

УДК 373.5.016:51:371.671(477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-7-19

Вивчення геометричних перетворень у 9 класі НУШ за авторським підручником інтегрованого курсу математики

Олександр Школьний

УДУ імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.ua/ ORCID <https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

Анотація

Нова українська школа (НУШ) – це реформа освіти, яка спрямована на формування в учнів та учениць ключових компетентностей, які сприятимуть подальшому їх навчанню в закладах вищої освіти та самореалізації в майбутній професійній діяльності. Згідно з цією реформою, процес навчання в школах організовано наступним чином: за затвердженими Державними стандартами освіти і базовим навчальним планом, розроблено модельні навчальні програми з усіх освітніх галузей, зокрема, з математики, а вже за цими модельними програмами створюються підручники та інші засоби навчання.

Метою статті є висвітлення методичних особливостей вивчення геометричних перетворень у 9 класі Нової української школи за підручником авторського колективу Олександр Школьний, Євген Нелін, Андрій Милянник, Юлія Простакова, створеного за модельною навчальною програмою авторського колективу на чолі з Марією Васишин. За цією програмою і підручником геометричні перетворення площини вивчаються на початку 9 класу. Крім інших переваг, це сприятиме більш коректному викладу подальшого матеріалу 9 класу, що стосується побудови графіків квадратичних функцій, користуючись не інтуїтивними міркуваннями, а методом геометричних перетворень.

У цій роботі ми детально описуємо авторську методику вивчення геометричних перетворень площини, яка передбачає вивчення наступних підрозділів: «Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання», «Рухи і перетворення подібності; види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот», «Рівність і подібність фігур; розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень».

Апробація підручника інтегрованого курсу «Математика» для 9 класу згаданого авторського колективу в 2025-2026 навчальному році в українських школах показує, що учні та учениці цілком позитивно сприймають місце і спосіб вивчення геометричних перетворень площини та належним чином їх використовують у своїй навчальній діяльності. Однак, пропонуваній спосіб опанування даного матеріалу учнями 9 класу НУШ потребує подальших досліджень. Проте ми переконані в доцільності та перспективності описаного підходу і будемо й надалі користуватися ним для формування ключових компетентностей учнів та учениць.

Ключові слова: Нова українська школа, компетентнісний підхід до навчання, інтегрований курс математики, геометричні перетворення площини, методичні особливості, інноваційні методи навчання.

UDC 373.5.016:51:371.671(477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-7-19

Studying geometric transformations in 9th grade OF NUS according to the author's textbook of the integrated course of mathematics

Oleksandr Shkolnyi

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine.

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.ua/ ORCID <https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

Abstract

The New Ukrainian School (NUS) is an education reform aimed at developing key competencies of students that will facilitate their further education in higher education institutions and self-realization in future professional activities. According to this reform, the learning process in schools is organized as follows: according to the approved State Educational Standards and the basic educational plan, model programs have been developed for all educational branches, in particular, mathematics, and textbooks and other teaching aids are created based on these model programs.

The purpose of the article is to highlight the methodological features of studying geometric transformations in the 9th grade of the New Ukrainian School according to the textbook of the author team Oleksandr Shkolnyi, Yevhen Nelin, Andrii Mylianyk, Yuliia Prostackova, created according to the model program of the author team led by Maria Vasylyshyn. According to this program and textbook, geometric transformations of the plane are studied at the beginning of the 9th grade. Among other advantages, this will contribute to a more correct presentation of the subsequent material of the 9th grade, which concerns the construction of graphs of quadratic functions, using not intuitive reasoning, but the method of geometric transformations.

In this work, we describe in detail the author's methodology for studying geometric transformations of the plane, which involves studying the following subsections: "Geometric transformations of the plane and their analytical representation", "Movements and transformations of similarity; types of movements and their properties: parallel transfer, symmetry relative to a point, symmetry relative to a line, rotation", "Equality and similarity of figures; solving draw problems using the method of geometric transformations".

The probation of the textbook of the integrated course "Mathematics" for the 9th grade of the mentioned author's team in the 2025-2026 academic year in Ukrainian schools shows that students quite positively perceive the place and method of studying geometric transformations of the plane and properly use them in their educational activities. However, the proposed method of mastering this material by 9th grade students of NUS requires further research. However, we are convinced of the feasibility and prospects of the described approach and will continue to use it to form key competencies of students.

Keywords: New Ukrainian School, competency-based approach to learning, integrated course of mathematics, geometric transformations of the plane, methodological features, innovative teaching methods.

Постановка проблеми. Аналіз основних досліджень і публікацій. Наразі в Україні діє реформа освіти «Нова українська школа» (НУШ). Вона виникла в результаті невідповідності запитів українського суспільства щодо української освітньої системи та результатів її функціонування. Цю невідповідність особливо яскраво відображають результати державної підсумкової атестації (ДПА) випускників 9 та 11 класів, зовнішнього незалежного оцінювання якості знань (ЗНО) абітурієнтів закладів вищої освіти (ЗВО), а також результати міжнародних порівняльних досліджень PISA (див., наприклад, Бахрушин 2019; Вакуленко та ін. 2021; Мазорчук та ін. 2019; НУШ 2024; УЦОЯО 2021).

Як ми вже зазначали в статті (Шкільний 2024), основною ідеєю Нової української школи є орієнтація учнівства на успішну інтеграцію в суспільство після закінчення школи, професійну реалізованість та особисте задоволення від власної особистої та суспільної діяльності. Тому природно, що теоретичною основою реформи НУШ є компетентнісний підхід, який спрямовує весь процес навчання в школі не на формальне здобуття учнями знань, умінь і навичок у тій чи іншій предметній області, а на формування в них таких характеристик особистості, котрі дозволять у майбутньому забезпечити їм успішну самореалізацію в дорослому світі. З метою реалізації цієї концепції були створені Державні стандарти освіти (КМУ України, 2018; КМУ України 2020; МОН України, 2024), а також модельні навчальні програми для кожної з 9 визначених у концепції НУШ освітніх галузей. Наприклад, для математичної освітньої галузі затверджено більше десяти модельних програм різних авторів лише для початкової та для базової середньої школи (МОН України, 2024).

У межах своєї академічної свободи вчителі на основі модельних програм повинні розробити і впровадити відповідні навчальні програми, створити календарно-тематичне планування та інші дидактичні матеріали для здійснення освітньої діяльності. Проте зрозуміло, що основним засобом навчання залишаються підручники. Нині існує більше 10 підручників з математики для початкової школи та для базової середньої школи (ІМЗО, 2024).

Авторський колектив на чолі з Марією Василичин (Марія Василичин, Андрій Милянник, Микола Працьовитий, Юлія Простакова і Олександр Шкільний) запропонував модельні програми з математики для 5-6 та 7-9 класів (Василичин та ін., 2021, Василичин та ін., 2023), які відрізняються інноваційними підходами до формування змісту навчального матеріалу та способів його вивчення. Ці програми орієнтовані на європейські та світові освітні тенденції останніх десятиліть. Зокрема, в ній посилено ймовірісно-статистичну лінію, пропонується вивчати в 7-9 класах просторові геометричні фігури паралельно з плоскими, розглядаються основи фінансової грамотності тощо. Детальніше з методичними особливостями цієї програми можна познайомитися у статті (Shkolnyi 2023).

Однією з важливих особливостей програми (Василичин та ін. 2023) є перенесення вивчення геометричних перетворень на початок 9 класу. Саме для цього в цій самій програмі

раніше відбулося перенесення вивчення координат і векторів із 9 класу у 8 клас, а вивчення площ – із 8 класу в 9 клас. Автори вбачали в цьому потребу з кількох причин. По-перше, метод геометричних перетворень сам по собі є потужним інструментом розв'язування геометричних задач, який значно розширює кругозір учнів та учениць. Тому ми вважаємо, що чим раніше на додачу до векторно-координатного методу ще й цей метод буде опанований дітьми, тим простіше їм буде набути компетентностей, передбачених Державним стандартом (КМУ України 2020). По-друге, вивчення геометричних перетворень площини на початку 9 класу дасть можливість у наступних розділах коректно пояснити побудову графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$: він буде образом вже відомого учням та ученицям графіка функції $y = x^2$ за певних геометричних перетворень. Справді, для математично коректного пояснення побудови графіка квадратичної функції учні вже мають бути знайомі з аналітичним заданням паралельного перенесення на заданий вектор, симетрії відносно осі абсцис і деформації до осі абсцис, а це можливо лише за попереднього ретельного вивчення геометричних перетворень площини.

У посібнику, що виданий як частина підручника інтегрованого курсу математики для 9 класу (Шкільний та ін. 2025) авторського колективу в складі Олександра Шкільного, Євгена Неліна, Андрія Милянника і Юлії Простакової, створеного за модельною програмою (Василишин та ін. 2023), вивчається розділ «Геометричні перетворення та їх використання», який і забезпечує реалізацію наведеної вище ідеологічної схеми.

Метою цієї статті є висвітлення особливостей вивчення геометричних перетворень площини в інтегрованому курсі «Математика» для 9 класу НУШ. Ми зосередимо свою увагу на тому, на що саме варто звернути увагу вчителів та вчительок, які прагнуть усвідомленого формування в учнів та учениць НУШ знань, умінь і навичок (компетентностей), пов'язаних з опануванням ними відповідного навчального матеріалу.

Виклад основного матеріалу. Згідно з програмою (Василишин та ін. 2023) вивчення геометричних перетворень площини є першою темою 9 класу. Відповідний розділ підручника має назву «Геометричні перетворення та їх використання». Матеріал цього містить переважно традиційний матеріал курсу математики 9 клас, але його вивчення здійснюється на початку навчального року, на відміну від більшості традиційних програм і підручників. Також у цьому розділі більш детально розглянуто поняття аналітичного задання геометричного перетворення – формул, які пов'язують координати образу і прообразу довільної точки площини за такого перетворення у деякій ПДСК.

Традиційно в шкільному курсі математики вивчалось лише аналітичне задання паралельного перенесення на заданий вектор. У посібнику (Шкільний та ін. 2025) виводиться аналітичне задання також і для центральної симетрії, симетрій відносно осей координат, гомотетії, а також для деформацій до осей координат. Це дозволить у наступному розділі більш акуратно і строго, ніж зазвичай, пояснити принцип побудови графіка квадратичної

функції $y = ax^2 + bx + c$ як образ графіка функції $y = x^2$ за одного чи кількох послідовно виконаних геометричних перетворень площини.

Тема «Геометричні перетворення та їх використання» складається з наступних підрозділів: «Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання», «Рухи і перетворення подібності. Види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот» і «Рівність і подібність фігур. Розв’язування задач на побудову методом геометричних перетворень».

У першому підрозділі «Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання» розглядаються геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є широке використання геометричних перетворень площини в анімації, створенні відеоігор тощо. У діалозі Петрика й Тетянки на початку відповідного підрозділу посібника згадується, зокрема, робота в графічному редакторі та необхідність мати формули, які описують рух об’єктів при створенні анімаційних фільмів та відеоігор. Означення геометричного перетворення площини дається наступним чином (Шкільний та ін. 2025): «Нехай задано деяке правило f , яке кожній точці M площини ставить у відповідність лише одну точку M' цієї самої площини. Точку M' називають образом точки M , а точку M називають прообразом точки M' для правила f і записують $f(M) = M'$ або $f: M \rightarrow M'$. Правило f називають геометричним перетворенням площини, якщо: 1) для будь-якої точки M' площини у цій самій площині існує її прообраз – точка M , тобто $f(M) = M'$; 2) для будь-яких двох різних точок M і K площини, їх образи M' і K' також різні, тобто $f(M) \neq f(K)$ ».

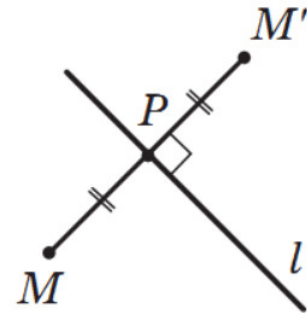
Це означення є традиційним для курсу математики, але в українських шкільних підручниках раніше не вводилося. Звертаємо увагу, що мова йде не про геометричне перетворення деякої геометричної фігури, а про геометричне перетворення всієї площини. Однак, зрозуміло, що внаслідок цього перетворення змін зазнають і всі геометричні фігури площини.

Важливим для розуміння сутності геометричного перетворення є поняття образу та прообразу даної точки площини. Ця термінологія в подальшому буде використовуватися протягом усього вивчення геометричних перетворень та їх подальших застосувань. Крім образу і прообразу точок дається також і означення образу і прообразу геометричної фігури (Шкільний та ін. 2025): «Множину образів Φ' усіх точок деякої геометричної фігури Φ за перетворення f називають образом цієї геометричної фігури, а геометричну фігуру Φ називають прообразом геометричної фігури Φ' ».

Далі наводяться означення наступних геометричних перетворень: 1) тотожне перетворення; 2) паралельне перенесення на заданий вектор $\vec{a}$; 3) симетрія відносно заданої точки O (центральна симетрія); 4) симетрія відносно заданої прямої l (осьова симетрія); 5) поворот відносно заданої точки O на заданий кут φ (за та проти годинникової стрілки); 6)

гомотетія з центром у заданій точці O і заданим коефіцієнтом $\lambda > 0$; 7) деформація з даним коефіцієнтом $k > 0$ до заданої прямої l .

Усі означення геометричних перетворень даються конструктивно та ілюструються рисунками. Наприклад, означення осьової симетрії є наступним (Шкільний та ін. 2025): «Нехай задано деяку пряму l . Якщо будь-якій точці M площини, що належить прямій l , перетворення f ставить у відповідність саму себе, а будь-якій точці M площини, що не належить прямій l , – точку M' так, що відрізок MM' перпендикулярний до прямої l і перетинає її в точці P , а ця точка P є серединою відрізка MM' (див. рисунок), то таке перетворення f називають симетрією відносно прямої l або осьовою симетрією з віссю l ».



Такі означення дозволяють легко будувати образ будь-якої точки площини за кожного з цих перетворень. Зрозуміло, що на уроці вчителю або вчительці варто показати, як саме це слід робити для кожного з наведених перетворень на прикладах побудови образів кількох точок.

Далі в підрозділі вводиться поняття аналітичного задання геометричного перетворення як формул, що пов'язують координати довільної точки $M(x; y)$ площини та її образу $M'(x'; y')$ за певного перетворення f у деякій ПДСК на площині, а також виводяться ці формули для: 1) тотожного перетворення; 2) паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$; 3) симетрії відносно точки $O(x_0; y_0)$; 4) симетрії відносно осі Ox ; 5) симетрії відносно осі Oy ; 6) деформації з коефіцієнтом k до осі Ox ; 7) деформації з коефіцієнтом k до осі Oy і 8) гомотетії з центром у точці $O(x_0; y_0)$ і коефіцієнтом λ . Наприклад, аналітичне задання симетрії відносно точки $O(x_0; y_0)$ має вигляд:
$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x, \\ y' = 2y_0 - y. \end{cases}$$

За допомогою аналітичного задання перетворення можна знаходити координати образу даної точки і прообразу даної точки. Належну кількість прикладів наведено в тексті посібника (Шкільний та ін. 2025). Формуванню відповідних навичок варто приділити достатню кількість навчального часу на уроках, присвячених цьому параграфу. Різноманітна і досить багата система задач підрозділу сприяє досягненню цієї мети.

Учителі можуть по-різному організовувати вивчення матеріалу першого підрозділу. Можна провести урок-лекцію, де після належної мотивації навести означення геометричного перетворення площини і розглянути всі 7 прикладів геометричних перетворень. На наступних кількох уроках можна спочатку відпрацювати побудову образів точок за цих перетворень. Далі можна провести ще один урок-лекцію, де вивести всі аналітичні задання геометричних перетворень, розглянуті в параграфі, та навести кілька прикладів щодо знаходження образів і прообразів точок за цих перетворень. Після цього на наступних кількох уроках можна відпрацьовувати запис аналітичного задання геометричних перетворень та

знаходження образів і прообразів точок. Природно завершувати таке відпрацювання самостійною роботою з наступним її аналізом та рефлексією.

Однак, вивчення згаданого матеріалу можна організувати й інакше. На першому уроці після мотиваційного блоку можна розглянути лише тотожне перетворення і паралельне перенесення разом з їх аналітичним заданням. На наступному уроці здійснюється закріплення навичок запису цього аналітичного задання і знаходження образів і прообразів точок за паралельного перенесення. Потім на наступних уроках можна поступово розглядати нові види геометричних перетворень разом із їх аналітичним заданням та його застосуваннями: симетрія відносно заданої точки, симетрія відносно осей координат, гомотетія, деформація. При цьому кількість уроків, необхідних для засвоєння цього матеріалу визначається вчителем або вчителькою залежно від учнівського колективу. Завершувати вивчення підрозділу за такою схемою також природно самостійною роботою з подальшим її аналізом та рефлексією.

Звертаємо також увагу, що в цікавинках від дідуса Тараса до першого підрозділу вказується, що поняття геометричного перетворення площини, по суті, є узагальненням уже відомого учням та ученицям поняття функції, в якій у ролі аргумента і функції розглядаються не числа, а точки площини. Також у цих цікавинках розглядається поняття довільного відображення множини X у множину Y і наводяться відповідні приклади. Цей матеріал, зокрема, може бути корисним на заняттях математичного гуртка для дев'ятикласників, що цікавляться математикою.

У другому підрозділі «*Рухи і перетворення подібності. Види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот*» дається означення руху площини, перетворення подібності площини та вивчаються їх властивості. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є необхідність розуміти, який саме об'єкт буде образом відрізка, трикутника, многокутника, кола тощо за таких геометричних перетворень. Це потрібно, зокрема, для створення рухомих анімаційних картинок та роботи в графічних редакторах.

Означення руху дається традиційно (Шкільний та ін. 2025): «Рухом площини (або просто рухом) називають геометричне перетворення площини, що зберігає відстані між точками. Тобто, якщо для перетворення f і довільних точок M і K площини $f(M) = M'$, $f(K) = K'$ і виконується рівність $M'K' = MK$, то перетворення f називають рухом».

Далі за означенням показується, що паралельне перенесення на заданий вектор є рухом. При цьому для доведення цього факту можна використати як суто геометричний спосіб, так і його аналітичне задання. Після цього показано, що рухами є також центральна симетрія, осьова симетрія та поворот. Доведення для останніх двох перетворень винесено в навчальні відео, які є обов'язковими для опрацювання всіма учнями та ученицями.

Для ефективного вивчення властивостей рухів вводиться означення простого відношення трьох точок і доводиться основна властивість рухів (Школьний та ін. 2025): «Теорема (основна властивість рухів). Будь-який рух f довільні три точки, що лежать на одній прямій переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок. Тобто, якщо A, B, C – довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB , $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$ ».

Використовуючи цю теорему, далі в навчальному відео доводяться інші властивості рухів: (Школьний та ін 2025): «Будь-який рух площини: 1) будь-яку пряму переводить у пряму, будь-який відрізок – у відрізок, будь-який промінь – у промінь; 2) будь-який трикутник переводить у рівний йому трикутник; 3) будь-який кут переводить у рівний йому кут».

Властивості рухів інтуїтивно є зрозумілими для учнів та учениць, але строге доведення цих властивостей є досить абстрактним і може бути складним для тих із них, хто навчається на початковому та середньому рівні навчальних досягнень. Тому це доведення винесено в навчальне відео, опрацювання якого є обов'язковим лише для тих здобувачів освіти, хто навчається на достатньому та високому рівні.

Далі в підрозділі Тетянка слушно зауважує, що не всі відомі учням перетворення площини є рухами. Перетворення подібності площини дається наступним чином (Школьний та ін. 2025): «Перетворенням подібності площини (або просто подібністю) з коефіцієнтом λ ($\lambda > 0$ називають геометричне перетворення площини, що відстані між будь-якими двома точками цієї площини змінює в λ разів. Тобто, якщо для перетворення f і довільних точок M і K площини $f(M) = M'$, $f(K) = K'$ і виконується рівність $M'K' = \lambda \cdot MK$, то перетворення f називають подібністю з коефіцієнтом λ ».

Після цього показується, що гомотетія є перетворенням подібності. У підручнику для цього використано геометричний спосіб, але можна використати для цього й аналітичне завдання, як радить дідусь Тарас. Можна також дати це завдання учням та ученицям, які цікавляться математикою, в якості додаткового домашнього завдання на оцінку високого рівня. Далі пропонується за аналогією з рухами самостійно довести основну властивість перетворень подібності (Школьний та ін. 2025): «Теорема (основна властивість подібностей). Будь-яка подібність g довільні три точки, що лежать на одній прямій переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок. Тобто, якщо A, B, C – довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB , $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$ ».

Потім, використовуючи цю теорему, учням та ученицям пропонується самостійно довести й інші властивості перетворень подібності. Ми також не вимагаємо виконання цих

доведень усіма здобувачами освіти (всі мають знати самі властивості й використовувати їх для розв'язування задач), але тим із них, хто навчається на достатньому та високому рівні, радимо виконати це доведення як додаткове завдання на окрему оцінку.

Завершується теоретичний матеріал підрозділу важливими зауваженнями, що всі рухи можна вважати перетвореннями подібності з коефіцієнтом $k = 1$, а також, що існують геометричні перетворення, які не є ні рухами, ні подібностями. Наприклад, таким перетворенням є деформація з коефіцієнтом $k \neq 1$ до прямої l . Доведення останнього факту наведено в посібнику і є обов'язковим для розуміння всім учнями та ученицями.

Цікавинки від дідуса Тараса до другого підрозділу містять матеріал для занять математичного гуртка, який стосується інваріантів геометричних перетворень. Зокрема, основними інваріантами рухів площини є відстань між точками, градусна міра кута, просте відношення трьох точок, а основними інваріантами перетворень подібності – градусна міра кута і просте відношення трьох точок.

Третій підрозділ «Рівність і подібність фігур. Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень» присвячений вивченню рівності та подібності геометричних фігур. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є те, що поняття рівності та подібності часто використовується в повсякденному житті, але строгі означення цих понять відомі учням 9 класу лише для трикутників. Наприклад, щоб зрозуміти, чи є подібними два кленових листочки (діалог Петрика й Тетянки на початку підрозділу), потрібно дати означення подібності для довільних геометричних фігур, а не лише для трикутників.

Далі дається означення рівних фігур (Школьний та ін. 2025): «Дві геометричні фігури Φ і Φ' називають рівними, якщо $f(\Phi) = \Phi'$, де f – рух площини. Іншими словами, фігури називають рівними, якщо одна з них переходить в іншу за деякого руху площини».

Важливо звернути увагу учнів та учениць, що в 7 класі це тлумачення рівних фігур на інтуїтивному рівні вже розглядалося, коли стверджувалося, що рівні відрізки, рівні кути і рівні трикутники можна сумістити накладанням. Тепер це інтуїтивне розуміння викладено більш строго з математичної точки зору. Також важливо, що для відрізків, кутів і трикутників наведене означення рівних фігур не суперечить уже відомим. Справді, учні та учениці вже знають, що рух переводить відрізок у відрізок тієї самої довжини, кут – у кут тієї самої градусної міри, а трикутник – у рівний йому трикутник. Тому можна вважати, що для цих геометричних фігур щойно наведене означення рівності є еквівалентним відомим раніше. Але, наприклад, для чотирикутників, кіл та інших геометричних фігур, означення рівності раніше не вводилося. Тепер у цих окремих означеннях рівності немає потреби, бо є означення, яке можна використати для будь-яких геометричних фігур (Школьний та ін. 2025).

Після введених зауважень природним виглядає використання означення рівних фігур для встановлення рівності вже відомих учням геометричних фігур. Зокрема, в посібнику доводиться, що: а) два кола, радіуси яких рівні, є рівними; б) два квадрати, сторони яких рівні,

є рівними. Зауважимо, що для доведення рівності двох фігур Φ та Φ' потрібно, по суті, довести два твердження: 1) образ M' довільної точки M , яка належить Φ , буде належати Φ' ; 2) образ M' довільної точки M , яка НЕ належить Φ , також НЕ буде належати Φ' .

Для рівності двох кіл однакового радіуса обидві частини цього доведення виконано в посібнику. Для доведення рівності двох квадратів з рівними сторонами, яке технічно є складнішим, друга частина цього доведення в посібнику не наводиться, але інтуїтивно є зрозумілою і за потреби може бути виконана самостійно. Також зауважимо, що автори посібника не вимагають засвоєння доведення рівності двох фігур всіма дітьми. Усі мають розуміти принцип, за яким здійснюється це доведення, а також уміти використовувати означення рівності двох фігур для розв'язування задач. Однак, для учнів та учениць, які навчаються на достатньому та високому рівні навчальних досягнень, відтворення таких доведень сприятиме розвитку їх розумових здібностей і може бути використане з цією метою як додаткове домашнє завдання з відповідним оцінюванням.

Далі в підрозділі наводиться означення подібних фігур (Шкільний та ін. 2025): «Дві геометричні фігури Φ і Φ' називають подібними, якщо $g(\Phi) = \Phi'$, де g – перетворення подібності. *Іншими словами*, фігури називають подібними, якщо одна з них переходить в іншу за деякого перетворення подібності».

Тут також важливо зауважити, що для випадку, коли фігура Φ є трикутником, це означення є еквівалентним до вже відомого означення подібних трикутників, бо за властивостями, наведеними в попередньому підрозділі, подібність переводить будь-який трикутник у подібний йому трикутник. Далі, за аналогією з рухами, у навчальних відео показується, що а) будь-які два кола є подібними; б) будь-які два квадрата є подібними (Шкільний та ін. 2025).

Поняття симетричної фігури вводиться в параграфі наступним чином (Шкільний та ін. 2025): «Якщо перетворення f геометричну фігуру Φ переводить саму в себе, то таке перетворення називають симетрією фігури Φ . При цьому саму фігуру Φ називають симетричною відносно перетворення f ».

Далі в підрозділі розглядаються приклади конкретних геометричних фігур, для яких встановлюється їх симетрії. При цьому для зручності і простоти мовлення та для узгодження нової термінології з традиційною для багатьох підручників, якщо симетріями деякої геометричної фігури є центральна або осьова симетрія, то такі геометричні фігури просто називають симетричними відносно точки або прямої.

Завершується підрозділ прикладом застосування геометричних перетворень для розв'язування задач на побудову. У теоретичному матеріалі наведено дві задачі на побудову, які можна розв'язати за допомогою рухів і перетворень подібності. Перша з них – задача оптимізації, яка передбачає знаходження точки на прямій, сума відстаней від якої до двох

даних точок є найменшою (Шкільний та ін. 2025): «На заданій прямій l побудуйте точку C , сума відстаней від якої до двох даних точок A і B була би найменшою».

Тетянка слушно зауважує після розв'язання цієї задачі (Шкільний та ін. 2025): «Якщо уявити собі, що пряма l – це шосе для автомобілів, а точки A і B – два маленькі села, то ця задача розповідає, де саме на шосе потрібно поставити зупинку так, щоб жителям обох сіл було зручно її використовувати». Це зауваження показує практичну значущість такої задачі.

Другий приклад – це використання в задачах на побудову гомотетії. Це дещо модифікована, але досить типова задача про «вписування» прямокутника в трикутник (Шкільний та ін. 2025): «Нехай задано довільний гострокутний трикутник ABC . Потрібно «вписати» в нього прямокутник $KLMP$, у якого $\frac{KL}{KP} = \frac{1}{2}$, так, щоб точки K і P належали стороні AC , точка L – стороні AB , а точка M – стороні BC .»

Зрозуміло, що для розв'язування задач на побудову можна використовувати й інші геометричні перетворення: паралельне перенесення, центральну симетрію, поворот тощо. Відповідні задачі наведені в посібнику як різнорівневі задачі для самостійного розв'язування в «Тренажерному залі» цього підрозділу.

Цікавинки від дідуся Тараса до третього підрозділу містять матеріал, що стосується популярної наразі в багатьох застосуваннях теорії – теорії фракталів. Зокрема, тут розглядається поняття самоподібної фігури та приклад побудови трикутного килима Серпінського – самоподібної фрактальної множини. Цей матеріал ми вважаємо доцільним для вивчення учнями та ученицями 9 класу на заняттях математичного гуртка.

Висновки і перспективи подальших досліджень. На наше переконання, описана вище методика вивчення геометричних перетворень площини сприятиме досягненню обох поставлених авторами програми (Василишин та ін. 2023) та посібника (Шкільний та ін. 2025) цілей: по-перше, учні та учениці отримають потужний апарат для розуміння оточуючої дійсності та для розв'язування геометричних задач; по-друге вчителі та вчительки математики матимуть можливість у 9 класі математично коректно дати алгоритм побудови графіка загальної квадратичної функції як образу графіка функції $y = x^2$ за послідовного виконання одного чи кількох геометричних перетворень площини.

Пілотування та апробація модельної програми (Василишин та ін. 2023) і посібника (Шкільний та ін., 2025) протягом 2025-2026 навчального року в закладах загальної середньої освіти України свідчить, що учні та учениці цілком позитивно сприймають таке місце і такий спосіб геометричних перетворень площини та належним чином їх використовують. Разом із тим зауважимо, що ретельне дослідження ефективності такого способу опанування даного матеріалу учнями 9 класу НУШ іще попереду, оскільки згадана програма і посібник використовуються в навчальному процесі лише один навчальний рік. Проте ми переконані в доцільності та перспективності описаного підходу і будемо й надалі користуватися ним для

формування ключових компетентностей учнів у контексті реформи «Нова українська школа».

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Бахрушин, В. (2019) Математика у PISA-2018: Результати і висновки. Нова українська школа. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>
- Вакуленко, Т., Горох, В., Раков, С., Терещенко, В. (2021) PISA-2022: Рамковий документ з математики. http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf
- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Шкільний, О.В. (2021) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf
- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Шкільний, О.В. (2023) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf
- ІМЗО (2024) Електронні версії підручників. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikiv/>
- КМУ України (2018) Державний стандарт початкової освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-p#Text>
- КМУ України (2020) Державний стандарт базової середньої освіти. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- КМУ України (2023). Державний стандарт профільної середньої освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-p#Text>
- Мазорчук, М., Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., Горох, В. (2019). Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- МОН України (2024) Математика. Модельні програми для 5-6 класів і 7-9 класів НУШ. <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/>
- НУШ (2024) Офіційний сайт проєкту «Нова Українська школа». <https://nus.org.ua>
- УЦОЯО (2021) Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf
- Шкільний, О.В. (2024) Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. (2024). *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 20-28.
- Шкільний, О.В., Нелін, Є.П., Милянник, А.І., Простакова, Ю.С. (2025) Математика: посібник як частина підручника інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Частина 1. Харків. Ранок.
- Shkolnyi, O. (2023) New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In "Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău". Chișinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.

References

- Bakhrushyn, V. (2019). *Matematyka u PISA-2018: Rezultaty i vysnovky* [in Ukrainian] (*Mathematics in PISA 2018: Results and conclusions*). Nova ukrainska shkola. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>
- Vakulenko, T., Horokh, V., Rakov, S., & Tereshchenko, V. (2021). *PISA-2022: Ramkovyi dokument z matematyky* [in Ukrainian] (*PISA 2022: Mathematics framework*). http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf
- Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsiovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2021). *Modelna navchalna prohrama "Matematyka. 5-6 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for general secondary education institutions*). https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf
- Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsiovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Matematyka. 5-6 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for general secondary education institutions*). https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf
- IMZO. (2024). *Elektronni versii pidruchnykiv* [in Ukrainian] (*Electronic versions of textbooks*). <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyyi-pidruchnykiv/>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2018). *Derzhavnyi standart pochatkovoi osvity* [in Ukrainian] (*State standard of primary education*). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-n#Text>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2020). *Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*State standard of basic secondary education*). <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2023). *Derzhavnyi standart profilnoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*State standard of specialized secondary education*). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-n#Text>
- Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, H., Shumova, K., Rakov, S., & Horokh, V. (2019). *Natsionalnyi zvit za rezultatamy mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2018* [in Ukrainian] (*National report on the results of the international study of educational quality PISA 2018*). https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy. (2024). *Matematyka. Modelni prohramy dlia 5-6 klasiv i 7-9 klasiv NUSH* [in Ukrainian] (*Mathematics. Model curricula for grades 5-6 and 7-9 of the New Ukrainian School*). <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/>
- Nova ukrainska shkola. (2024). *Ofitsiyni sait projektu "Nova ukrainska shkola"* [in Ukrainian] (*Official website of the "New Ukrainian School" project*). <https://nus.org.ua>
- Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. (2021). *Ofitsiyni zvit pro provedennia u 2021 rotsi zovnishnoho nezalezhnoho otsiniuvannia* [in Ukrainian] (*Official report on the external independent assessment conducted in 2021*). https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf
- Shkolnyi, O. V. (2024). *Metodychni osoblyvosti vyvchennia lohichnykh osnov matematyky v integrovanomu kursy "Matematyka" dlia uchniv 7 klasu NUSH* [in Ukrainian] (*Methodological features of studying the logical foundations of mathematics in the integrated Mathematics course for Grade 7 students of NUS*). *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 2, 20-28.
- Shkolnyi, O. V., Nelin, Ye. P., Mylianyk, A. I., & Prostakova, Yu. S. (2025). *Matematyka: posibnyk yak chastyna pidruchnyka integrovanoho kursu dlia 9 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Chastyna 1* [in Ukrainian] (*Mathematics: A guide as part of an integrated course textbook for Grade 9. Part 1*). Ranok.
- Shkolnyi, O. (2023). New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In *Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Proceedings of the National Scientific Conference with International Participation* (November 17, 2023). Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă".

Отримано / Received 10.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 20.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025