

УДК 37.016:373:51

DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-29-43

Чи є місце параметрам у шкільному курсі математики?

Алла Прус¹, Ольга Чемерис²

¹Житомирський державний університет імені І. Франка, м. Житомир, Україна. E-mail: pruswork@gmail.com,

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

²Житомирський державний університет імені І. Франка, м. Житомир, Україна. E-mail: chemeryswork@gmail.com ,

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7099-1095>

Анотація

У дослідженні порушується питання доцільності та корисності завдань із параметрами в курсі математики, який вивчається в загальноосвітніх закладах України. Мета статті – представити власне бачення можливості формування поняття параметра у шкільному курсі математики, починаючи з основної школи.

Зазначено, що процес формування поняття параметра є ефективним, якщо його учасники вмотивовані, мають компетенції здійснювати даний процес, створено відповідні стартові умови для цього процесу та умови його підтримки впродовж навчання. З'ясовано, що в основній школі у двох із чотирьох існуючих модельних навчальних програм із алгебри завдання з параметрами не згадуються. В двох інших такі завдання зараховані до додаткових тем. Тобто питання про доцільність навчання їх розв'язувати віднесено на розсуд вчителя. Проаналізовано дев'ять діючих підручників для сьомого класу різних авторських колективів на предмет того, чи згадується у них про параметри, чи є вправи з параметрами у темі «Лінійні рівняння з однією змінною», де параметри могли цілком природно з'явитись у шкільному курсі математики основної школи. Встановлено, що у більшості підручників в означенні лінійного рівняння не використовується поняття параметра, лише в одному підручнику поняття лінійного рівняння з параметром вводиться у спеціальній рубриці для тих, хто хоче знати більше. Водночас, майже в усіх підручниках завдання з параметрами, фактично, містяться у системі завдань до теми «Лінійні рівняння з однією змінною». Однак вони є ніби у «прихованому» вигляді, оскільки формулювання завдань не містять слова «параметр». Окреслено теми алгебри 7-9 класів, у процесі вивчення яких можна було б навчати учнів розв'язувати завдання з параметрами в явному вигляді. Це могло б допомогти учнями не боятись таких завдань у подальшому та сформувати вміння розв'язувати базові завдання з параметрами. Акцентовано увагу на важливості збереження завдань із параметрами у шкільному курсі математики.

Ключові слова: параметр; завдання з параметрами; лінійні рівняння з параметрами; основна школа; шкільний курс математики.

UDC 37.016:373:51

DOI: 10.31652/3041-2277-2024-2-29-43

Is there a place for parameters in the school mathematics course?

Alla Prus¹, Olga Chemeris²

¹Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine. E-mail: pruswork@gmail.com,

ORCID ID <https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

²Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine. E-mail: chemeryswork@gmail.com,

ORCID ID <https://orcid.org/0000-0002-7099-1095>

Abstract

The question of the expediency and usefulness of problems with parameters in the Mathematics course taught in secondary schools in Ukraine is raised in this study. The purpose of the paper is to present the author's own vision of the possibility of forming the concept of parameter in the school course of Mathematics, starting from the primary school.

It is noted that the process of forming the concept of a parameter is effective if its participants are motivated, have the competence to carry out this process, and appropriate starting conditions for this process and conditions for its support during the course of study are created. It has been found that in primary school, two of the four existing model curricula of Algebra do not include problems with parameters. In the other two, such tasks are included in additional topics. That is, the question of the expediency of learning to solve them is at the discretion of the teacher. Nine current seventh-grade textbooks created by different authors were analyzed to determine whether they mention parameters or have problems with parameters in the topic "Linear equations with one variable", where parameters could naturally appear in the primary school course of Mathematics. It was found that most textbooks do not use the concept of a parameter in the definition of a linear equation; and only one textbook introduces the concept of a linear equation with a parameter in a special section for those who want to know more. At the same time, in almost all textbooks, problems with parameters are actually included in the system of problems for the topic "Linear equations with one variable". However, they are in a "hidden" form, as the wording of the tasks does not contain the word 'parameter'. The paper outlines the topics of Algebra in grades from 7th to 9th, which could be taught to pupils to solve problems with parameters explicitly. This could help pupils not to be afraid of such tasks in the future and develop the ability to solve basic problems with parameters. The paper emphasizes the importance of keeping problems with parameters in the school course of Mathematics.

Keywords: parameter; problems with parameters; linear equations with parameters; primary school; school course of Mathematics.

Постановка проблеми. Параметри, а точніше завдання з параметрами посіли місце «страшилок» для більшості учнів, які проходять державну атестацію по закінченню вивчення курсу математики в школі. Основною причиною є відсутність достатньої практики з розв'язування завдань такого типу на уроках. Така ситуація практично унеможливорює їх вирішення під час іспиту. Учні намагаються надолужити цю прогалину самостійно або звертаються до репетиторів за допомогою. Це не завжди дає бажаний результат. Причиною вважають те, що навчання розв'язувати завдання з параметрами потребує багато зусиль та часу. У цьому можна вбачати також певне пояснення того факту, що вчителі нерідко обирають за краще взагалі не знайомити учнів із таким завданнями.

Зрозуміло, протягом останніх чотирьох років вітчизняна система освіти перебуває у надскладних обставинах унаслідок спочатку пандемії COVID-19, а потім широкомасштабної військової агресії Росії. Тому наразі є проблеми, які потребують невідкладного вирішення. Одна з головних – це подолання навчальних втрат, оскільки навчальні втрати можуть спричинити значний негативний вплив як на розвиток особистості, так і на добробут цілих суспільств у майбутньому. Зазначимо, що ми вживаємо поняття «навчальні втрати» як видове поняття до родового поняття «освітні втрати», маючи на увазі втрату знань, умінь, навичок та/або уповільнення чи переривання академічного прогресу через паузи в навчанні конкретного учня (Бичко, Терещенко, 2023, с.28).

Тож природно постає питання про доцільність існування завдань із параметрами у шкільному курсі математики в Україні. Відразу зазначимо, що мова не йде про шкільний курс математики, який вивчається на поглибленому рівні, на якому параметри по праву займають свою нішу.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Перша властивість, яка завжди характеризує поняття «параметр» у переважній більшості досліджень – це складність (наприклад, Лейфура, 1996, с.4; Ilany & Hassidov, 2014, p.967; Godino et al., 2014; Valentina Postelnicu & Florin Postelnicu, 2015, p.458; Прус & Швець, 2019, с. 5). Параметри діють як мета-змінні та мають ієрархічно вищу позицію порівняно зі змінними в математиці (Drijvers, 2003). Параметри можна вважати загальними числами, але другого порядку, тобто необхідні при узагальненні загальних тверджень першого порядку. Під загальними твердженнями першого порядку розуміють твердження, які отримані з узагальнюючих тверджень, що містять лише числа. (Ursini & Trigueros, 2004, p.361). Відповідно, завдання, до яких входить параметр, наприклад, рівняння, нерівності, їх системи, теж є складними. Рівняння або функція з параметром означає сімейство рівнянь або функцій, де конкретні екземпляри можуть бути створені шляхом заміни параметра числами, тоді як інші літери все ще виконують роль невідомих або змінних. Більш формальне визначення: рівняння або функція з параметром — це функція (другого порядку), аргументом якої є параметр, а відповідними значеннями є рівняння або функції (з іншими літерами як невідомі або змінні) (Bloedy-Vinner, 2001, p.180).

Отже, процес формування поняття параметра теж є непростим і потребує комплексу умов для його забезпечення:

- 1) мотивація в учнів навчатись розв'язувати завдання з параметрами; 2) мотивація вчителя навчати розв'язувати такі завдання;
- 3) компетентність учителя формувати поняття параметра;
- 4) певний рівень знань та вмінь учнів для сприйняття поняття параметра та подальшої роботи з завданнями з параметрами;
- 5) існування завдань із параметрами у діючих шкільних підручниках;
- 6) можливість виділити час для формування поняття параметра.

Другою ознакою поняття параметра є його безумовна важливість для розвитку учнів. А саме розвиток особистості учня є метою математичної освітньої галузі (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020). У процесі розв'язування задач із параметрами до арсеналу прийомів та методів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія (навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів, профільний рівень, 2018, с. 12). Задачі з параметрами є також засобом формування дослідницьких вмінь учнів (Карлащук, 2001, С.68). Зазначимо, що вміння досліджувати проблемні ситуації є серед вимог до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020). Одне із важливих завдань математичної освітньої галузі, яке сформульовано в усіх діючих навчальних програмах основної та старшої школи - це залучення учнів до використання рівнянь і функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних задач. І з цим завданням теж може допомогти впоратись сформоване поняття параметра, тому що задачі з параметрами можна розглядати як моделі реальних ситуацій і прикладних процесів, а також як спосіб узагальнення математичних тверджень, понять, задач (Карлащук, 2001, С.70).

Ще однією особливістю задач із параметрами є їх діагностична та прогностична цінність. Ці задачі дозволяють перевірити рівень знань основних розділів шкільного курсу математики, рівень логічного мислення учнів, початкові навички дослідницької діяльності (Šedivý, 1976, p.121; навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів, профільний рівень, 2018, с. 12).

Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми. У науково-методичних роботах зазвичай порушується питання про труднощі процесу формування поняття параметра, надаються методичні рекомендації та пропонуються засоби, які полегшують цей процес. Учасниками більшості досліджень є учні старших класів, учні коледжів, майбутні учителі математики або діючі вчителі математики. Основний фокус нашого дослідження лежить у площині основної школи.

Мета статті – представити своє бачення можливості формування поняття параметра у шкільному курсі математики, починаючи з основної школи.

Виклад основного матеріалу. З'ясуємо, яке місце для завдань із параметрами вже відведено в початкових програмах та діючих підручниках, починаючи з циклу базового предметного навчання (з 7 класу, вік учнів 12-13 років). З цією метою, ми спочатку переглянули окремі модельні навчальні програми з алгебри для 7-9 класів Нової української школи (НУШ) та діючі навчальні програми з математики для старшої школи (вік 15-17 років) (табл.1).

Таблиця 1. Завдання з параметрами та навчальні програми.

№	Назва програми, рік	Автори	Про параметри
1	Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти, 2023	Бурда М. І. Тарасенкова Н.А.В асильєва Д. В.	Не знайшли згадок про параметри чи завдання з ними
2	Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти, 2022	Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А. Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.	Не знайшли згадок про параметри чи завдання з ними
3	Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти, 2023	Істер О. С.	Завдання з параметрами віднесені до додаткових тем: «Розв'язування лінійних рівнянь з параметрами», «Розв'язування раціональних рівнянь з параметрами», «Задачі на дослідження властивостей квадратного тричлена з параметрами», «Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами»
4	Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної	Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Семчук А. Р., Ілащук О. Г., Мар'янчук О. Т., Рябий С. І.	Завдання з параметрами віднесені до додаткових тем: «Дослідження та розв'язування лінійних рівнянь із параметром», «Дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь із параметром», «Дослідження та розв'язування квадратних рівнянь із параметром», «Дослідження та розв'язування нерівностей із параметром», «Умови розміщення коренів

	середньої освіти, 2023		квадратного рівняння відносно заданих чисел», «Дослідження і розв'язування систем рівнянь із параметрами».
5	Навчальна програма з математики (рівень стандарту) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, 2017	Не вказано	Не знайшли згадок про параметри чи завдання з ними
6	Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, 2018	Не вказано	В пояснювальній записці до програми зазначено, що в програмі приділено розв'язуванню задач з параметрам значне місце. Найпростіші рівняння з параметрами (Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності, 10 клас). Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами (Тема 2. Степова функція, 10 клас). Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами (Тема 4. Тригонометричні рівняння і нерівності, 10 клас). Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи з параметрами (Тема 1. Показникова та логарифмічна функції, 11 клас).

Таким чином, у старшій школі лише у програмі з математики профільного рівня завдання з параметрами є обов'язковими до вивчення. В основній школі у двох із чотирьох існуючих модельних навчальних програм із алгебри про такі завдання заявлено, однак вирішення питання про доцільність навчання їх розв'язувати віднесено на розсуд вчителя.

На основі створених модельних навчальних програм, які запроваджуються поетапно з 2022 року, вже були написані та введені у навчальний процес підручники для 7 класу. Ми дослідили дев'ять таких підручників різних авторських колективів на предмет того, чи згадується у них про параметри, чи є вправи з параметрами. При чому, в кожному з підручників ми аналізували лише одну тему. Ми обрали тему «Лінійні рівняння», де параметри, на нашу думку, могли цілком природно з'явитись у шкільному курсі математики.

У переважній більшості підручників в означенні лінійного рівняння букви a , b найчастіше трактуються лише як «деякі числа», наприклад (рис.1), або «деякі відомі числа» (Кравчук, Підручна & Янченко, 2023, С.156), «довільні числа» (Мальований, Литвиненко & 2024, С.147).

Означення. Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Рис.1 (Мерзляк & Якір, 2024, С. 14)

В окремих підручниках (Бевз та ін., 2023, с.162; Біляніна та ін., 2024, с.8; Істер, 2024, С.19; Прокопенко, Захарійченко & Пекарська, 2024, с.174), після означення лінійного рівняння з однією змінною, додатково зазначається, що числа a , b мають ще одну назву – коефіцієнти рівняння, а одна з букв ще може називатись вільним членом, наприклад, рис. 2.

Числа a і b — коефіцієнти рівняння. Коефіцієнт b має ще іншу назву — вільний член.

Рис. 2 (Прокопенко, Захарійченко & Пекарська, 2024, С.174).

Зрозуміло, що a , b в лінійному рівнянні – це не просто деякі числа, а параметри, оскільки що вони продукують ціле сімейство лінійних рівнянь. В одному з підручників (Шкільний та ін., 2024, с.130) автори вказують на це, коли називають a , b і числами, і синонімічно вживають також термін «параметр» (рис. 2).

Рівняння виду $ax+b=0$, де x — змінна, а a і b — числа, називають найпростішими лінійними рівняннями. Залежно від значень параметрів a і b це рівняння може мати один корінь, безліч коренів або не мати їх зовсім.

Рис. 3 (Шкільний та ін., 2024, с.130)

Особливу увагу ми звернули на єдиний підручник, в якому спеціально для ознайомлення із таким поняттям як параметр відведено місце у рубриці «Дізнайтеся більше», де також наведені розв'язання декількох завдань із параметрами (рис. 4).

Дізнайтеся більше

Будь-яке рівняння, записане в загальному вигляді, можна вважати рівнянням з параметрами (одним чи кількома). Наприклад, у рівнянні $ax + b = 0$ коефіцієнти a і b є параметрами. Якщо $a = 0$, або $a \neq 0$, або $a = b = 0$, то вважають, що дане рівняння змінюється якісно, бо змінюється кількість його коренів. Такі значення параметрів називають контрольними (КЗП). За їх наявності розв'язування рівняння з параметрами розбивають на кілька випадків залежно від контрольних значень параметрів. У цьому полягає суть методу розгалуження в розв'язуванні рівнянь з параметрами. Розглянемо приклади.

Задача 3 Розв'яжіть рівняння з параметром a : $ax = 10$.

Розв'язання

Параметр: a ,
 КЗП: $a = 0$,
 Нехай $a = 0$, тоді: $0 \cdot x = 10$ — коренів немає,
 Нехай $a \neq 0$, тоді: $x = \frac{10}{a}$ — корінь рівняння.

Відповідь: якщо $a = 0$, то коренів немає, якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{10}{a}$.

Задача 4 За яких значень параметра a рівняння $(a-2)y = a^2 - 4$ має безліч коренів?

Розв'язання Дане рівняння має безліч коренів, якщо одночасно $a - 2 = 0$ і $a^2 - 4 = 0$. Звідси $a = 2$.

Відповідь: $a = 2$.

Рис. 4 (Тарасенкова та ін., 2004, с.200)

Слід зазначити, що ще у трьох підручниках, серед зразків розв'язань лінійних рівнянь, які подаються у відповідному параграфі про лінійні рівняння, теж є приклади розв'язань завдань із параметрами. Однак шановні автори не пояснюють учням роль букви, відмінної від букви, яка позначає невідоме у рівнянні, та жодним чином не повідомляють учням, що це за вид завдання (рис. 5, 6, 7).

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $(a - 1)x = 2$; 2) $(a + 9)x = a + 9$.

Розв'язання. 1) При $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$. У цьому випадку коренів немає. При $a \neq 1$ отримуємо: $x = \frac{2}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку коренем рівняння є будь-яке число. При $a \neq -9$ отримуємо: $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = -9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -9$, то $x = 1$. ◀

Рис. 5 (Мерзляк & Якір, 2024, С.16)

Приклад 4. Розв'язати рівняння $5(x + p) = 3x - 7p$, x — змінна.

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$5x + 5p = 3x - 7p.$$

Перенесемо доданок $3x$ у ліву частину, а $5p$ — у праву.

Матимемо: $5x - 3x = -7p - 5p$, тобто $2x = -12p$.

Тоді $x = (-12p) : 2$, тобто $x = (-12 : 2)p$, отже, $x = -6p$.

Відповідь: $-6p$.

Рис. 6 (Істер, 2024, С.22)

3. Розв'яжи рівняння $(a - 5)x = 8$.

Розв'язання. Щоб знайти невідомий множник, потрібно добуток поділити на відомий множник, тобто 8 поділити на $a - 5$. Але якщо $a - 5 = 0$, то ділення виконати неможливо. Тому потрібно розглянути декілька випадків.

1. Якщо $a - 5 = 0$, тобто $a = 5$, то рівняння набуває вигляду $0x = 8$. Отже, якщо $a = 5$, то рівняння коренів не має.

2. Якщо $a \neq 5$, то рівняння має один корінь $x = \frac{8}{a-5}$.

Відповідь. Якщо $a = 5$, то рівняння коренів не має; якщо $a \neq 5$, то $x = \frac{8}{a-5}$.

Рис. 7 (Бевз та ін., 2023, С.164)

Серед завдань, які пропонуються учням для розв'язування до теми «Лінійні рівняння з однією змінною» в шести підручниках завдання із параметрами водночас начебто є і ніби немає, оскільки у текстах завдань не написано, що це рівняння з параметрами, наприклад (рис. 8). Причому, на нашу думку, поняття «кластер» (рис. 9) теж непросте, однак воно все ж використовується у формулюванні завдання, а поняття «параметр» - ні.

68.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) (b + 1)x = 9; \quad 2) (b^2 + 1)x = -4.$$

Рис. 8 (Мерзляк & Якір, 2024, С.21)

1.14*. Побудувати кластер розв'язання рівняння $kx + b = 0$ у загальному вигляді.

Рис. 9 (Біляніна та ін., 2024, С.10)

Будемо називати такі завдання як завдання із «прихованими параметрами». Зазначимо, що всі завдання з «прихованими параметрами» віднесені, цілком зрозуміло, до завдань високого рівня. Таких завдань знайшлося у діючих підручниках цілком достатньо для того, щоб учитель, за сприятливих обставин, міг розпочати роботу із розв'язування лінійних рівнянь із параметрами:

№882-888 (Бевз та ін., 2023, С.168) – 7 номерів;

№1.15, 1.46 (Біляніна та ін., 2024, С.10, 18) – 2 номери;

№820, 821, 823, 873, 874, є серед завдань для самоперевірки (Кравчук, Підручна & Янченко, 2024, с.161, 170, 173) - 10 номерів (!);

№134, 135, 140-147 (Істер, 2024, с.26) – 10 номерів (!);

№57-59, 61-69, 74-77 (Мерзляк & Якір, 2024, С.20-21) – 16 номерів (!);

№ 16.11, 16.13 (Прокопенко, Захарійченко & Пекарська, 2024, С.182-183) – 2 номери.

Цілком закономірно, що лише в підручнику авторів Тарасенкова та ін., у якому повідомили учням про лінійні рівняння з параметрами, вимога до завдань із параметрами формулюється прямо, наприклад, рис. 10.

796*. Розв'яжіть рівняння з параметрами a і b :

$$\begin{array}{ll} 1) ax + 1 = 5 - 2x; & 3) (a^2 - 4)x + 2 = a; \\ 2) (a - 1)x + 2 = a + 1; & 4) a(y - b) - b(a - 2) + 2y. \end{array}$$

Рис. 10 (Тарасенкова та ін., 2024, С. 204)

Нам імпонує підхід, коли поняття параметра не тримають у тіні, не завуальовують. І для цього непотрібно міняти модельну навчальну програму, це не вимагає кардинальних змін у

діючих підручниках, просто потрібно назвати параметр параметром. Таким чином, ми показуємо учням, що такі завдання включені у систему завдань шкільного курсу математики, даємо можливість учням з ними ознайомитись, спробувати розв'язати, пропонуємо вчителю вирішувати, чи є умови для формування поняття параметра у кожній конкретній ситуації (наприклад, у конкретному класі).

Думаємо, що параметри могли б явно з'явитись у 7 класі, крім теми «Лінійні рівняння з однією змінною», також у темах «Лінійне рівняння з двома змінними», «Система двох лінійних рівнянь з двома змінними», «Лінійна функція, її графік та властивості»; у 8 класі це могло бути у темах «Квадратні рівняння», «Функція $y = \frac{k}{x}$ та її властивості»; у 9 класі це могло б бути у темах «Лінійні нерівності з однією змінною», «Системи лінійних нерівностей з однією змінною», «Розв'язування квадратних нерівностей», «Системи рівнянь із двома змінними», «Квадратична функція, її властивості та графік». Підручники з алгебри для 8, 9 класів НУШ ще у роботі. Так, наприклад, для 8 класу вони будуть введені у навчальний процес лише у наступному навчальному році. Можливо, шановні автори підручників розглянуть можливість внесення незначних змін у формулювання відповідних завдань?

Ймовірно, це могло б позитивно вплинути на математичну компетентність учнів із високим рівнем навчальних досягнень (та не лише їх), які у старшій школі будуть цілеспрямовано готуватись до розв'язування відповідних завдань державної атестації. Пояснимо свою думку на прикладі розв'язування одного із завдань, яке пропонувалось випускникам на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) на основній сесії ще в 2016 році:

розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра a . Його складність (P-value) 1,39. Зазначимо, що P-value визначається як відношення (у відсотках) кількості балів, набраних усіма учасниками за виконання цього завдання, до максимальної кількості балів, яку вони могли б отримати за його виконання. Якщо цей показник менший за 20%, то завдання відноситься до дуже складних. Розв'язали це завдання правильно лише 0,11% старшокласників, а 94,25% отримали за нього 0 балів. Що потрібно було знати учням, щоб його розв'язати? Які вміння потрібні учню? Коли для цього міг (може) бути час? Пройдемо етапами одного із способів його розв'язування та будемо зазначати поряд можливі відповіді на поставлені вище запитання.

Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання.

1. Складемо систему, яка визначає область визначення заданого рівняння:

$$\begin{cases} x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 \geq 0, \\ 2a \geq 0, \\ 5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

1.1) знати, що таке область визначення (область допустимих значень рівняння) – основна школа;

1.2) знати, що знаменник дроби не дорівнює нулю – основна школа;

1.3) знати, що вираз під квадратним коренем невід’ємний – основна школа.

1.4) вміти записувати за допомогою математичних символів визначені вище умови, вміти розрізняти невідому величину та параметр – основна школа, старша школа.

2. Перейдемо на визначеній вище області визначення до такого рівняння:

$$\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a} = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} = 2\sqrt{2a};$$

$$x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 = 8a;$$

2.1) знати умову рівності дроби нулю – основна школа;

2.2) знати, що таке рівносильні переходи – основна школа, старша школа;

2.3) знати спосіб розв’язувати ірраціональних рівнянь, ліва та права частини яких невід’ємні – старша школа;

$$x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 - 8a = 0;$$

$$A = 1; B = 4a - 4, C = 4a^2 - 8a,$$

$$D = (4a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4a^2 - 8a) = 16,$$

$$x_{1,2} = \frac{-(4a-4) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1},$$

$$x_1 = -2a, x_2 = -2a + 4$$

2.4) вміти розв’язувати квадратне рівняння з параметром (вписати коефіцієнти квадратного рівняння; обчислити дискримінант; зробити висновок про кількість коренів квадратного рівняння; знайти корені квадратного рівняння) – основна школа, 8 клас (!);

3. Перевірити, при яких значеннях параметра корені належать області визначення рівняння.

Підставимо $x_1 = -2a$ в систему (*):

$$\begin{cases} (-2a)^2 + (4a - 4) \cdot (-2a) + 4a^2 \geq 0, \\ 2a \geq 0, \\ 5 \cdot 5^{2 \cdot (-2a)} - 5^{a+2a} - 5^{a-1} + 5^{-2a} \neq 0 \end{cases}, \text{ звідки } a \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

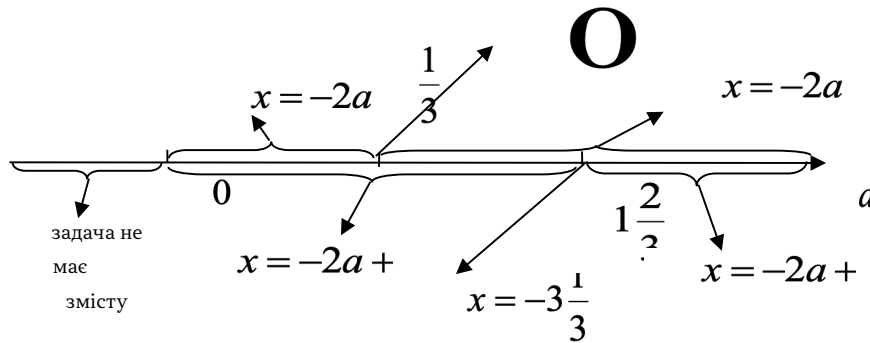
Підставимо $x_2 = -2a + 4$ в систему (*):

$$\begin{cases} (-2a + 4)^2 + (4a - 4) \cdot (-2a + 4) + 4a^2 \geq 0, \\ 2a \geq 0, \\ 5 \cdot 5^{2 \cdot (-2a+4)} - 5^{a-(-2a+4)} - 5^{a-1} + 5^{-2a+4} \neq 0 \end{cases}, \text{ звідки } a \in \left[0; 1\frac{2}{3}\right) \cup \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

3.1) вміти знайти значення параметра, при яких знайдені корені задовольняють область визначення – основна школа;

3.2) знати як знайти значення параметра, при яких корені квадратного рівняння є коренями заданого рівняння, яке звелось до квадратного (через розв'язування системи, яка визначає область визначення або підставити вже знайдені корені у вже сформовану систему) – основна школа, старша школа.

4. Позначимо знайдені корені на прямій параметра та запишемо відповідь.



Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то рівняння не має змісту; якщо $a \in [0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}) \cup (1\frac{2}{3}; +\infty)$, то $x = -2a$, $x = 4 - 2a$; якщо $a = 1\frac{2}{3}$, то $x = -3\frac{1}{3}$; якщо $a = \frac{1}{3}$, то $x = 3\frac{1}{3}$

Як бачимо, певна частина потрібних умінь та навичок могла бути сформована в основній школі.

Висновки. Ми запрошуємо до дискусії стосовно питання, яке ми сформулювали як тему нашої статті. На наше особисте переконання, параметрам є місце у шкільному курсі математики вже починаючи з основної школи.

На цей момент, незважаючи на всі зовнішні обставини, триває освітній процес, створюються підручники з математики гарної якості, які збагачуються новими ідеями, як наприклад, ідеями математичного моделювання. Сприймаючи нове, варто також зберігати традиції нашої математичної системи освіти, яка має багато корисного для розвитку особистості. А розвиток завжди можливий лише через подолання труднощів, якої б завгодно сфери нашого життя та діяльності це не стосувалось.

Список використаних джерел

- Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта». <https://pidruchnyk.com.ua/2887-algebra-bevz-7-klas-2024.html>
- Бичко Ганна, Терещенко Василь (2023). Навчальні втрати: сутність, причини та наслідки подолання, Київ. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2023/04/Learning-losses_Ukraine.pdf
- Білянina О. А., Білянin Г. І., Семчук А. Р., Ілашук О. Г., Мар'янчук О. Т., Рябий С. І. (2024). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Літера ЛТД. <https://shkola.in.ua/3087-algebra-7-klas-bilianina.html>
- Державний стандарт базової середньої освіти. Постанова Кабінету Міністрів України № 898 (2020) (Україна). <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavniy-standart-bazovoi-serednoi-osviti>

- Істер О. С. (2024). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: «Генеза». <https://pidruchnyk.com.ua/2889-algebra-ister-7-klas-2024.html>
- Карлащук А. Ю. (2001). Формирование исследовательских умений школьников в процессе решения математических задач с параметрами. [Неопубл. дис. канд. пед. наук], Донецьк.
- Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. (2024). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Тернопіль: Підручники та посібники». <https://pidruchnyk.com.ua/2890-algebra-kravchuk-7-klas-2024.html>
- Лейфура В. М. (1996) Про задачі з параметрами. У світі математики. №1. С.31-41.
- Мальований Ю. І., Литвиненко Г. М., Возняк Г. М. (2023). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Тернопіль: Навчальна книга. https://znayshov.com/Books/Details/alhebra/7klas/algebra_7_malovaniy_2024/1992
- Мерзляк А. Г., Якір М. С. (2024). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія. <https://shkola.in.ua/593-alhebra-7-klas-merzliak.html>
- Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Білянina О. Я., Білянin Г. І., Семчук А. Р., Ілащук О. Г., Мар'янчук О. Т., Рябий С. І.) (2023). <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/29.12.2023/Alhebra.7-9.klas.Bilyanina.ta.in.29.12.2023.pdf>
- Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.) (2023) <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf>
- Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.). (2023) <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Ister.26.07.2023.pdf>
- Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.) (2022) <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Merzlyak.30.08.2023.pdf>
- Навчальна програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл. Рівень стандарту. (2017). <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-riven-standartu.docx>
- Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. (2018). <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx>
- Прокопенко Н., Захарійченко Ю., Пекарська Л. (2024). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ-Харків: «Ранок». <https://pidruchnyk.com.ua/2894-algebra-prokopenko-7-klas-2024.html>
- Тарасенкова Н.А., Акуленко І.А., Данько О.А., Коломієць О. М., Богатирьова І. М., Сердюк З. О. (2024). Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: УОВЦ «Оріон». <https://pidruchnyk.com.ua/2893-algebra-tarasenkova-7-klas-2024.html>
- Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Видання третє, доповнене. Начально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ПП «Рута», 2019, 544 с.
- Школьний О., Нелін Є, Милянin А., Простакова Ю. (2024). Математика: підруч. інтегрованого курсу для 7 кл. закладів загальної середньої освіти (Частина 1). Київ-Харків: «Ранок». <https://pidruchnyk.com.ua/2877-matematyka-shkolnyi-7-klas-2024.html>
- Bloody-Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra, in Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. and Lins, R. (Eds.) Perspectives on school algebra. Kluwer Academic Publishers, pp 177-189.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. & Lasa, A. (2014). Levels of algebraic reasoning in primary and secondary education. CERME 9, TWG 4.

- Drijvers, P. (2003). Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: Design Research on the Understanding of the Concept of Parameter. Ph.D. Dissertation, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands. Retrieved from <https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf>
- Ilany, B.-S., & Hassidov, D. (2014). Solving Equations with Parameters. *Creative Education*, 5, 963- 968. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2014.511110>
- Postelnicu Valentina, Postelnicu Florin (2015). College students' understanding of parameters in algebra. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; 453-459.
- Šedivý, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 121-126.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? In Hoines, M. J., & Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, Bergen, Norway, 361-368. http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR039_Ursini.pdf.

References

- Bezv H.P., Bezv V.H., Vasyliieva D.V., Vladimirova N.H. Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: textbook for 7 grades of institutions of general secondary education]. Kyiv: Vydavnychiy dim «Osvita». <https://pidruchnyk.com.ua/2887-algebra-bezv-7-klas-2024.html> [in Ukrainian].
- Bychko Hanna, Tereshchenko Vasyl (2023). Navchalni vtraty: sutnist, prychny ta naslidky podolannia. [Learning loss: the essence, causes and consequences of overcoming]. Kyiv. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2023/04/Learning-losses_Ukraine.pdf [in Ukrainian].
- Bilianina O.A., Bilianin H.I., Semchuk A.R., Ilashchuk O.H., Marianchuk O.T., Riabyi S.I. (2024). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: textbook for 7 grades of institutions of general secondary education]. Kyiv: Litera LTD. <https://shkola.in.ua/3087-alhebra-7-klas-bilianina.html> [in Ukrainian].
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2020). State standard of basic secondary education. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavnyi-standart-bazovoi-serednoi-osviti> [in Ukrainian].
- Ister O.S. (2024). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: textbook for 7 grades of institutions of general secondary education]. Kyiv: «Henezha». <https://pidruchnyk.com.ua/2889-algebra-ister-7-klas-2024.html> [in Ukrainian].
- Karlashchuk A.Iu. (2001). Formyrovanye yssledovatelyskh umenyi shkolnykov v protsesse resheniya matematycheskykh zadach s parametramy. [Formation of students' research minds in the process of solving mathematical problems with parameters]. [Neopubl. dys. kand. ped. nauk], Donetsk.
- Kravchuk V. R., Pidruchna M. V., Yanchenko H. M. (2024). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: textbook for 7 classes of institutions of general secondary education]. Ternopil: Pidruchnyky ta posibnyky». <https://pidruchnyk.com.ua/2890-algebra-kravchuk-7-klas-2024.html> [in Ukrainian].
- Leifura V.M. (1996) Pro zadachi z parametramy. [On problems with parameters]. *U sviti matematyky*. [In the world of mathematics]. №1. S.31-41.
- Malovanyi Yu.I., Lytvynenko H.M., Vozniak H.M (2023). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: textbook for 7 classes of institutions of general secondary education]. Ternopil: Navchalna knyha - . https://znayshov.com/Books/Details/alhebra/7klas/algebra_7_malovaniy_2024/1992 [in Ukrainian].
- Merzliak A.H., Yakir M.S. (2024). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: textbook for 7 classes of institutions of general secondary education]. Kharkiv: Himnaziia. <https://shkola.in.ua/593-alhebra-7-klas-merzliak.html> [in Ukrainian].
- Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity (avt. Bilianina O. Ya., Bilianin H. I., Semchuk A. R., Ilashchuk O. H., Marianchuk O. T., Riabyi S. I.) (2023). <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/29.12.2023/Alhebra.7-9.klas.Bilyanina.ta.in.29.12.2023.pdf> [in Ukrainian].

- Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity (avtory: Burda M.I., Tarasenkova N.A., Vasylieva D.V.) (2023) <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf> [in Ukrainian].
- Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity (avtor Ister O. S.). (2023) <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Ister.26.07.2023.pdf> [in Ukrainian].
- Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity (avtory Merzliak A. H., Nomirovskyi D. A., Pykhtar M. P., Rublov B. V., Semenov V. V., Yakir M. S.) (2022) <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Merzlyak.30.08.2023.pdf> [in Ukrainian].
- Navchalna prohrama z matematyky dlia 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh shkil. Riven standartu. (2017). [Mathematics curriculum for grades 10-11 of secondary schools. Standard level]. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx> [in Ukrainian].
- Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Profilnyi riven. (2018). [The curriculum in mathematics for students of grades 10-11 of secondary schools. Profile level]. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx> [in Ukrainian].
- Prokopenko N., Zakhariichenko Yu., Pekarska L. (2024). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Kyiv-Kharkiv: «Ranok». <https://pidruchnyk.com.ua/2894-algebra-prokopenko-7-klas-2024.html> [in Ukrainian].
- Tarasenkova N.A., Akulenko I.A., Danko O.A., Kolomiiets O. M., Bohatyrova I. M., Serdiuk Z. O. (2024). Alhebra: pidruch. dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Kyiv: UOVTs «Orion». <https://pidruchnyk.com.ua/2893-algebra-tarasenkova-7-klas-2024.html> [in Ukrainian].
- Prus A.V., Shvets V.O. Zadachi z parametramy v shkilnomu kursi matematyky. Vydannia tretie, dopovnene. Nachalno-metodychnyi posibnyk. [Problems with parameters in the school course of mathematics. Third edition, supplemented. Beginner's manual]. – Zhytomyr: Vyd-vo PP «Ruta», 2019, 544 s. [in Ukrainian].
- Shkolnyi O., Nelin Ye, Mylianyk A., Prostakova Yu. (2024). Matematyka: pidruch. intehrovanoho kursu dlia 7 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity (Chastyna 1). Kyiv-Kharkiv: «Ranok». <https://pidruchnyk.com.ua/2877-matematyka-shkolnyi-7-klas-2024.html> [in Ukrainian].
- Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra, in Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. and Lins, R. (Eds.) Perspectives on school algebra. Kluwer Academic Publishers, pp 177-189.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. & Lasa, A. (2014). Levels of algebraic reasoning in primary and secondary education. CERME 9, TWG 4.
- Drijvers, P. (2003). Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: Design Research on the Understanding of the Concept of Parameter. Ph.D. Dissertation, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands. Retrieved from <https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf>
- Ilany, B.-S., & Hassidov, D. (2014). Solving Equations with Parameters. Creative Education, 5, 963- 968. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2014.51110>
- Postelnicu Valentina, Postelnicu Florin (2015). College students' understanding of parameters in algebra. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; 453-459.
- Šedivý, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. Educational Studies in Mathematics, 7, 121-126.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? In Hoines, M. J., & Fuglestad, A. B. (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, Bergen, Norway, 361-368. http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR039_Ursini.pdf.