освіти (ЗВО), а також у результатах міжнародних порівняльних досліджень PISA (див., наприклад, НУШ, 2024; Бахрушин, 2019; Мазорчук та ін., 2019; Вакуленко та ін, 2021; УЦОЯО, 2021).

Основною ідеєю реформи НУШ є орієнтація учнівства, перш за все, на успішну інтеграцію в суспільство після закінчення школи, професійну реалізованість та особисте задоволення від власної діяльності в дорослому світі. Тому природно, що теоретичною основою реформи НУШ обрано *компетентнісний підхід*, який орієнтує весь процес навчання в школі не на формальне здобуття учнями знань, умінь і навичок у тій чи іншій предметній області, а на формування в них відповідних таких характеристик особистості, котрі дозволять у майбутньому забезпечити їм успішну самореалізацію.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Першим практичним кроком щодо реалізації такої концепції є створення *Державних стандартів освіти* – для початкової, базової середньої та старшої профільної школи. Ці стандарти були створені та затверджені відповідно у 2018, 2020 та 2024 році (КМУ України, 2018; КМУ України 2020; МОН України, 2024). На основі цих стандартів фахові авторські колективи розробили *модельні навчальні програми* для кожної з 9 освітніх галузей (мовно-літературної, математичної, природничої, технологічної, інформатичної, соціальної і здоров'язбережувальної, громадянської та історичної, мистецької, фізкультурної). Для математичної освітньої галузі, зокрема, існують більше десяти модельних програм з математики різних авторів для початкової школи та для базової середньої школи (МОН України, 2024).

На основі модельних програм вчителі в межах своєї академічної свободи мають розробити і впровадити відповідні навчальні програми, створити календарно-тематичне планування та інші дидактичні матеріали для здійснення освітньої діяльності. Однак, не слід забувати, що основним засобом навчання, зокрема, математики, при цьому залишаються підручники, створені авторськими колективами за затвердженнями Міністерством освіти і науки України (МОН) модельними навчальними програмами. Нині існує також більше 10 таких підручників з математики для початкової школи та для базової середньої школи (ІМЗО, 2024).

Авторський колектив у складі Марії Васишин, Андрія Миляника, Миколи Працьовитого, Юлії Простакової та Олександра Школьного створив інноваційну модельну програму з математики для 5-6 та 7-9 класів (Василишин та ін., 2021, Васишин та ін., 2023). Основною відмінністю цієї програми від інших модельних програм є орієнтація колективу на європейські та світові освітні тенденції останніх десятиліть. Наприклад, у цій програмі суттєво посилено імовірісно-статистичну лінію, пропонується вивчати в 7-9 паралельно з

плоскими геометричними фігурами також і просторові, вводяться елементи фінансової математики тощо. Більш детально особливості цієї програми висвітлено в статті (Shkolnyi, 2023).

Не зважаючи на те, що в 7-9 класах за описаною модельною програмою пропонується вивчати інтегрований курс математики замість окремих курсів алгебри та геометрії, геометричних матеріал залишається важливою складовою програми. Дійсно, саме цей матеріал значною мірою сприяє формуванню вміння учнів проводити логічні міркування та розвитку їх абстрактного мислення. Традиційно вивчення геометричного матеріалу з використанням абстрактного аксіоматичного методу розпочинається в 7 класі та викликає в учнів значні труднощі щодо його сприйняття, а у вчителів – труднощі щодо обґрунтування доцільності саме такого викладу.

У більшості діючих нині підручників адаптації учнів 7 класу до зміни стилю вивчення геометричного матеріалу порівняно зі стилем вивчення математичного матеріалу 1-6 класів практично не спостерігається. Тому багатьом із них важко зрозуміти, наприклад, чому окремим поняттям потрібно давати означення, а окремі ми вважаємо неозначуваними; чому окремі твердження потрібно доводити, а окремі можна прийняти без доведення; які логічні міркування можна вважати достатніми для обґрунтування твердження, а які – ні; як, власне, потрібно проводити логічні міркування та які логічні закони є основою цих міркувань тощо.

У підручнику авторського колективу Олександр Школьний, Євген Нелін, Андрій Милянник і Юлія Простакова, створеного за модельною програмою (Школьний та ін., 2024), наведено один можливих шляхів подолання вказаних вище труднощів. Зокрема, в цьому підручнику (згідно з модельною програмою) перед вивченням геометричного матеріалу вивчається розділ «Поняття та їх означення. Твердження та їх доведення», в якому на основі простих прикладів із повсякденного життя закладаються основи абстрактного логічного мислення, які будуть використані в подальшому при вивченні властивостей геометричних фігур на площині та в просторі.

Метою цієї статті є висвітлення методичних особливостей вивчення логічних основ математики в курсі математики 7 класу НУШ. Ми зосередимо свою увагу на тому, на що саме варто звернути увагу вчителів, які прагнуть усвідомленого формування в учнів НУШ абстрактного мислення. Також ми розповімо, як саме сприяти тому, щоби семикласники не лише не боялися працювати в подальшому з абстрактними поняттями і проводити логічні міркування, а ще й отримували від цього естетичне задоволення.

Виклад основного матеріалу. Основною ідеєю введення в модельну навчальну програму теми «Поняття та їх означення. Твердження та їх доведення» (а в підручник – відповідного розділу) є підготовка та адаптація учнів до наступного вивчення матеріалу, котрий раніше вивчався в курсі геометрії. Традиційно геометричний матеріал подається в школі з використанням аксіоматичної теорії. Тобто спочатку розглядаються неозначувані (первісні)

поняття геометрії (точка, пряма, площина) та неозначувані відношення (належати, лежати між, лежати по один бік). Далі з використанням неозначуваних понять і відношень наводяться означення інших геометричних фігур (відрізок, промінь, кут, трикутник тощо). Стосовно цих абстрактних об'єктів формують твердження, окремі з яких приймаються без доведення (аксіоми), а інші – доводяться на основі логічних міркувань (теореми).

Уже описана схема вивчення геометричного матеріалу наводить на думку, що його опанування буде даватися семикласникам непросто, а наш педагогічний досвід це лише додатково підтверджує. Річ у тім, що учням одразу доводиться мати справу з абстрактними поняттями і формальними логічними міркуваннями щодо них. А цьому їх (можливо, за певними виключеннями) ніхто ніколи не вчив. Крім того, внаслідок вікових особливостей, абстрактне мислення підлітків-семикласників лише починає формуватися. Матеріал цієї теми та розділу підручника має сприяти цьому формуванню.

Водночас зауважимо, що ми не ставимо перед собою мету абсолютно строго і повністю коректно з наукової точки зору викласти основи логіки. Мабуть, для більшості учнів 7 класу такий рівень викладу є недоступним для сприйняття. Крім того, дана тема покликана не ускладнити та формалізувати подальше вивчення геометричного матеріалу, а навпаки – спростити його шляхом використання аналогій. Учні мають зрозуміти, що означення понять вони вже давали, а істинність тверджень також уже неодноразово встановлювали і в повсякденному житті, і при вивченні курсу математики 1-6 класу. Тут ми прагнемо показати учням, що логічні міркування (в тому числі формулювання означень понять і доведення істинності тверджень) притаманні усім сферам людського життя і не стосуються лише певних абстрактних геометричних об'єктів – точок, прямих, відрізків, трикутників, кіл тощо.

Розпочинається вивчення даної теми з понять та їх означень. У підручнику (Шкільний та ін., 2024) із конкретних прикладів учні починають розуміти, що далеко не всім поняттям, що використовуються як у повсякденному житті, так і в науці, можна дати означення, бо означення нових понять здебільшого даються через інші, означені раніше поняття, тому такий ланцюжок не може тривати нескінченно. Отже, природно окремим поняттям не давати означень, а лише моделювати та описувати їх зрозумілим чином. Варто стимулювати учнів на уроці самим будувати власні ланцюжки понять доти, доки вони не дійдуть до необхідності домовитись якесь поняття зробити неозначуваним.

Після того, як учні усвідомлять необхідність неозначуваних понять та на конкретних прикладах із повсякденного життя і раніше вивчених понять курсу математики зрозуміють, яким чином можна давати означення, варто навести приклади точки, прямої та площини як основних неозначуваних понять геометрії. Це буде своєрідною пропедевтикою вивчення матеріалу наступного розділу підручника (теми модельної програми), що стосується найпростіших геометричних фігур – точок, прямої, відрізків, кутів, трикутників.

Важливо, щоб учні зрозуміли відмінність між самим поняттям і терміном, котрий його позначає. Для цього можна провести таку аналогію з деякою «коробкою»: поняття – це те, що лежить у «коробці», а термін – те, що на цій «коробці» написано. Приклади різних термінів, що стосуються одного поняття, також сприятимуть кращому розумінню учнів суті згаданої відмінності (моном і одночлен, поліном і многочлен, буква і літера, малюнок і рисунок тощо).

Співвідношення між обсягами понять зручно зображати за допомогою діаграм Венна. Такі задачі учні вже виконували в 5 класі (зокрема, за модельною програмою (Василишин та ін., 2021) і підручниками (Біос, 2022) та (Біос, 2023), не акцентуючи увагу на відповідній теоретичній складовій. Тому цей матеріал уже їм відомий, а отже не повинен викликати значних труднощів. Для обдарованих учнів важливо зробити акцент на залежності між обсягом та змістом поняття: чим більший зміст поняття (кількість властивостей, що його описують), тим менший його обсяг і навпаки – чим менший зміст поняття, тим більший його обсяг. При цьому, на нашу думку, не варто вимагати від учнів відтворення означень змісту та обсягу поняття, досить того, щоб учні на конкретних прикладах зрозуміли, що це таке.

Додатково підкреслюємо, що наведений вище матеріал не варто надмірно формалізовувати. Семикласники мають опановувати цей матеріал, фактично, в ігровій формі, маючи великий простір для творчого пошуку, висловлюючи власні (можливо, не завжди вдалі) пропозиції щодо означування понять із повсякденного життя. Учитель має виступати модератором, допомагаючи учням у підсумку уникати логічних помилок та некоректностей.

Після детального розгляду понять та їх означення природно перейти до розгляду тверджень та їх доведень. Звертаємо увагу, що означення поняття «твердження» дається після розгляду конкретних прикладів тверджень із повсякденного життя. Ми не радимо вимагати від усіх учнів обов'язкового запам'ятовування цього означення, натомість варто запропонувати учням навести приклади власних тверджень, що стосуються повсякденного життя та спробувати обґрунтувати їх істинність чи хибність. При цьому бажано звертати увагу на аргументи, які наводять учні на користь своєї позиції. У цьому випадку знову корисно дати семикласникам певну свободу та право на помилки у своїй аргументації, виступаючи в ролі модератора. Однак, наприкінці уроку вчителю слід висловити власну аргументовану думку з приводу наведених учнями міркувань, яка вказує на логічні помилки в цих міркуваннях (якщо вони були).

Ми вважаємо, що слід зробити акцент на тому, що істинність багатьох тверджень встановлюється за домовленістю. При цьому це стосується і сфери спілкування, і етичних норм, і юридичних норм. Однак, що природно, не можна домовитись про істинність чи хибність абсолютно всіх чи навіть більшості тверджень, бо це щонайменше створює технічні незручності в користуванні через громіздкість пошуку відповідної домовленості. Тому природно, що домовляються про істинність лише для певної мінімальної кількості тверджень (їх називають аксіомами), а істинність чи хибність інших тверджень обґрунтовують за

допомогою логічних міркувань (їх називають теоремами). Це дозволяє зменшити обсяги законодавчих документів, правил внутрішнього розпорядку тощо. Такими документами стає зручніше користуватися, але виникає потреба в розвитку логічних міркувань, що дозволятимуть за обмеженої кількості домовленостей ухвалити рішення у випадку, котрий не збігається безпосередньо з жодною з них.

Для проведення логічних міркувань використовуються закони логіки (закон тотожності, закон протилежності, закон виключення третього і закон достатньої підстави). Ми не радимо вимагати від учнів формального «зазубрювання» цих законів, натомість важливо наводити на уроках достатню кількість конкретних прикладів, щоб добитися розуміння цих законів. Зокрема, важливо, щоб учні розуміли відмінність між твердженнями, що є протилежними та супротивним до даного твердження.

Доцільно разом з учнями звернутися, наприклад, до тлумачного словника української мови і уточнити, що термін «протилежне» означає «те, що зовсім не схоже на що-небудь, несумісне з чимось». Слід навести достатню кількість тверджень із повсякденного життя, які ілюструють, що до даного твердження можна навести безліч протилежних тверджень, але лише одне з них буде супротивним. Це корисно для подальшого розуміння суті методу доведення від супротивного, який базується на законі виключення третього.

Доцільно звернути увагу учнів на те, що для формулювання твердження, супротивного до даного, найчастіше використовують частку «не» або словосполучення «неправда, що». Також корисно обговорити з учнями, що у випадку, якщо задане твердження буде істинним, то супротивне до нього твердження буде хибним, а якщо задане твердження буде хибним, то супротивне до нього твердження буде істинним.

Доцільно явно виділити для учнів план доведення тверджень методом від супротивного.

Припустимо супротивне тому, що потрібно довести.

Використовуючи це припущення, одержуємо висновок, який суперечить умові або відомому істинному твердженню.

Робимо висновок, що наше припущення неправильне, а отже, правильне (істинне) те, що потрібно довести.

Після розгляду тверджень із повсякденного життя природно наводити приклади вже відомих учням тверджень із курсу математики 1-6 класу, показуючи, які з них є аксіомами, а які – теоремами. Наприклад, закони додавання і множення (переставний, сполучний і розподільний) цілком можна вважати аксіомами, а от усі твердження про формули скороченого множення, вочевидь, є теоремами, доведення яких полягає в послідовному застосуванні згаданих законів. Цим самим ми підводимо семикласників до висновку, що весь пропонований у даній темі (розділі підручника) матеріал насправді, фактично, не є принципово новим, потрібно лише розставити певні акценти у вже відомому.

Висновки і перспективи подальших досліджень. На наше переконання, описане вище вивчення логічних основ математики, яке стосується понять та їх означень і тверджень та їх доведень, сприятиме глибшому засвоєнню геометричного матеріалу учнями 7 класу НУШ, а також сприятиме формуванню розуміння учнів необхідності розвитку власного абстрактного мислення, оскільки такий тип мислення стає в нагоді не лише на уроках математики, а й у повсякденному житті.

Пілотування та апробація модельної програми (Василишин та ін, 2023) і підручника (Шкільний та ін., 2024) протягом 2023-2024 навчального року в більш ніж 100 навчальних закладах України свідчать, що учні цілком позитивно сприймають такий підхід і перестають боятися абстрактних міркувань. Разом із тим слід зазначити, що ретельне дослідження ефективності такого способу опанування геометричного матеріалу учнями 7 класу НУШ іще попереду, оскільки дана програма та підручник використовуються в навчальному процесі, фактично, лише один навчальний рік. Однак, ми переконані в доцільності та перспективності даного підходу і будемо й надалі користуватися ним для формування ключових компетентностей учнів у контексті реформи «Нова українська школа».

Список використаних джерел

- Бахрушин, В. (2019) Математика у PISA-2018: Результати і висновки. Нова українська школа. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>.
- Біос, Дж. Е. (2022) Математика: підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти. Київ. «Формула».
- Біос, Дж. Е. (2023) Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти. Київ. «Формула».
- Вакуленко, Т., Горох, В., Раков, С., Терещенко, В. (2021) PISA-2022: Рамковий документ з математики. http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf
- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Шкільний, О.В. (2021) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf
- Василишин, М. С., Милянник, А. І., Працьовитий, М. В., Простакова, Ю. С., Шкільний, О. В. (2023) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf
- ІМЗО (2024) Електронні версії підручників. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikiv/>
- КМУ України (2018) Державний стандарт початкової освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-п#Text>.
- КМУ України (2020) Державний стандарт базової середньої освіти. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- Мазорчук, М., Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., Горох, В. (2019). Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- МОН України (2023). Державний стандарт профільної середньої освіти. <https://mon.gov.ua/storage/app/media/gromadske-obgovorennya/2023/10/30/HO-proyekt.Derzhstandartu.profilnoyi.serednoyi.osvity-30.10.2023.pdf>
- МОН України (2024) Математика. Модельні програми для 5-6 класів і 7-9 класів НУШ. <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/>
- НУШ (2024) Офіційний сайт проекту «Нова Українська школа». <https://nus.org.ua>
- УЦОЯО (2021) Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf
- Шкільний, О.В., Нелін, Є.П., Милянник, А.І., Простакова, Ю.С. (2024) Математика: підручник інтегрованого курсу для 7 класу закладів загальної середньої освіти (у 2 частинах). Харків. «Ранок».

Shkolnyi, O. (2023) New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In "Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău". Chișinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.

References

- Bakhrushyn, V. (2019). Matematika u PISA-2018: Rezultaty i vysnovky. *Nova ukrainska shkola*. [Mathematics in PISA-2018: Results and conclusions. New Ukrainian School]. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/> [in Ukrainian]
- Bios, J. E. (2022). *Matematika: Pidruchnyk dlia 5 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. [Mathematics: textbook for grade 5 institutions of general secondary education]. Kyiv: Formula. [in Ukrainian]
- Bios, J. E. (2023). *Matematika: Pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. [Mathematics: textbook for grade 6 institutions of general secondary education] Kyiv: Formula. [in Ukrainian]
- Vakulenko, T., Horokh, V., Rakov, S., & Tereshchenko, V. (2021). *PISA-2022: Ramkovyi dokument z matematyky*. [PISA-2022: Framework document on mathematics]. http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf [in Ukrainian]
- Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2021). Modelna navchalna prohrama "Matematika. 5-6 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for institutions of general secondary education]. https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf [in Ukrainian]
- Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2023). Modelna navchalna prohrama "Matematika. 7-9 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Model curriculum "Mathematics. Grades 7-9" for institutions of general secondary education.]. https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf [in Ukrainian]
- Institute of Modernization of Education Content. (2024). *Elektronni versii pidruchnykiv* [Electronic versions of textbooks]. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnykiv/> [in Ukrainian]
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2018). *Derzhavnyi standart pochatkovoï osvity* [State standard of primary education]. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-%D0%BF#Text> [in Ukrainian]
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2020). *Derzhavnyi standart bazovoï serednoi osvity* [State standard of basic secondary education]. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898> [in Ukrainian]
- Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, H., Shumova, K., Rakov, S., & Horokh, V. (2019). *Natsionalnyi zvit za rezultatamy mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2018* [National report on the results of the international study of the quality of education PISA-2018]. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf [in Ukrainian]
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2023). *Derzhavnyi standart profilnoi serednoi osvity* [State standard of specialized secondary education]. <https://mon.gov.ua/storage/app/media/gromadske-obgovorennia/2023/10/30/HO-projekt.Derzhstandartu.profilnoyi.serednoyi.osvity-30.10.2023.pdf> [in Ukrainian]
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2024). *Matematyka: Modelni prohramy dlia 5-6 klasiv i 7-9 klasiv NUSH* [Mathematics. Model programs for grades 5-6 and 7-9 NUS classes]. <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/> [in Ukrainian]
- New Ukrainian School. (2024). *Ofitsiyni sait projektu "Nova Ukrainska Shkola"* [Official site of the project "New Ukrainian School"] <https://nus.org.ua> [in Ukrainian]
- Ukrainian Center for Educational Quality Assessment. (2021). *Ofitsiyni zvit pro provedennia v 2021 rotsi zovnishnoho nezalezhnogo otsiniuvannia rezultatov navchannia, zdobutykh na osnovi povnoi zahalnoi serednoi osvity* [Official report on the 2021 external independent assessment of learning outcomes obtained on the basis of complete general secondary education]. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O. V., Nielin, Ye. P., Mylianyk, A. I., & Prostakova, Yu. S. (2024). *Matematika: Pidruchnyk integrovanooho kursu dlia 7 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2 chastynakh)* [Mathematics: textbook integrated course for grade 7 institutions of general secondary education (in 2 parts)]. Kharkiv: Ranok. [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O. (2023). New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In *Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău*. Chișinău: Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.