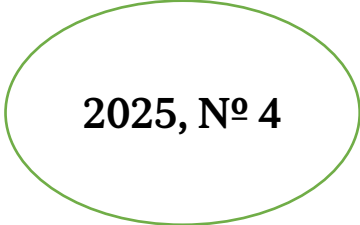


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ТЕОРІЯ, ДОСВІД, ІННОВАЦІЇ

Науковий журнал



2025, № 4

*Журнал видається у партнерстві з громадською організацією
«Міжнародна асоціація дослідників з дидактики математики»*

Вінниця - 2025

УДК 37.016:51(051)

В 48

Д

У журналі вміщені наукові статті з актуальних проблем теорії та методики навчання математики у закладах загальної середньої, професійно-технічної та вищої освіти, а також актуальних проблем методичної підготовки майбутніх учителів математики. Для науковців, викладачів, вчителів, аспірантів, студентів. Статті журналу подано в авторській редакції.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол № 5 від 26.11.2025).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор

Ольга Матяш, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Заступник головного редактора

Олександр Школьній, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

Відповідальний секретар

Любов Михайленко, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Члени редакційної колегії

Ion Akiri, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Conference Director, State Pedagogical University «Ion Creanga», Chisinau, Republic of Moldova

Alexander Karp, Professor of Mathematics Education, Teachers College, Columbia University, New York, CUSA

Michael Kleine, Doctor of Philosophy, Professor für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany

Natalia Pavlova, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

Krasimir Harizanov, Doctor, Associate Professor, Head of the Department of Computer Systems and Technologies, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

Arie Purma Kusuma, Assistant Professor of Mathematics Education STKIP Kusuma Negara, Jakarta, Indonesia

Дмитро Бобилев, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та методики її навчання, Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна

Юлія Ботузова, доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання, Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна

Дарина Васильєва, кандидат педагогічних наук, завідувач відділу математичної та інформатичної освіти, Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України, м. Київ

Аліна Воевода, кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету математики, фізики і комп'ютерних наук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Іван Ленчук, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії, Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир, Україна

Тетяна Махомета, кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету фізики, математики та інформатики, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань, Україна

Василь Швець, кандидат педагогічних наук, професор, професор кафедри методики навчання математики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

Технічний редактор: **Діана Тютюнник**, асистент кафедри алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Журнал зареєстровано Національною радою з питань телебачення і радіомовлення (Рішення № 1733 від 23.05.2024 року, Протокол № 16, ідентифікатор медіа: R30-04833)

Засновник і видавець: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Рік заснування: 2024. **Періодичність видання** – двічі на рік

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ТЕОРІЯ, ДОСВІД, ІННОВАЦІЇ. Журнал. Вінниця: ТВОРИ, 2025. №4–123 с.

Адреса редакції: 21100, м. Вінниця, вул. Острозького, 32, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

E-mail: didmath@vspu.edu.ua; <https://vspu.net/didmath>

ISSN 3041-2277;

e-ISSN 3041-2285;

DOI: 10.31652/3041-2277;

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-1-123;

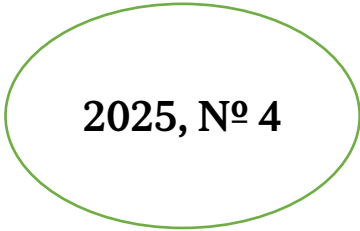
Ідентифікатор медіа: R30-04833

Обкладинка: картина «Малюючі руки» (1948) Моріца Корнеліса Ешера
© Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
VINNYTSIA MYKHAILO KOTSIUBYNSKYI STATE PEDAGOGICAL
UNIVERSITY

DIDACTICS OF MATHEMATICS: THEORY, EXPERIENCE, INNOVATIONS

Scientific Journal



2025, № 4

*Journal published in partnership with the public organization
"International Association of Researchers in Didactics of Mathematics"*

Vinnytsia – 2025

The journal contains scientific articles on topical issues of the theory and methods of teaching mathematics in general secondary, vocational and higher education institutions, as well as topical issues of methodological training of future mathematics teachers. For scientists, teachers, teachers, graduate students, and students. The articles of the journal are presented in the author's edition.

Recommended for publication by the Academic Council of Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University (Minutes No. 5 of 26.11.2025).

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief

Olha Matiash, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Deputy Editor-in-Chief

Oleksandr Shkolnyi, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematics Teaching Methods, Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

Executive Secretary

Liubov Mykhailenko, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Members of the editorial board

Ion Akiri, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Conference Director, State Pedagogical University «Ion Creanga», Chisinau, Republic of Moldova

Alexander Karp, Professor of Mathematics Education, Teachers College, Columbia University, New York, CUSA

Michael Kleine, Doctor of Philosophy, Professor für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany

Natalia Pavlova, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

Krasimir Harizanov, Doctor, Associate Professor, Head of the Department of Computer Systems and Technologies, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

Arie Purma Kusuma, Assistant Professor of Mathematics Education STKIP Kusuma Negara, Jakarta, Indonesia

Dmytro Bobyliev, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih, Ukraine

Yuliia Botuzova, Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih, Ukraine

Daryna Vasylieva, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Mathematics and Informatics Education, Institute of Pedagogy, National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Alina Voevoda, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Physics and Computer Sciences, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Ivan Lenchuk, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Geometry, Ivan Franko Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine

Tetiana Makhometa, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Physics, Mathematics and Informatics, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, Ukraine

Vasyl Shvets, Candidate of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics Teaching Methods, Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

Technical editor: **Diana Tiutiunyk**, Assistant of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Registered by the National Council on Television and Radio Broadcasting (Decision No. 1733 of 23.05.2024, Minutes No. 16, Media ID: R30-04833)

Founder and publisher: Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University

Year of foundation: 2024. **The periodicity of the publication** is twice a year.

Didactics of mathematics: theory, experience, innovations. Scientific Journal. Vinnytsia: TVORY, 2025. No. 4-123 p.

Editorial address: 32, Ostrozkyi St., Vinnytsia, 21100, Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University

E-mail: didmath@vspu.edu.ua; <https://vspu.net/didmath>

ISSN 3041-2277

e-ISSN 3041-2285

DOI: 10.31652/3041-2277 DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-1-123

Media ID: R30-04833

Cover: the painting «Drawing Hands» (1948) by Maurits Cornelis Escher

Зміст

МЕТОДИЧНА НАУКА - ВЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ

Олександр Шкільний

Вивчення геометричних перетворень у 9 класі НУШ за авторським підручником
інтегрованого курсу математики 7

Іон Акірі

Дидактичні технології з математики 20

Іван Ленчук

Із чим найперше потрібно ознайомити учнів 7-го класу, розпочинаючи вивчення геометрії
..... 28

СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ У МЕТОДИЦІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Ольга Матяш, Irina Velbitskaya

Компаративний аналіз формування логіко-математичного мислення учнів початкової
школи: імплікації для вчителя математики базової школи 51

Олег Коношевський

Формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики: огляд закордонного
досвіду 65

Аліна Воевода

Історія математичних відкриттів як засіб розвитку критичного мислення учнів..... 81

ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Наталія Підлісничка

Методичні аспекти впровадження інформаційних технологій в процес навчання
математики в ЗВО 92

Валентин Риндюк

Ключові фактори визначення мети та завдань використання навчальних платформ у
навчанні учнів математики 102

МЕТОДИЧНА ПІДГОТОВКА ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Любов Михайленко, Іван Хутченко

Формування готовності майбутніх учителів математики до моніторингу, діагностики й
оцінювання результатів навчання..... 112

Contents

METHODOLOGICAL SCIENCE TO A MATH TEACHER

Oleksandr Shkolnyi

Studying geometric transformations in 9th grade OF NUS according to the author's textbook of the integrated course of mathematics8

Akiri Ion

Didactic technologies in mathematics 21

Ivan Lenchuk

What are the first things that 7th grade students need to get acquainted with, beginning the study of geometry 29

MODERN TRENDS IN MATHEMATICS TEACHING METHODS

Olha Matiash, Irina Velbitskaya

Comparative analysis of the development of logical mathematical thinking in primary school students: implications for the lower secondary mathematics teacher 52

Oleh Konoshevskyi

Formation of students' positive attitude towards learning mathematics: review of foreign experience..... 66

Alina Voievoda

The history of mathematical discoveries as a means of developing students' critical thinking ... 82

DIGITAL TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS TEACHING

Nataliia Pidlisnycha

Methodological aspects of implementing information technologies in the process of teaching mathematics in higher education institutions 93

Valentyn Ryndiuk

Key factors in determining the purpose and tasks of using learning platforms in teaching mathematics students103

METHODOLOGICAL TRAINING OF MATH TEACHERS

Liubov Mykhailenko, Ivan Khutchenko

Formation of readiness of future mathematics teachers for monitoring, diagnostics, and assessment of learning outcomes 113

УДК 373.5.016:51:371.671(477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-7-19

Вивчення геометричних перетворень у 9 класі НУШ за авторським підручником інтегрованого курсу математики

Олександр Школьний

УДУ імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.ua/ ORCID <https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

Анотація

Нова українська школа (НУШ) – це реформа освіти, яка спрямована на формування в учнів та учениць ключових компетентностей, які сприятимуть подальшому їх навчанню в закладах вищої освіти та самореалізації в майбутній професійній діяльності. Згідно з цією реформою, процес навчання в школах організовано наступним чином: за затвердженими Державними стандартами освіти і базовим навчальним планом, розроблено модельні навчальні програми з усіх освітніх галузей, зокрема, з математики, а вже за цими модельними програмами створюються підручники та інші засоби навчання.

Метою статті є висвітлення методичних особливостей вивчення геометричних перетворень у 9 класі Нової української школи за підручником авторського колективу Олександр Школьний, Євген Нелін, Андрій Милянник, Юлія Простакова, створеного за модельною навчальною програмою авторського колективу на чолі з Марією Васишин. За цією програмою і підручником геометричні перетворення площини вивчаються на початку 9 класу. Крім інших переваг, це сприятиме більш коректному викладу подальшого матеріалу 9 класу, що стосується побудови графіків квадратичних функцій, користуючись не інтуїтивними міркуваннями, а методом геометричних перетворень.

У цій роботі ми детально описуємо авторську методику вивчення геометричних перетворень площини, яка передбачає вивчення наступних підрозділів: «Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання», «Рухи і перетворення подібності; види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот», «Рівність і подібність фігур; розв’язування задач на побудову методом геометричних перетворень».

Апробація підручника інтегрованого курсу «Математика» для 9 класу згаданого авторського колективу в 2025-2026 навчальному році в українських школах показує, що учні та учениці цілком позитивно сприймають місце і спосіб вивчення геометричних перетворень площини та належним чином їх використовують у своїй навчальній діяльності. Однак, пропонуванний спосіб опанування даного матеріалу учнями 9 класу НУШ потребує подальших досліджень. Проте ми переконані в доцільності та перспективності описаного підходу і будемо й надалі користуватися ним для формування ключових компетентностей учнів та учениць.

Ключові слова: Нова українська школа, компетентнісний підхід до навчання, інтегрований курс математики, геометричні перетворення площини, методичні особливості, інноваційні методи навчання.

UDC 373.5.016:51:371.671(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-7-19

Studying geometric transformations in 9th grade OF NUS according to the author's textbook of the integrated course of mathematics

Oleksandr Shkolnyi

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine.

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.ua / ORCID <https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

Abstract

The New Ukrainian School (NUS) is an education reform aimed at developing key competencies of students that will facilitate their further education in higher education institutions and self-realization in future professional activities. According to this reform, the learning process in schools is organized as follows: according to the approved State Educational Standards and the basic educational plan, model programs have been developed for all educational branches, in particular, mathematics, and textbooks and other teaching aids are created based on these model programs.

The purpose of the article is to highlight the methodological features of studying geometric transformations in the 9th grade of the New Ukrainian School according to the textbook of the author team Oleksandr Shkolnyi, Yevhen Nelin, Andrii Mylianyk, Yuliia Prostakova, created according to the model program of the author team led by Maria Vasylyshyn. According to this program and textbook, geometric transformations of the plane are studied at the beginning of the 9th grade. Among other advantages, this will contribute to a more correct presentation of the subsequent material of the 9th grade, which concerns the construction of graphs of quadratic functions, using not intuitive reasoning, but the method of geometric transformations.

In this work, we describe in detail the author's methodology for studying geometric transformations of the plane, which involves studying the following subsections: "Geometric transformations of the plane and their analytical representation", "Movements and transformations of similarity; types of movements and their properties: parallel transfer, symmetry relative to a point, symmetry relative to a line, rotation", "Equality and similarity of figures; solving draw problems using the method of geometric transformations".

The probation of the textbook of the integrated course "Mathematics" for the 9th grade of the mentioned author's team in the 2025-2026 academic year in Ukrainian schools shows that students quite positively perceive the place and method of studying geometric transformations of the plane and properly use them in their educational activities. However, the proposed method of mastering this material by 9th grade students of NUS requires further research. However, we are convinced of the feasibility and prospects of the described approach and will continue to use it to form key competencies of students.

Keywords: New Ukrainian School, competency-based approach to learning, integrated course of mathematics, geometric transformations of the plane, methodological features, innovative teaching methods.

Постановка проблеми. Аналіз основних досліджень і публікацій. Наразі в Україні діє реформа освіти «Нова українська школа» (НУШ). Вона виникла в результаті невідповідності запитів українського суспільства щодо української освітньої системи та результатів її функціонування. Цю невідповідність особливо яскраво відображають результати державної підсумкової атестації (ДПА) випускників 9 та 11 класів, зовнішнього незалежного оцінювання якості знань (ЗНО) абітурієнтів закладів вищої освіти (ЗВО), а також результати міжнародних порівняльних досліджень PISA (див., наприклад, Бахрушин 2019; Вакуленко та ін. 2021; Мазорчук та ін. 2019; НУШ 2024; УЦОЯО 2021).

Як ми вже зазначали в статті (Шкільний 2024), основною ідеєю Нової української школи є орієнтація учнівства на успішну інтеграцію в суспільство після закінчення школи, професійну реалізованість та особисте задоволення від власної особистої та суспільної діяльності. Тому природно, що теоретичною основою реформи НУШ є компетентнісний підхід, який спрямовує весь процес навчання в школі не на формальне здобуття учнями знань, умінь і навичок у тій чи іншій предметній області, а на формування в них таких характеристик особистості, котрі дозволять у майбутньому забезпечити їм успішну самореалізацію в дорослому світі. З метою реалізації цієї концепції були створені Державні стандарти освіти (КМУ України, 2018; КМУ України 2020; МОН України, 2024), а також модельні навчальні програми для кожної з 9 визначених у концепції НУШ освітніх галузей. Наприклад, для математичної освітньої галузі затверджено більше десяти модельних програм різних авторів лише для початкової та для базової середньої школи (МОН України, 2024).

У межах своєї академічної свободи вчителі на основі модельних програм повинні розробити і впровадити відповідні навчальні програми, створити календарно-тематичне планування та інші дидактичні матеріали для здійснення освітньої діяльності. Проте зрозуміло, що основним засобом навчання залишаються підручники. Нині існує більше 10 підручників з математики для початкової школи та для базової середньої школи (ІМЗО, 2024).

Авторський колектив на чолі з Марією Васишин (Марія Васишин, Андрій Милянник, Микола Працьовитий, Юлія Простакова і Олександр Шкільний) запропонував модельні програми з математики для 5-6 та 7-9 класів (Васишин та ін., 2021, Васишин та ін., 2023), які відрізняються інноваційними підходами до формування змісту навчального матеріалу та способів його вивчення. Ці програми орієнтовані на європейські та світові освітні тенденції останніх десятиліть. Зокрема, в ній посилено ймовірно-статистичну лінію, пропонується вивчати в 7-9 класах просторові геометричні фігури паралельно з плоскими, розглядаються основи фінансової грамотності тощо. Детальніше з методичними особливостями цієї програми можна познайомитися у статті (Shkolnyi 2023).

Однією з важливих особливостей програми (Васишин та ін. 2023) є перенесення вивчення геометричних перетворень на початок 9 класу. Саме для цього в цій самій програмі

раніше відбулося перенесення вивчення координат і векторів із 9 класу у 8 клас, а вивчення площ – із 8 класу в 9 клас. Автори вбачали в цьому потребу з кількох причин. По-перше, метод геометричних перетворень сам по собі є потужним інструментом розв'язування геометричних задач, який значно розширює кругозір учнів та учениць. Тому ми вважаємо, що чим раніше на додачу до векторно-координатного методу ще й цей метод буде опанований дітьми, тим простіше їм буде набути компетентностей, передбачених Державним стандартом (КМУ України 2020). По-друге, вивчення геометричних перетворень площини на початку 9 класу дасть можливість у наступних розділах коректно пояснити побудову графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$: він буде образом вже відомого учням та ученицям графіка функції $y = x^2$ за певних геометричних перетворень. Справді, для математично коректного пояснення побудови графіка квадратичної функції учні вже мають бути знайомі з аналітичним заданням паралельного перенесення на заданий вектор, симетрії відносно осі абсцис і деформації до осі абсцис, а це можливо лише за попереднього ретельного вивчення геометричних перетворень площини.

У посібнику, що виданий як частина підручника інтегрованого курсу математики для 9 класу (Школьний та ін. 2025) авторського колективу в складі Олександра Школьного, Євгена Неліна, Андрія Миляника і Юлії Простакової, створеного за модельною програмою (Василишин та ін. 2023), вивчається розділ «Геометричні перетворення та їх використання», який і забезпечує реалізацію наведеної вище ідеологічної схеми.

Метою цієї статті є висвітлення особливостей вивчення геометричних перетворень площини в інтегрованому курсі «Математика» для 9 класу НУШ. Ми зосередимо свою увагу на тому, на що саме варто звернути увагу вчителів та вчительок, які прагнуть усвідомленого формування в учнів та учениць НУШ знань, умінь і навичок (компетентностей), пов'язаних з опануванням ними відповідного навчального матеріалу.

Виклад основного матеріалу. Згідно з програмою (Василишин та ін. 2023) вивчення геометричних перетворень площини є першою темою 9 класу. Відповідний розділ підручника має назву «Геометричні перетворення та їх використання». Матеріал цього містить переважно традиційний матеріал курсу математики 9 клас, але його вивчення здійснюється на початку навчального року, на відміну від більшості традиційних програм і підручників. Також у цьому розділі більш детально розглянуто поняття аналітичного задання геометричного перетворення – формул, які пов'язують координати образу і прообразу довільної точки площини за такого перетворення у деякій ПДСК.

Традиційно в шкільному курсі математики вивчалось лише аналітичне задання паралельного перенесення на заданий вектор. У посібнику (Школьний та ін. 2025) виводиться аналітичне задання також і для центральної симетрії, симетрій відносно осей координат, гомотетії, а також для деформацій до осей координат. Це дозволить у наступному розділі більш акуратно і строго, ніж зазвичай, пояснити принцип побудови графіка квадратичної

функції $y = ax^2 + bx + c$ як образ графіка функції $y = x^2$ за одного чи кількох послідовно виконаних геометричних перетворень площини.

Тема «Геометричні перетворення та їх використання» складається з наступних підрозділів: «Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання», «Рухи і перетворення подібності. Види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот» і «Рівність і подібність фігур. Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень».

У першому підрозділі «Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання» розглядаються геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є широке використання геометричних перетворень площини в анімації, створенні відеоігор тощо. У діалозі Петрика й Тетянки на початку відповідного підрозділу посібника згадується, зокрема, робота в графічному редакторі та необхідність мати формули, які описують рух об'єктів при створенні анімаційних фільмів та відеоігор. Означення геометричного перетворення площини дається наступним чином (Шкільний та ін. 2025): «Нехай задано деяке правило f , яке кожній точці M площини ставить у відповідність лише одну точку M' цієї самої площини. Точку M' називають образом точки M , а точку M називають прообразом точки M' для правила f і записують $f(M) = M'$ або $f: M \rightarrow M'$. Правило f називають геометричним перетворенням площини, якщо: 1) для будь-якої точки M' площини у цій самій площині існує її прообраз – точка M , тобто $f(M) = M'$; 2) для будь-яких двох різних точок M і K площини, їх образи M' і K' також різні, тобто $f(M) \neq f(K)$ ».

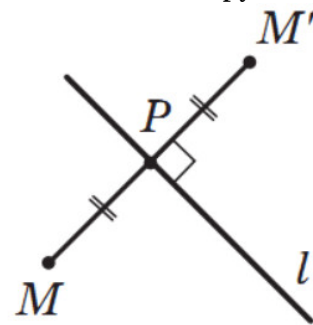
Це означення є традиційним для курсу математики, але в українських шкільних підручниках раніше не вводилося. Звертаємо увагу, що мова йде не про геометричне перетворення деякої геометричної фігури, а про геометричне перетворення всієї площини. Однак, зрозуміло, що внаслідок цього перетворення змін зазнають і всі геометричні фігури площини.

Важливим для розуміння сутності геометричного перетворення є поняття образу та прообразу даної точки площини. Ця термінологія в подальшому буде використовуватися протягом усього вивчення геометричних перетворень та їх подальших застосувань. Крім образу і прообразу точок дається також і означення образу і прообразу геометричної фігури (Шкільний та ін. 2025): «Множину образів Φ' усіх точок деякої геометричної фігури Φ за перетворення f називають образом цієї геометричної фігури, а геометричну фігуру Φ називають прообразом геометричної фігури Φ' ».

Далі наводяться означення наступних геометричних перетворень: 1) тотожне перетворення; 2) паралельне перенесення на заданий вектор $\vec{a}$; 3) симетрія відносно заданої точки O (центральна симетрія); 4) симетрія відносно заданої прямої l (осьова симетрія); 5) поворот відносно заданої точки O на заданий кут φ (за та проти годинникової стрілки); 6)

гомотетія з центром у заданій точці O і заданим коефіцієнтом $\lambda > 0$; 7) деформація з даним коефіцієнтом $k > 0$ до заданої прямої l .

Усі означення геометричних перетворень даються конструктивно та ілюструються рисунками. Наприклад, означення осьової симетрії є наступним (Шкільний та ін. 2025): «Нехай задано деяку пряму l . Якщо будь-якій точці M площини, що належить прямій l , перетворення f ставить у відповідність саму себе, а будь-якій точці M площини, що не належить прямій l , – точку M' так, що відрізок MM' перпендикулярний до прямої l і перетинає її в точці P , а ця точка P є серединою відрізка MM' (див. рисунок), то таке перетворення f називають симетрією відносно прямої l або осьовою симетрією з віссю l ».



Такі означення дозволяють легко будувати образ будь-якої точки площини за кожного з цих перетворень. Зрозуміло, що на уроці вчителю або вчительці варто показати, як саме це слід робити для кожного з наведених перетворень на прикладах побудови образів кількох точок.

Далі в підрозділі вводиться поняття аналітичного задання геометричного перетворення як формул, що пов'язують координати довільної точки $M(x; y)$ площини та її образу $M'(x'; y')$ за певного перетворення f у деякій ПДСК на площині, а також виводяться ці формули для: 1) тотожного перетворення; 2) паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$; 3) симетрії відносно точки $O(x_0; y_0)$; 4) симетрії відносно осі Ox ; 5) симетрії відносно осі Oy ; 6) деформації з коефіцієнтом k до осі Ox ; 7) деформації з коефіцієнтом k до осі Oy і 8) гомотетії з центром у точці $O(x_0; y_0)$ і коефіцієнтом λ . Наприклад, аналітичне задання симетрії відносно точки $O(x_0; y_0)$ має вигляд:
$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x, \\ y' = 2y_0 - y. \end{cases}$$

За допомогою аналітичного задання перетворення можна знаходити координати образу даної точки і прообразу даної точки. Належну кількість прикладів наведено в тексті посібника (Шкільний та ін. 2025). Формуванню відповідних навичок варто приділити достатню кількість навчального часу на уроках, присвячених цьому параграфу. Різномірне і досить багата система задач підрозділу сприяє досягненню цієї мети.

Учителі можуть по-різному організовувати вивчення матеріалу першого підрозділу. Можна провести урок-лекцію, де після належної мотивації навести означення геометричного перетворення площини і розглянути всі 7 прикладів геометричних перетворень. На наступних кількох уроках можна спочатку відпрацювати побудову образів точок за цих перетворень. Далі можна провести ще один урок-лекцію, де вивести всі аналітичні задання геометричних перетворень, розглянуті в параграфі, та навести кілька прикладів щодо знаходження образів і прообразів точок за цих перетворень. Після цього на наступних кількох уроках можна відпрацьовувати запис аналітичного задання геометричних перетворень та

знаходження образів і прообразів точок. Природно завершувати таке відпрацювання самостійною роботою з наступним її аналізом та рефлексією.

Однак, вивчення згаданого матеріалу можна організувати й інакше. На першому уроці після мотиваційного блоку можна розглянути лише тотожне перетворення і паралельне перенесення разом з їх аналітичним заданням. На наступному уроці здійснюється закріплення навичок запису цього аналітичного задання і знаходження образів і прообразів точок за паралельного перенесення. Потім на наступних уроках можна поступово розглядати нові види геометричних перетворень разом із їх аналітичним заданням та його застосуваннями: симетрія відносно заданої точки, симетрія відносно осей координат, гомотетія, деформація. При цьому кількість уроків, необхідних для засвоєння цього матеріалу визначається вчителем або вчителькою залежно від учнівського колективу. Завершувати вивчення підрозділу за такою схемою також природно самостійною роботою з подальшим її аналізом та рефлексією.

Звертаємо також увагу, що в цікавинках від дідуса Тараса до першого підрозділу вказується, що поняття геометричного перетворення площини, по суті, є узагальненням уже відомого учням та ученицям поняття функції, в якій у ролі аргумента і функції розглядаються не числа, а точки площини. Також у цих цікавинках розглядається поняття довільного відображення множини X у множину Y і наводяться відповідні приклади. Цей матеріал, зокрема, може бути корисним на заняттях математичного гуртка для дев'ятикласників, що цікавляться математикою.

У другому підрозділі «*Рухи і перетворення подібності. Види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот*» дається означення руху площини, перетворення подібності площини та вивчаються їх властивості. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є необхідність розуміти, який саме об'єкт буде образом відрізка, трикутника, многокутника, кола тощо за таких геометричних перетворень. Це потрібно, зокрема, для створення рухомих анімаційних картинок та роботи в графічних редакторах.

Означення руху дається традиційно (Шкільний та ін. 2025): «Рухом площини (або просто рухом) називають геометричне перетворення площини, що зберігає відстані між точками. Тобто, якщо для перетворення f і довільних точок M і K площини $f(M) = M'$, $f(K) = K'$ і виконується рівність $M'K' = MK$, то перетворення f називають рухом».

Далі за означенням показується, що паралельне перенесення на заданий вектор є рухом. При цьому для доведення цього факту можна використати як суто геометричний спосіб, так і його аналітичне задання. Після цього показано, що рухами є також центральна симетрія, осьова симетрія та поворот. Доведення для останніх двох перетворень винесено в навчальні відео, які є обов'язковими для опрацювання всіма учнями та ученицями.

Для ефективного вивчення властивостей рухів вводиться означення простого відношення трьох точок і доводиться основна властивість рухів (Школьний та ін. 2025): «Теорема (основна властивість рухів). Будь-який рух f довільні три точки, що лежать на одній прямій переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок. Тобто, якщо A, B, C – довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB , $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$ ».

Використовуючи цю теорему, далі в навчальному відео доводяться інші властивості рухів: (Школьний та ін 2025): «Будь-який рух площини: 1) будь-яку пряму переводить у пряму, будь-який відрізок – у відрізок, будь-який промінь – у промінь; 2) будь-який трикутник переводить у рівний йому трикутник; 3) будь-який кут переводить у рівний йому кут».

Властивості рухів інтуїтивно є зрозумілими для учнів та учениць, але строге доведення цих властивостей є досить абстрактним і може бути складним для тих із них, хто навчається на початковому та середньому рівні навчальних досягнень. Тому це доведення винесено в навчальне відео, опрацювання якого є обов'язковим лише для тих здобувачів освіти, хто навчається на достатньому та високому рівні.

Далі в підрозділі Тетянка слушно зауважує, що не всі відомі учням перетворення площини є рухами. Перетворення подібності площини дається наступним чином (Школьний та ін. 2025): «Перетворенням подібності площини (або просто подібністю) з коефіцієнтом λ ($\lambda > 0$ називають геометричне перетворення площини, що відстані між будь-якими двома точками цієї площини змінює в λ разів. Тобто, якщо для перетворення f і довільних точок M і K площини $f(M) = M'$, $f(K) = K'$ і виконується рівність $M'K' = \lambda \cdot MK$, то перетворення f називають подібністю з коефіцієнтом λ ».

Після цього показується, що гомотетія є перетворенням подібності. У підручнику для цього використано геометричний спосіб, але можна використати для цього й аналітичне завдання, як радить дідусь Тарас. Можна також дати це завдання учням та ученицям, які цікавляться математикою, в якості додаткового домашнього завдання на оцінку високого рівня. Далі пропонується за аналогією з рухами самостійно довести основну властивість перетворень подібності (Школьний та ін. 2025): «Теорема (основна властивість подібностей). Будь-яка подібність g довільні три точки, що лежать на одній прямій переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок. Тобто, якщо A, B, C – довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB , $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$ ».

Потім, використовуючи цю теорему, учням та ученицям пропонується самостійно довести й інші властивості перетворень подібності. Ми також не вимагаємо виконання цих

доведень усіма здобувачами освіти (всі мають знати самі властивості й використовувати їх для розв'язування задач), але тим із них, хто навчається на достатньому та високому рівні, радимо виконати це доведення як додаткове завдання на окрему оцінку.

Завершується теоретичний матеріал підрозділу важливими зауваженнями, що всі рухи можна вважати перетвореннями подібності з коефіцієнтом $k = 1$, а також, що існують геометричні перетворення, які не є ні рухами, ні подібностями. Наприклад, таким перетворенням є деформація з коефіцієнтом $k \neq 1$ до прямої l . Доведення останнього факту наведено в посібнику і є обов'язковим для розуміння всім учнями та ученицями.

Цікавинки від дідуся Тараса до другого підрозділу містять матеріал для занять математичного гуртка, який стосується інваріантів геометричних перетворень. Зокрема, основними інваріантами рухів площини є відстань між точками, градусна міра кута, просте відношення трьох точок, а основними інваріантами перетворень подібності – градусна міра кута і просте відношення трьох точок.

Третій підрозділ «Рівність і подібність фігур. Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень» присвячений вивченню рівності та подібності геометричних фігур. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є те, що поняття рівності та подібності часто використовується в повсякденному житті, але строгі означення цих понять відомі учням 9 класу лише для трикутників. Наприклад, щоб зрозуміти, чи є подібними два кленових листочки (діалог Петрика й Тетянки на початку підрозділу), потрібно дати означення подібності для довільних геометричних фігур, а не лише для трикутників.

Далі дається означення рівних фігур (Школьний та ін. 2025): «Дві геометричні фігури Φ і Φ' називають рівними, якщо $f(\Phi) = \Phi'$, де f – рух площини. Іншими словами, фігури називають рівними, якщо одна з них переходить в іншу за деякого руху площини».

Важливо звернути увагу учнів та учениць, що в 7 класі це тлумачення рівних фігур на інтуїтивному рівні вже розглядалося, коли стверджувалося, що рівні відрізки, рівні кути і рівні трикутники можна сумістити накладанням. Тепер це інтуїтивне розуміння викладено більш строго з математичної точки зору. Також важливо, що для відрізків, кутів і трикутників наведене означення рівних фігур не суперечить уже відомим. Справді, учні та учениці вже знають, що рух переводить відрізок у відрізок тієї самої довжини, кут – у кут тієї самої градусної міри, а трикутник – у рівний йому трикутник. Тому можна вважати, що для цих геометричних фігур щойно наведене означення рівності є еквівалентним відомим раніше. Але, наприклад, для чотирикутників, кіл та інших геометричних фігур, означення рівності раніше не вводилося. Тепер у цих окремих означеннях рівності немає потреби, бо є означення, яке можна використати для будь-яких геометричних фігур (Школьний та ін. 2025).

Після введених зауважень природним виглядає використання означення рівних фігур для встановлення рівності вже відомих учням геометричних фігур. Зокрема, в посібнику доводиться, що: а) два кола, радіуси яких рівні, є рівними; б) два квадрати, сторони яких рівні,

є рівними. Зауважимо, що для доведення рівності двох фігур Φ та Φ' потрібно, по суті, довести два твердження: 1) образ M' довільної точки M , яка належить Φ , буде належати Φ' ; 2) образ M' довільної точки M , яка НЕ належить Φ , також НЕ буде належати Φ' .

Для рівності двох кіл однакового радіуса обидві частини цього доведення виконано в посібнику. Для доведення рівності двох квадратів з рівними сторонами, яке технічно є складнішим, друга частина цього доведення в посібнику не наводиться, але інтуїтивно є зрозумілою і за потреби може бути виконана самостійно. Також зауважимо, що автори посібника не вимагають засвоєння доведення рівності двох фігур всіма дітьми. Усі мають розуміти принцип, за яким здійснюється це доведення, а також уміти використовувати означення рівності двох фігур для розв'язування задач. Однак, для учнів та учениць, які навчаються на достатньому та високому рівні навчальних досягнень, відтворення таких доведень сприятиме розвитку їх розумових здібностей і може бути використане з цією метою як додаткове домашнє завдання з відповідним оцінюванням.

Далі в підрозділі наводиться означення подібних фігур (Школьний та ін. 2025): «Дві геометричні фігури Φ і Φ' називають подібними, якщо $g(\Phi) = \Phi'$, де g – перетворення подібності. Іншими словами, фігури називають подібними, якщо одна з них переходить в іншу за деякого перетворення подібності».

Тут також важливо зауважити, що для випадку, коли фігура Φ є трикутником, це означення є еквівалентним до вже відомого означення подібних трикутників, бо за властивостями, наведеними в попередньому підрозділі, подібність переводить будь-який трикутник у подібний йому трикутник. Далі, за аналогією з рухами, у навчальних відео показується, що а) будь-які два кола є подібними; б) будь-які два квадрата є подібними (Школьний та ін. 2025).

Поняття симетричної фігури вводиться в параграфі наступним чином (Школьний та ін. 2025): «Якщо перетворення f геометричну фігуру Φ переводить саму в себе, то таке перетворення називають симетрією фігури Φ . При цьому саму фігуру Φ називають симетричною відносно перетворення f ».

Далі в підрозділі розглядаються приклади конкретних геометричних фігур, для яких встановлюється їх симетрії. При цьому для зручності і простоти мовлення та для узгодження нової термінології з традиційною для багатьох підручників, якщо симетріями деякої геометричної фігури є центральна або осьова симетрія, то такі геометричні фігури просто називають симетричними відносно точки або прямої.

Завершується підрозділ прикладом застосування геометричних перетворень для розв'язування задач на побудову. У теоретичному матеріалі наведено дві задачі на побудову, які можна розв'язати за допомогою рухів і перетворень подібності. Перша з них – задача оптимізації, яка передбачає знаходження точки на прямій, сума відстаней від якої до двох

даних точок є найменшою (Шкільний та ін. 2025): «На заданій прямій l побудуйте точку C , сума відстаней від якої до двох даних точок A і B була би найменшою».

Тетянка слушно зауважує після розв'язання цієї задачі (Шкільний та ін. 2025): «Якщо уявити собі, що пряма l – це шосе для автомобілів, а точки A і B – два маленькі села, то ця задача розповідає, де саме на шосе потрібно поставити зупинку так, щоб жителям обох сіл було зручно її використовувати». Це зауваження показує практичну значущість такої задачі.

Другий приклад – це використання в задачах на побудову гомотетії. Це дещо модифікована, але досить типова задача про «вписування» прямокутника в трикутник (Шкільний та ін. 2025): «Нехай задано довільний гострокутний трикутник ABC . Потрібно «вписати» в нього прямокутник $KLMP$, у якого $\frac{KL}{KP} = \frac{1}{2}$, так, щоб точки K і P належали стороні AC , точка L – стороні AB , а точка M – стороні BC .»

Зрозуміло, що для розв'язування задач на побудову можна використовувати й інші геометричні перетворення: паралельне перенесення, центральну симетрію, поворот тощо. Відповідні задачі наведені в посібнику як різнорівневі задачі для самостійного розв'язування в «Тренажерному залі» цього підрозділу.

Цікавинки від дідуса Тараса до третього підрозділу містять матеріал, що стосується популярної наразі в багатьох застосуваннях теорії – теорії фракталів. Зокрема, тут розглядається поняття самоподібної фігури та приклад побудови трикутного килима Серпінського – самоподібної фрактальної множини. Цей матеріал ми вважаємо доцільним для вивчення учнями та ученицями 9 класу на заняттях математичного гуртка.

Висновки і перспективи подальших досліджень. На наше переконання, описана вище методика вивчення геометричних перетворень площини сприятиме досягненню обох поставлених авторами програми (Василишин та ін. 2023) та посібника (Шкільний та ін. 2025) цілей: по-перше, учні та учениці отримають потужний апарат для розуміння оточуючої дійсності та для розв'язування геометричних задач; по-друге вчителі та вчительки математики матимуть можливість у 9 класі математично коректно дати алгоритм побудови графіка загальної квадратичної функції як образу графіка функції $y = x^2$ за послідовного виконання одного чи кількох геометричних перетворень площини.

Пілотування та апробація модельної програми (Василишин та ін. 2023) і посібника (Шкільний та ін., 2025) протягом 2025-2026 навчального року в закладах загальної середньої освіти України свідчить, що учні та учениці цілком позитивно сприймають таке місце і такий спосіб геометричних перетворень площини та належним чином їх використовують. Разом із тим зауважимо, що ретельне дослідження ефективності такого способу опанування даного матеріалу учнями 9 класу НУШ іще попереду, оскільки згадана програма і посібник використовуються в навчальному процесі лише один навчальний рік. Проте ми переконані в доцільності та перспективності описаного підходу і будемо й надалі користуватися ним для

формування ключових компетентностей учнів у контексті реформи «Нова українська школа».

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Бахрушин, В. (2019) Математика у PISA-2018: Результати і висновки. Нова українська школа. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>
- Вакуленко, Т., Горох, В., Раков, С., Терещенко, В. (2021) PISA-2022: Рамковий документ з математики. http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf
- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Школьний, О.В. (2021) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf
- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Школьний, О.В. (2023) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf
- ІМЗО (2024) Електронні версії підручників. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikiv/>
- КМУ України (2018) Державний стандарт початкової освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-p#Text>
- КМУ України (2020) Державний стандарт базової середньої освіти. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- КМУ України (2023). Державний стандарт профільної середньої освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-p#Text>
- Мазорчук, М., Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., Горох, В. (2019). Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- МОН України (2024) Математика. Модельні програми для 5-6 класів і 7-9 класів НУШ. <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/>
- НУШ (2024) Офіційний сайт проекту «Нова Українська школа». <https://nus.org.ua>
- УЦОЯО (2021) Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf
- Школьний, О.В. (2024) Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. (2024). *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 20-28.
- Школьний, О.В., Нелін, Є.П., Милянник, А.І., Простакова, Ю.С. (2025) Математика: посібник як частина підручника інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Частина 1. Харків. Ранок.
- Shkolnyi, O. (2023) New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In "Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău". Chișinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.

References

- Bakhrushyn, V. (2019). *Matematyka u PISA-2018: Rezultaty i vysnovky* [in Ukrainian] (*Mathematics in PISA 2018: Results and conclusions*). Nova ukrainska shkola. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>
- Vakulenko, T., Horokh, V., Rakov, S., & Tereshchenko, V. (2021). *PISA-2022: Ramkovyi dokument z matematyky* [in Ukrainian] (*PISA 2022: Mathematics framework*). http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf
- Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsiovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2021). *Modelna navchalna prohrama "Matematyka. 5-6 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for general secondary education institutions*). https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf
- Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsiovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Matematyka. 5-6 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for general secondary education institutions*). https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf
- IMZO. (2024). *Elektronni versii pidruchnykiv* [in Ukrainian] (*Electronic versions of textbooks*). <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyy-pidruchnykiv/>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2018). *Derzhavnyi standart pochatkovoi osvity* [in Ukrainian] (*State standard of primary education*). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-p#Text>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2020). *Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*State standard of basic secondary education*). <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standativ-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2023). *Derzhavnyi standart profilnoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*State standard of specialized secondary education*). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-p#Text>
- Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, H., Shumova, K., Rakov, S., & Horokh, V. (2019). *Natsionalnyi zvit za rezultatamy mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2018* [in Ukrainian] (*National report on the results of the international study of educational quality PISA 2018*). https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy. (2024). *Matematyka. Modelni prohramy dlia 5-6 klasiv i 7-9 klasiv NUSH* [in Ukrainian] (*Mathematics. Model curricula for grades 5-6 and 7-9 of the New Ukrainian School*). <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/>
- Nova ukrainska shkola. (2024). *Ofitsiyni sait projektu "Nova ukrainska shkola"* [in Ukrainian] (*Official website of the "New Ukrainian School" project*). <https://nus.org.ua>
- Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. (2021). *Ofitsiyni zvit pro provedennia u 2021 rotsi zovnishnoho nezalezhnogo otsiniuvannia* [in Ukrainian] (*Official report on the external independent assessment conducted in 2021*). https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf
- Shkolnyi, O. V. (2024). *Metodychni osoblyvosti vyvchennia lohichnykh osnov matematyky v integrovanomu kursi "Matematyka" dlia uchniv 7 klasu NUSH* [in Ukrainian] (*Methodological features of studying the logical foundations of mathematics in the integrated Mathematics course for Grade 7 students of NUS*). *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 2, 20-28.
- Shkolnyi, O. V., Nelin, Ye. P., Mylianyk, A. I., & Prostakova, Yu. S. (2025). *Matematyka: posibnyk yak chastyna pidruchnyka integrovanoho kursu dlia 9 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Chastyna 1* [in Ukrainian] (*Mathematics: A guide as part of an integrated course textbook for Grade 9. Part 1*). Ranok.
- Shkolnyi, O. (2023). New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In *Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Proceedings of the National Scientific Conference with International Participation* (November 17, 2023). Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă".

Отримано / Received 10.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 20.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 37.016:51:37.091.3

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-20-27

Дидактичні технології з математики

Акірі Іон

Державний педагогічний університет «Іон Крянге», м.Кишинів, Республіка Молдова

E-mail: iakiri8@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8874-2329>

Анотація

Розглянуто проблему кореляції методів/технік навчання з формами організації навчальної діяльності на уроках математики. Успіх уроку математики та досягнення його цілей залежить і від кореляції вибраних методів/технік та засобів навчання з формою організації навчальної діяльності. Розробки сучасної дидактики та педагогіки відкривають широкі можливості для вчителя математики у реалізації відповідної кореляції. Сформульовано визначення поняття дидактичної технології. Наведено приклади методів та технік навчання математики у кореляції з формами організації навчальної діяльності та у контексті формування компетентностей. Вчитель математики повинен застосовувати на уроках сучасні інноваційні технології навчання для формування математичної компетентності учнів, у тому числі: технології розвитку пізнавального інтересу учнів; методи/техніки реалізації на уроках математики методів кооперативного навчання та колективно-групового навчання; методи/техніки розвитку емоційного інтелекту учнів; сучасні методи/техніки розвитку креативного мислення учнів; методи/техніки проектного навчання під час уроків математики, зокрема проведення проектів STEM/STEAM/STREAM; методи/техніки опрацювання проблемних та дискусійних питань; технології ситуативного моделювання (навчання у грі); методи/техніки розвитку творчої активності учнів.

Освітня практика доводить, що використання сучасних цифрових інструментів та ресурсів робить навчання більш наочним та інтерактивним. Завдяки захоплюючим формам роботи та методів/технік викладання учні краще ставляться до математики, збагачується освітній процес, розвиваються комунікативні навички, логічне та критичне мислення, а також виявляється здатність застосовувати знання на практиці. У статті представлено систему сучасних інноваційних технологій навчання для формування математичної компетентності учнів.

Ключові слова: дидактичні технології, математика, методи навчання, техніки, форми, кореляція, компетентності.

UDC 37.016:51:37.091.3

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-20-27

Didactic technologies in mathematics

Akiri Ion

State Pedagogical University «Ion Creanga», Chisinau, Republic of Moldova

E-mail: iakiri8@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8874-2329>

Abstract

The problem of correlating teaching methods/techniques with forms of organizing learning activities in mathematics lessons is examined. The success of a mathematics lesson and the achievement of its objectives also depend on the correlation between the selected teaching methods/techniques and tools and the form in which learning activities are organized. Developments in modern didactics and pedagogy provide mathematics teachers with wide opportunities to implement such correlations. A definition of the concept of didactic technology is formulated. Examples are provided of methods and techniques for teaching mathematics in correlation with forms of organizing learning activities and in the context of competence formation. A mathematics teacher must apply modern innovative learning technologies during lessons to develop students' mathematical competence, including: technologies for fostering students' cognitive interest; methods/techniques for implementing cooperative and collective-group learning in mathematics lessons; methods/techniques for developing students' emotional intelligence; modern methods/techniques for developing students' creative thinking; methods/techniques of project-based learning during mathematics lessons, particularly for implementing STEM/STEAM/STREAM projects; methods/techniques for addressing problem-based and discussion tasks; situational modeling technologies (game-based learning); and methods/techniques for developing students' creative activity.

Educational practice demonstrates that the use of modern digital tools and resources makes learning more visual and interactive. Through engaging forms of work and instructional methods/techniques, students develop more positive attitudes toward mathematics; the educational process becomes enriched; communication skills, logical and critical thinking improve; and the ability to apply knowledge in practice emerges. The article presents a system of modern innovative learning technologies aimed at developing students' mathematical competence.

Keywords: didactic technologies, mathematics, teaching methods, techniques, forms, correlation, competences.

Problem statement. Modern didactics allows a mathematics teacher to diversify mathematics lessons by using different forms of organizing educational activities, different teaching methods and techniques, as well as different learning aids. The main task of a modern teacher is to choose the optimal didactic technology for each lesson.

Didactic technology is a set of forms, methods, techniques and means of learning, with the help of which the goal of the lesson or the corresponding educational event will be achieved.

In practical activities, *didactic teaching technologies (teacher technology)*, *didactic learning technologies (student technology)* and *didactic technologies for assessing school results (assessment technology)* are used.

Purpose of the publication. This article examines the problem of the use of didactic technologies by a teacher in the process of teaching mathematics at school.

Presentation of the main material. The problem of studying methods of teaching mathematics was studied by G.P. Bevz, Z.I. Slepkan, V.G. Bevz, O.I. Pometun, V.A. Shvets, O.I. Matyash, M.I. Burda, L.F. Mykhailenko, O.O. Moskalenko,

O.O. Sydorenko, I.M. Dychkivska, M.V. Mykhailichenko, Y.M. Rudik, T.G. Kramarenko, V.V. Korolsky, S.O. Semerikov, S.V. Shokalyuk, M.I. Zhaldak and others.

The choice and application of teaching methods is interrelated with the forms of organization of educational activities and the means of teaching mathematics in the context of achieving the goals of the lesson.

In the context of competence formation, didactic technologies should be integrated in accordance with the Credo of Active Learning (according to Kees Both):

What I hear – I forget!

What I hear and see – I remember!

What I hear, see and ask – I begin to understand!

What I hear, see, ask and practice – I acquire and form skills!

What I apply in practice – I learn for real!

Also, in his professional activities, the mathematics teacher will correlate the selected didactic technologies with the *MOTIVATION-BASED ALGORITHM OF MATHEMATICS TEACHING*:

- *Start teaching by giving an example of a funny situation, a specific case study, a small story related to the studied theory or the problem proposed for solving;*
- *Question students on previously studied topics in relation to the new phenomenon or theory that will be studied;*
- *Present the lesson plan in the form of questions (this way of presenting the plan forces students to focus on significant aspects and to find answers to the questions posed);*
- *Present knowledge/information in the form of diagrams that make it possible to highlight the relationships between concepts;*
- *Provide interesting examples for students;*

- *Use analogies (thus forcing students to find connections between familiar and new areas).*[1]

We believe that the success of a mathematics lesson and the achievement of its goals also depends on the correlation of the selected methods/techniques and teaching aids with the form of organization of educational activities. Developments in modern didactics and pedagogy open up wide opportunities for the mathematics teacher to implement the appropriate correlation. Below are some examples in this context.

I. In the frontal form of organizing educational activities, the recommended methods of teaching mathematics are both traditional methods: *Presentation, Explanation, Story, Lecture, Empirical methods (Observation, Measurement, Experiment), Exercise method, Textbook method, and interactive methods and techniques: Analysis of a real situation (Case Study), Brainstorming, Brainsketching, Brainwriting, "BBB" method (Batelle - Bilmappen - Brainwriting), Concept map in mathematics, Laboratory work in mathematics, Practical work in the field and others.*

Let us consider the didactic features of some of the mentioned methods and techniques.

- 1) Creating favorable conditions for search, research, and discovery is possible when using the method of *Analysis of a Real Situation (Case Study)*. Practice shows that this method allows the student to freely express his opinion, as well as find the optimal solution as a result of discussion.

The following stages are provided for the implementation of the method:

1. *Choosing a specific case/specific situation (the most valuable, in the context of forming and developing interest in mathematics, are cases/situations from students' practical activities).* The teacher chooses a specific case/specific situation and formulates a problem that corresponds to the age characteristics of the students in the class and their level of mathematical preparedness.

2. *Presentation of the selected case by the teacher.*

The teacher explains the essence of the relevant case/situation to the students in an accessible manner.

3. *Discussion of the case/situation by the students.*

A conversation between the teacher and the students is held, through which the case/situation is analyzed in detail and argued to find the reasons leading to it and all relevant factors.

4. *Search for solutions to the problem.*

The teacher stimulates students to find solutions using a system of questions.

5. *Comparison of different solutions to the problem.*

Depending on the methods of organizing the activity, the received solutions are compared.

6. *Choice of solutions.*

The best solutions are selected.

7. *Evaluation.*

The teacher evaluates how the relevant situation was resolved.

When applying this method, students should be offered significant situations of practical activity, in which the applied orientation of mathematics teaching and the formation of competencies are implemented.

- 2) The "BBB" method (Batelle – Bilmappen – Brainwriting)

This method is also called: Brainwriting – a picture portfolio.

It is implemented according to the following algorithm:

1. *The task is set before the whole class.*
2. *Oral brainstorming with the whole class. Ideas are formulated to solve the task.*
3. *The class is sequentially offered drawings (photographs), in the context of solving the discussed task.*
4. *Individual brainstorming in silence. Students write down their ideas for each of the pictures (photos).*
5. *Several students read their ideas for the corresponding picture (photo).*
6. *The class discusses these ideas to find other options.*

The method can be applied to *functions, planimetry, stereometry, statistics*, and others.

3) Technique Concept map in mathematics.

Starting from the first lesson and throughout the entire period of passing the corresponding section, students gradually fill in a table on a separate sheet of A4 paper containing all the mathematical aspects of the concepts studied in this section.

The teacher will find examples of such maps in mathematics textbooks for lyceums published in the Republic of Moldova. [For example, 2]

By completing such maps for each section, students will create a Mathematical Atlas for the corresponding class at the end of the school year. Concept maps can be used in final lessons, during final revision, for other sections, during preparation for exams, etc.

II. When organizing group/team activities in the lesson, modern pedagogy and didactics of mathematics offer the mathematics teacher a wide range of methods and techniques. Including *simulation methods: Didactic game, Role play, Functional game, Business game; cooperative learning methods: Pair work, Rotational (changing) threes, Quad-pair learning, Carousel, T-group (skill training group), Synthesis of thoughts, Circle of ideas, Aquarium, General circle, Microphone, Unfinished ideas, Think - Work in pairs - Share, Brownian motion, Mosaic, Openwork saw, Situational modeling method (lesson-debate, business game, intellectual game, lesson-conference, lesson-staging, lesson-game or quest, lesson-research, lesson-journey, lesson-defense of project works and others); methods related to the technology of critical thinking Analysis, Synthesis, Generalization, Concretization, Abstraction, Comparison, Analogy, Induction method, Deductive method* (these methods are aimed at developing the ability to analyze, evaluate and synthesize information, form a deep understanding of mathematical concepts) and *methods related to the technology of vitagenic learning: Intrigue, Cloud tag, Scrapbooking, Eidoskonsepty, Intellect maps, Fishbone, Euler-Ven circles, Storytelling; methods related to the technology of problem-based and heuristic learning include: Problem-solving method, Immersion method, Decision tree. Senectics, Discussions, PRESS method, Take a stand, Debate, Quest, Web-quest and others.*

Let's consider the didactic specificity of some methods and techniques for group/team learning.

a) Association Matrix Technique.

An Association matrix is a table with two entries that allows you to represent various associations between mathematical concepts and their properties. With the help of such matrices, you can implement

a synthesis of the studied material within the section. The matrix can be compiled individually or as a result of group activity. The arrangement of such matrices can also be offered as a homework assignment. This technique is recommended for use in final lessons.

For example, regarding the topic Quadrilaterals, you can offer students the following Association Matrix to complete:

Quadrilateral	Elements	Signs	Properties	Image on the plane
Square				
Rectangle				
Parallelogram				
Rhombus				
Trapezoid				

b) The Four Corners technique helps develop students' interest in mathematics. The class is divided into four groups/teams, each of which is located in one of the four corners of the room (hence the name of the technique). The teacher formulates four tasks. Each student has the right to choose the task that interests him. In this way, four groups will be formed and group activity will be implemented to solve the selected task. For example, the teacher will offer 5-8 tasks to solve on the following topics: *a) Triangle; b) Parallelogram; c) Rhombus; d) Trapezium*. The solutions will be recorded on posters.

The teacher will allocate time in class to introduce students to the proposed solutions using the Gallery Tour method.

III. With an individual form of organizing educational activities, in combination with a frontal form, a mathematics teacher can also apply the "BBB" METHOD (*Batelle - Bilmappen - Brainwriting*).

a) 3-2-1 Technique. Before the end of the lesson, students are asked to individually write down on a piece of paper 3 terms (concepts) learned in the lesson, 2 ideas about what they would like to learn more about in the future, and 1 skill (one ability) that the student believes was formed (o) in the lesson. After studying the students' answers, the teacher will receive quick feedback on the effectiveness of the lesson.

b) The Association Matrix technique can also be used for individual activities. The student independently compiles a matrix for the section

c) The Project method is one of the most effective methods of forming competencies. The method is applicable both in the context of group activities and in the context of individual work. A variety of projects (*research, creative, informational, game, practice-oriented, STEM projects*) provide an opportunity to involve students in the study of various problems. Mathematics teachers have already gained sufficient experience in organizing and conducting project activities.

Conclusions. A teacher who wants to become a successful teacher must be diverse from lesson to lesson. Modern didactic technologies allow for the effective implementation of the appropriate diversity. A mathematics teacher must use modern innovative teaching technologies in lessons to form students' mathematical competence, including:

- *technologies for developing students' cognitive interest;*
- *methods/techniques for implementing cooperative learning and collective-group learning methods in mathematics lessons;*
- *methods/techniques for developing students' emotional intelligence;*
- *modern methods/techniques for developing students' creative thinking;*
- *methods/techniques for project-based learning during mathematics lessons, in particular, conducting STEM/STEAM/STREAM projects;*
- *methods/techniques for working through problem and discussion issues;*
- *situational modeling technologies (learning in the game);*
- *methods/techniques for developing students' creative activity.*

The teacher should create his own *Professional Treasury of teaching methods and techniques* in his subject. He should also master modern information and communication technologies, including technologies related to artificial intelligence [11]. Educational practice proves that the use of modern digital tools and resources makes learning more visual and interactive.

Thanks to exciting forms of work and teaching methods/techniques, students have a better attitude towards mathematics. The educational process is enriched, communication skills, logical and critical thinking are developed, and the ability to apply knowledge in practice is also revealed.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Корольський В.В., Т. Г. Крамаренко Т.Г., Семеріков С.О., Шокалюк С.В. (2011) Інформаційно-комунікаційні технології в системі управління підвищенням кваліфікації сучасного педагога. *Вісник Черкаського університету. Випуск 201. Частина I. Серія «Педагогічні науки».* с.61-69. Retrieved from: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/106660/1/Інформаційно-комунікаційні%20технології%20в%20системі%20управління%20підвищенням%20кваліфікації%20сучасного%20педагога.pdf>
- Матяш О.І., Матяш А.Д. (2025) Формування стереометричної культури майбутніх учителів математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 3, 67-76. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-67-76>
- Михайленко Л.Ф., Андрієвська М.Ю. (2024) Психологічні та педагогічні засади формування інформаційно-комунікативної компетентності школярів в умовах змішаного навчання. (2024). *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 56-69. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-56-69>
- Огієнко, О.І., Калюжна, Т.Г., Мільто, Л.О., Красильник, Ю.С., Радченко, Ю.Л., Годлевська, К.В. and Кобюк, Ю.М. (2015) *Інноваційні педагогічні технології*. Інститут педагогічної освіти та освіти дорослих НАПН України, м. Київ, Україна. 314с. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/705797/1/Посібник.pdf>
- Пометун О. І., Пироженко Л. В. (2004) Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. Київ : А. С. К. 192 с.
- Васильєва Д.В. (2017). Впровадження елементів STEM-освіти у навчання математики.. In Summer session “WEB-STEM-SCHOOLS – 2017” [Video]. YouTube. <https://youtu.be/HLN36eNYWks?si=sQNI0cODxtay278N>
- Achiri, I. (2013). Didactics of mathematics. Lectures. Chişinău: Prut International.
- Achiri, I., Ciobanu, V., Efros, P., Garit, V., Neagu, V., Poştaru, A., Prodan, N., Taragan, D., & Topală, A. (2023). *Matematică: Manual pentru clasa a XII-a*. Chişinău: Prut International.

- Besedin, B., & Kyrychenko, A. (2021). Organization of project activities in mathematics lessons as a way to develop students' cognitive competence. *Humanization of the Educational Process*, 1(100).
- Cherkasova, T. (2015). Methods of teaching mathematics in the structure of critical thinking lessons as a way to form students' competence.
- Dychkivska, I. M. (2015). *Innovative pedagogical technologies: A manual for students of higher education* (3rd ed., rev.). Kyiv: Akademvydav.
- Mykhailichenko, M. V., & Rudyk, Ya. M. (2016). *Educational technologies: A manual*. Kyiv: KOMPRINT.
- Ochkan, G. (Comp.). (2016). *Innovative teaching technologies: A methodical manual*. Vinnytsia: Knyga-Vega.

References

- Korolskyi, V. V., Kramarenko, T. H., Semerikov, S. O., & Shokaliuk, S. V. (2011). *Informatsiino-komunikatsiini tekhnolohii v systemi upravlinnia pidvyshchenniam kvalifikatsii suchasnoho pedahoha* [in Ukrainian] (*Information and communication technologies in the system of managing professional development of a modern teacher*). *Visnyk Cherkaskoho universytetu*, Issue 201, Part I, Series "Pedagogical Sciences", 61–69. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/106660/1/Інформаційно-комунікаційні%20технології%20в%20системі%20управління%20підвищенням%20кваліфікації%20сучасного%20педагога.pdf>
- Matiash, O. I., & Matiash, A. D. (2025). *Formuvannia stereometrychnoi kultury maibutnikh uchyteliv matematyky* [in Ukrainian] (*Formation of stereometric culture of future mathematics teachers*). *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 3, 67–76. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-67-76>
- Mykhailenko, L. F., & Andriiivska, M. Yu. (2024). *Psykhologichni ta pedahohichni zasady formuvannia informatsiino-komunikatyvnoi kompetentnosti shkoliariv v umovakh zmishanoho navchannia* [in Ukrainian] (*Psychological and pedagogical foundations of forming students' information and communication competence in blended learning*). *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 2, 56–69. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-56-69>
- Ohienko, O. I., Kaliuzhna, T. H., Milto, L. O., Krasyl'nyk, Yu. S., Radchenko, Yu. L., Hodlevska, K. V., & Kobiuk, Yu. M. (2015). *Innovatsiini pedahohichni tekhnolohii* [in Ukrainian] (*Innovative pedagogical technologies*). Institute of Pedagogical Education and Adult Education of the National Academy of Educational Sciences of Ukraine. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/705797/1/Посібник.pdf>
- Pometun, O. I., & Pyrozhenko, L. V. (2004). *Suchasnyi urok. Interaktyvni tekhnolohii navchannia* [in Ukrainian] (*Modern lesson. Interactive learning technologies*). A. S. K.
- Vasylieva, D. V. (2017). *Vprovadzhennia elementiv STEM-osvity u navchannia matematyky* [in Ukrainian] (*Implementation of STEM education elements in mathematics teaching*). In *Summer session "WEB-STEM-SCHOOLS - 2017"* [Video]. YouTube. <https://youtu.be/HLN36eNYWks>
- Achiri, I. (2013). *Didactics of mathematics. Lectures*. Prut International.
- Achiri, I., Ciobanu, V., Efros, P., Garit, V., Neagu, V., Poștaru, A., Prodan, N., Taragan, D., & Topală, A. (2023). *Matematică: Manual pentru clasa a XII-a*. Prut International.
- Besedin, B., & Kyrychenko, A. (2021). Organization of project activities in mathematics lessons as a way to develop students' cognitive competence. *Humanization of the Educational Process*, 1(100).
- Cherkasova, T. (2015). Methods of teaching mathematics in the structure of critical thinking lessons as a way to form students' competence.
- Dychkivska, I. M. (2015). *Innovative pedagogical technologies: A manual for students of higher education* (3rd ed., rev.). Akademvydav.
- Mykhailichenko, M. V., & Rudyk, Ya. M. (2016). *Educational technologies: A manual*. KOMPRINT.
- Ochkan, G. (Comp.). (2016). *Innovative teaching technologies: A methodical manual*. Knyha-Veha.

Отримано / Received 17.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 26.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 373.5.016:514.11(477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-28-50

Із чим найперше потрібно ознайомити учнів 7-го класу, розпочинаючи вивчення геометрії

Іван Ленчук

Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

E-mail: lench456@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

Анотація.

Геометрія в ЗЗСО мала б розпочинатися: із перерахування основних об'єктів дисципліни, з яких формують окремі фігури; основних відношень між такими об'єктами; виважено, однозначно сформульованих аксіом. Аксіоми є найпершими твердженнями, котрі вважаються суто геометричними і формулюються, як правило, виходячи з уявлень та вже чималенького досвіду учня. Подаються аксіоми системно, у вигляді несуперечливих, незалежних тверджень. До того ж, група аксіом у сукупності має бути повною системою, у формулюваннях яких використовують визначені заранню основні об'єкти і відношення між ними, а також похідні фігури. Основні об'єкти та основні відношення, в яких останні перебувають, ще називають основними поняттями. Ми посилаємося на підручник, який є класичним у справі подання аксіоматики, підручник О. В. Погорелова – відомого, видатного геометра-теоретика і прикладника держави Україна. Напрацьована автором аксіоматика найкоротша, а змістова складова розбудови геометрії значно простіша в порівнянні, наприклад, із аксіоматикою Д. Гільберта.

У статті підкреслено, що основним об'єктом дисципліни є фігура, скомпонована з точок, прямих і площин, а найважливішим засобом навчання – рисунок. Наголошено, що геометрія в цілому поділена на позиційну і метричну. Відмічається роль і місце кожного з цих підрозділів. Наводяться переконливі факти прикладного характеру предмету, його можливого застосування в різних галузях науки і техніки. Подається коротка довідка про засновника геометрії Евкліда й деякі інші історичні факти. Далі, з красочно виконаними рисунками та авторськими коментарями і притримуючись схеми О. В. Погорелова, наведено систему аксіом. На завершення викладу подається поняття теореми та її доведення, наведено приклад теореми, який теж узятो з вище згадуваного підручника. Наводиться, окрім того, більш деталізоване поняття аксіоми, а також означення чого небудь, чим часто користуються в геометрії.

Ключові слова: аксіома, означення, основні поняття, теорема, точка, пряма.

UDC 373.5.016:514.11(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-28-50

What are the first things that 7th grade students need to get acquainted with, beginning the study of geometry

Ivan Lenchuk

Ivan Franko Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine

E-mail: lench456@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

Abstract

Geometry in school should begin: with a list of the main objects of the discipline, from which individual figures are formed; the main relationships between such objects; well-balanced, clearly formulated axioms. Axioms are the very first statements that are considered purely geometric and are formulated, as a rule, based on the ideas and already considerable experience of the student. Axioms are presented systematically, in the form of non-contradictory, independent statements. In addition, the group of axioms as a whole have to be a complete system, in the formulations of which the basic objects and relations between them, as well as derived figures, are used. The basic objects and the basic relations in which the latter are located are also called basic concepts. We refer to the textbook, which is a classic in the presentation of axiomatics, the textbook of O. V. Pohorelov - a famous, outstanding geometer-theorist and applied scientist of Ukraine. The axiomatics developed by the author is the shortest, and the content component of the development of geometry is much simpler in comparison, for example, with the axiomatics of D. Hilbert.

In the article we emphasize that the main object of the discipline is a figure composed of points, lines and planes, and the most important means of teaching is a drawing. It is also emphasized that geometry as a whole is divided into positional and metric. The role and place of each of these subdivisions are noted. Convincing facts of the applied nature of the subject, its possible application in various fields of science and technology are presented. Brief information about the founder of geometry Euclid and some other historical facts is provided. Further, with colorfully executed drawings and author's comments and adhering to the scheme of O. V. Pohorelov, a system of axioms is given. At the end of the presentation, the concept of a theorem and its proof are presented, an example of a theorem is given, which is also taken from the above-mentioned textbook. In addition, a more detailed concept of an axiom is presented, as well as the definition of something that is often used in geometry.

Keywords: axiom, definition, basic concepts, theorem, point, line.

Постановка проблеми. Кожному, хто прагне досягти успіхів в опануванні геометрії, найперше варто мати на увазі, що *об'єктом* цієї специфічної дисципліни є *фігура*, а головним *засобом навчання* – якісний *рисунок* (Ленчук, Працьовитий, 2017, с. 26-27.).

Геометрія (від дав.-гр. $\gamma\eta$ – Земля і $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\epsilon}\omega$ – вимірюю; *вимірювання на землі*) – розділ математики, що є наукою про площинні й просторові форми, взаємне розташування і розміри фігур, логічно обумовлені відношення між ними та аргументовані узагальнення (доведення).

Геометрія поділяється на *позиційну*, котра вирішує питання взаємного розміщення і відшукування спільних елементів (інцидентів) фігур, та *метричну*, яка з'ясовує довжину відрізків, міру кутів, площу плоских фігур і поверхонь тощо. Позиційна геометрія цілком самодостатня й незалежна, а метрична геометрія без позиційної немислима.

Один із найбільш значимих французьких архітекторів ХХ ст. у галузі модернізму та функціоналізму Ле Корбюз'є в першій половині ХХ ст. висловив думку, що: «... до цього часу ми не жили в такий геометризований період. Усе навкруги – геометрія». Й справді, погляньте навколо себе: двері, вікно, стіл, картина мають форму прямокутника, горщик для квітів, димовідвідна труба котельні – конуса, футбольний м'яч, люстра чи глобус – кулі, дах будинку і комин на ньому – призматичні, єгипетські піраміди, автомобіль, літак, космічні апарати за формою і розмірами теж помітно «геометризовані» (рис. 1-4). Схожих об'єктів у природі й практичній діяльності людини безліч.



Рис. 1. Житловий будинок



Рис. 2. Renault Coupe Corbusier



Рис. 3. АН-225 «Мрія»



Рис. 4. Січ-1

Деякі геометричні фігури вам добре знайомі з дитинства, попередніх років навчання й власного життєвого досвіду, як-от: трикутник, квадрат, коло, ромб, куб, циліндр, куля, піраміда та ін. (рис. 5, 6).



Рис. 5

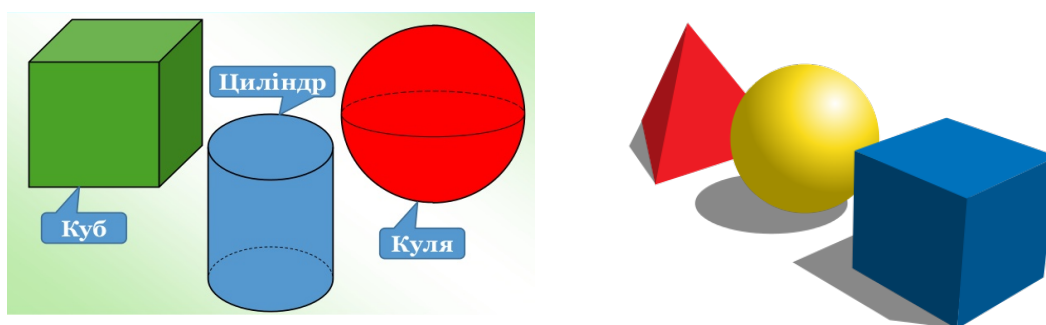


Рис. 6

Фігури, які вивчають у геометрії ЗЗСО, поділяють на площинні та просторові, котрі легко перерахувати. Усі вони складають багатовид фігур евклідової геометрії. Частину будь-якої геометричної фігури і об'єднання кількох фігур вважають геометричною фігурою. Плоска фігура (рис. 7) складена із трикутника та трьох квадратів, побудованих на сторонах трикутника, а кожен із квадратів, у свою чергу, вміщує по кілька трикутників й багатокутників. Уявлювану просторову фігуру (рис. 8) зображено із використанням чотирьох відрізків та двох рівних кіл (у формі еліпсів), що призвело до наочного представлення плоскою моделлю комбінації тіл конуса і циліндра.

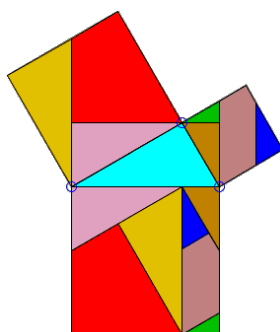


Рис. 7

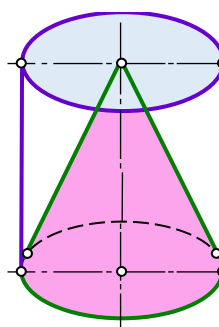


Рис. 8

Найпростішими фігурами (*основними об'єктами*) геометрії є *точка, пряма і площина*. Кожну ж геометричну фігуру уявляють складеною з точок.

Предмети життєдіяльності людини, які ми можемо споглядати, різняться між собою не лише формою і розмірами. Вони виготовлені з різного матеріалу, мають власну вагу,

фіксовану якість обробки поверхонь, окрас, цільове призначення та інші спільні й відмінні характеристики. В геометрії, як уже відомо, ставляться завдання встановлення *взаємного розміщення* фігур та з'ясування їх *форми і розмірів*. Причому, природні об'єкти, які оточують нас, не містять прогнозованих форм, їх зримо вирізняє розум, уявлення. Спорідненим за формою елементам різних предметів ставлять у відповідність певні закономірні фігури, а всякий виріб, що проектується конструктором із скінченного числа фахово скомпонованих й грамотно, раціонально розміщених геометричних фігур, реально матеріалізується (див. рис. 1-4).

Геометричні фігури, закономірності, що їм властиві, широко використовуються на практиці. Найперша з наук – *геометрія* – прикладна дисципліна. Не маючи геометричних знань, умінь і навичок *не можна виконати жодне креслення, визначити кількість рулонів шпалеру для обклеювання кімнат, збудувати будинок, виготовити звичайні стіл і стілець, сконструювати автомобіль, літак чи космічний корабель, прокласти траєкторію руху на мапі, написати картину, навіть у створенні ландшафту ніяк не обійтися без цієї стародавньої науки*. Нею змушені володіти спеціалісти всяких професій: інженери і техніки, будівельники, архітектори, столяри, художники, геологи, ... та, врешті, робітники. Геометрія розвиває розум особистості й потрібна кожному, хто у власному бутті забажає здобути стабільні компетенції творчого мислення.



Евклід
(III ст. до н. е.)

Зважаючи на сказане, слід прийняти до уваги, що геометрія в житті людини відіграє не останню роль. Отож виходить, що це наука, яку варто ретельно опановувати.

Геометрія, системне знайомство з якою розпочинаємо, називається *евклідовою*, на честь давньогрецького вченого Евкліда, котрий першим створив логічно виважений посібник з математики (у 13-ти книгах) під назвою «Початки». Понад 2000 років геометрію вивчали за цими книгами.

Геометрія вміщує два розділи: *планіметрію* (від лат. *planum* – площа), де встановлюються властивості фігур на площині, та *стереометрію* (від гр. *stereos* – просторовий), в якому вивчаються властивості фігур у просторі.

Традиційно починають із планіметрії.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Ми в даній праці не будемо вдаватися до ретельного аналізу шкільних підручників, адже їх надто багато. Зауважимо лише, що всі автори планіметрії (в тій чи іншій мірі) користуються аксіоматикою, напрацьованою О. В. Погореловим (Погорелов, 1998, с. 3-18). Такий стан речей пояснюється надто просто: 1) система аксіом найкоротша; 2) розбудова геометрії найпростіша.

Мета статті. Нам уявляється, що вчитель математики, роблячи вступ до планіметрії, не надає особливої уваги принципам розбудови дисципліни на аксіоматичній основі, не

висвітлює учням тонкощів, які справді існують у такому важливому питанні, адже від цього залежить бажання зрозуміти предмет й із задоволенням його вивчати. Отже, ми ставимо за мету подати в належному форматі матеріал, який стосується *аксіом* планіметрії, орієнтуючись виключно на «забутий» підручник О. В. Погорелова.

Виклад основного матеріалу. Точки, прямі і площини. Цілком природно, що роль *основних об'єктів* у планіметрії виконують *точка* і *пряма* лінія. У стереометрії додається *площина*. Точки за домовленістю позначають на рисунках і в текстах великими буквами латинського алфавіту $A, B, C, D, \dots$, а прямі – малими буквами $a, b, c, d, \dots$.

Насправді точки, прямі та площини – об'єкти нереальні (абстрактні), таких у природі не існує. Отже, й описати, означити їх неможливо. Проте адаптувати ці найпростіші фігури до уявлюваних розумом понять зовсім нескладно. Покладіть долоню руки на поверхню письмового столу, і ви «фізично поспілкуєтесь» із площиною; проведіть по ребру стільниці, й ваша рука ковзатиме вздовж прямої лінії; нарешті, доторкніться до куточка стільниці, ви відчуєте точковий укол (Ленчук, 2015, с. 22-23).

Не секрет, що точка і пряма на площині можуть взаємно розташовуватися по різному. До того ж, усяка пряма чи площина вміщує безліч точок.

Бачимо (рис. 9) точку A і пряму a . Уявлення про точку A дає слід від гостро заточеного олівця (для ліпшого вирізнення оком – у зірчатому кружечку). Пряма a є нескінченною, а на рисунках зображується своєю частиною, хоч у уявленнях потрібно її вважати продовженою необмежено в обидва боки.

У якому розташуванні знаходяться точка A і пряма a ? Очевидно, що точка A *лежить поза* прямою a . Ще говорять: точка *не належить* прямій.

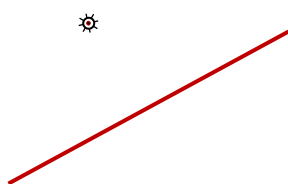


Рис. 9

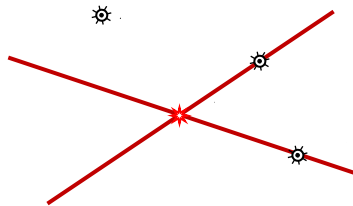


Рис. 10

А зараз погляньте на рисунок 10. Ви бачите прямі a, b та точки A, B, C і D . Міркуючи аналогічно, стверджуємо, що точка A *не належить* жодній із прямих. Наразі точки D і B *лежать* на прямій a , а точки D і C – на прямій b . Можна говорити й по іншому, що пряма b *проходить* через точки D і C , а пряма a – через точки D і B . Окрім того, точка B *належить* прямій a , проте *не належить* прямій b , а точка C – *не належить* прямій a . Бачимо, що точка D *належить* обом заданим прямим, тобто a і b *перетинаються* в точці D . Таку точку називають *точкою перетину* прямих a і b .

Звертаємо увагу на надважливий факт: *завдячуючи якісним рисункам*, нами зримо зчитано з них й описано словами результати взаємного розміщення точок і прямих на площині.

Із наведених прикладів неважко здогадатися, що для вирішення позиційних питань з точками і прямими недостатньо ввести лише поняття найпростіших геометричних фігур площини. В якості *основного*, до того ж, вкрай потрібно ввести *відношення «належати» («лежати на»)*, в якому точки і прямі можуть перебувати.

«Належність», «неналежність», а також «перетин» найпростіших об'єктів у геометрії прийнято записувати символічно відповідно так: $B \in a$, $A \notin b$, $D = a \cap b$.

Пряму можна позначати двома точками, які лежать на ній. Наприклад, пряму a (рис. 10) можна позначити DB , а пряму b – DC .

Ви маєте власний досвід побудови лінійкою й олівцем прямої лінії c , яка проходить через дві дані точки A і B (рис. 11). Скільки прямих можна провести таким способом через дві точки? Проведемо подумки експеримент. Уявіть собі, що під стелею кімнати на протилежних її стінах забито два цвяшки A і B «точкових розмірів», а між ними цупко натягнуто тонку нитку, котра образно символізує пряму лінію c . Якщо від одного цвяшка до іншого так само цупко натягнути ще одну нитку, чи у змозі буде око стороннього спостерігача розрізнити ці дві нитки? Напевно, що ні, адже обидві нитки зливаються в одну.

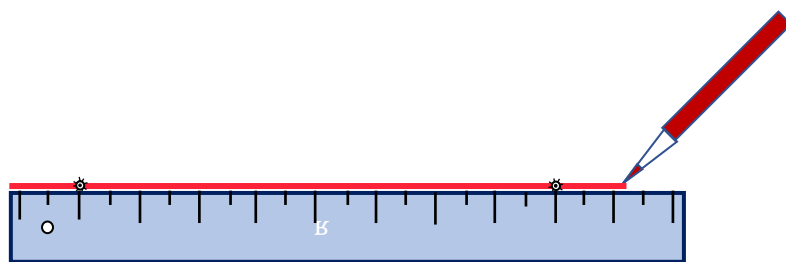


Рис. 11

Наведені вельми прості міркування стосовно точок і прямих площини дозволяють конкретизувати і явно сформулювати *основні властивості відношення «належати»*:

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму лінію і лише одну.

Повернемося до рисунка 10, на якому прямі a і b перетинаються в одній точці D . У людини, котра навчена міркувати за законами логіки, висувати гіпотези та їх перевіряти природно з'являється запитання, а *чи не можуть ці прямі перетинатися у двох різних точках?* Строге обґрунтування відповіді на таке запитання якраз і дається шляхом посилання на щойно записані основні властивості відношення «належати».

Припустимо, що дані прямі справді мають дві відмінні точки перетину. Тоді через ці точки проходять дві різні прямі. Однак такий висновок нелогічний, оскільки це суперечить

другій основній властивості (ОВ-II) відношення «належати»: через дві точки можна провести лише одну пряму лінію. Отже, дві прямі не можуть перетинатися у двох точках.

Окремо підкреслимо, що зараз введено найперші з основних відношень. Проте варто пам'ятати, що *основні об'єкти* та *основні відношення* між ними, взяті разом, називають *основними поняттями* евклідової геометрії.

Відрізок, промінь, півплощина, кут. Точки, прямі й площини із задумом названо найпростішими фігурами (основними об'єктами) геометрії. По-перше, хоч вони й неозначувані, проте цілком уявлювані розумом і, по-друге, з них можна скомпонувати багато інших фігур, котрі називають *похідними*. Основні об'єкти є немовби будівельним матеріалом («цеглинками») в конструктивній розбудові багатовиду фігур усієї геометричної структури. До речі, оскільки пряма складена з точок, то будь-яку похідну фігуру (зокрема, криву лінію чи поверхню) компонують із точок, прямих і кривих.

Уважно огляньте рисунок 12, на якому зображено пряму a та три точки A , B і C , котрі належать цій прямій. Що можна сказати про взаємне розташування трьох точок на прямій a ? Точка B *лежить між* точками A і C . Вона *розділяє* точки A і C . По іншому ще говорять, що точки A і C *лежать по різні боки* від точки B . Точки A і B *лежать з одного боку* від точки C , вони не розділяються точкою A . Так само точки B і C *лежать з одного боку* від точки A , яка також не розділяє пару точок B і C .

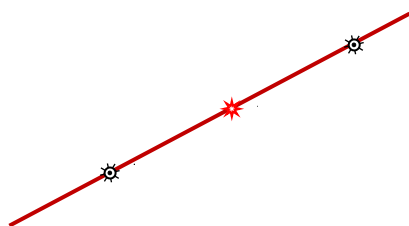


Рис. 12

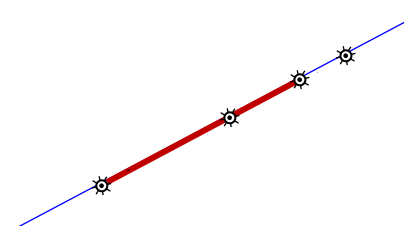


Рис. 13

Таким чином, у позиційній геометрії суть важливим є ще одне *відношення*, яке стосується точок і прямих. Його також зараховують до розряду *основних* й умовно описують і озвучують словами «*лежати між*». Уважно поглянувши на рисунок 12, нескладно сформулювати *основну властивість* відношення «*лежати між*»:

III. Із трьох точок прямої одна і лише одна лежить між двома іншими.

Важливо, що із введеними двома основними відношеннями тісно пов'язані означення найперших *похідних* фігур, без яких геометрію важко уявити.

Подивіться на рисунок 13. На ньому між двома довільними точками A і B прямої b її частину виділено жирною лінією. Так, практично, можна зримо змодельовати відрізок AB . Отже, тепер слід ввести *означення* відрізка.

Відрізком називається частина прямої, яка складена з усіх точок цієї прямої, що *лежать між двома даними її точками*. Точки, котрі обмежують відрізок, називаються його кінцями.

Відрізок позначають, записуючи його кінці. Говорячи або пишучи «відрізок AB », мають на увазі відрізок з кінцями в точках A і B , які теж належать відрізку.

На рисунку 13 точка P лежить між точками A і B , тому вона належить відрізку AB і називається його *внутрішньою* точкою. Точка Q не лежить між точками A і B , тому вона є точкою прямої b і не належить відрізку AB .

Тепер проведемо деяку пряму a і візьмемо на ній довільну точку O (рис. 14). Ця точка розбиває пряму на дві частини, кожній з яких належить безліч точок. Якщо розглянути точку O і всі точки прямої, котрі розташовані з одного боку від неї (точка A – одна з них), то ми отримаємо напівпряму OA , котру ще називають *променем*. Отож:

Променем (напівпрямую) називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки, яку називають початковою точкою (початком) променя.

Різні промені однієї і тієї ж прямої називаються доповняльними. Промені OA і OB (рис. 14) – доповнюють один одного до прямої a .

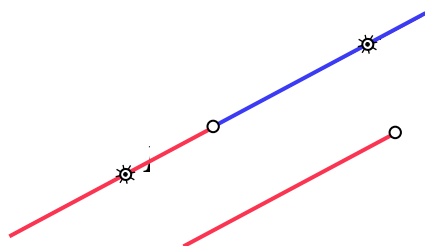


Рис. 14

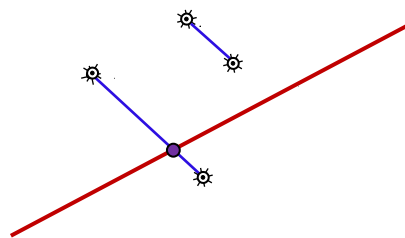


Рис. 15

Промені (як і прямі) можна позначати або малими латинськими буквами, або двома точками: початковою і ще якою-небудь точкою, яка належить променю. Початкову точку ставлять на першому місці. Наприклад, на рисунку промінь OA зображений синім кольором, а промінь OB (Oa) – червоним.

А зараз проаналізуйте рисунок 15. Пряма a розбиває (розмежовує) площину на дві частини (кажуть «на два куски»), які називають півплощинами. Півплощина без точок прямої a називається *відкритою*, а з точками розмежувальної прямої a – *закритою*. Основні властивості розміщення точок на площині відносно зображеної прямої надто добре зрозумілі з рисунка:

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини. Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній із півплощин, то відрізок не перетинає пряму. Якщо ж кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

На рисунку 15 відрізок PQ перетинає пряму a в точці X ($X = a \cap PQ$), а відрізок AB – не перетинає.

Кутом називається фігура, яка складається з точки – вершини кута – і двох різних променів, котрі виходять із цієї точки, – сторін кута.

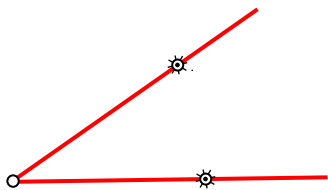


Рис. 16

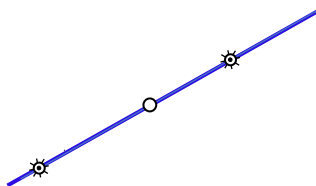


Рис. 17

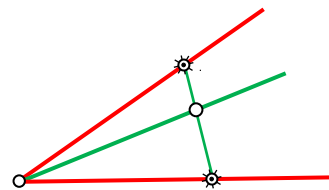


Рис. 18

Ви бачите кут (рис. 16) з вершиною O та сторонами a і b . Кут позначають або його вершиною, або сторонами, або трьома точками: вершиною і двома точками, які лежать на сторонах кута (точки на сторонах кута зображати не обов'язково). Слово «кут» за потреби замінюють умовним знаком $\angle$. Отже, з використанням цього знаку, кут на рисунку 16 можна символічно позначити трьома способами: $\angle O$, $\angle(a, b)$ і $\angle AOB$. У останньому позначенні кута буква, яка стосується його вершини, ставиться всередині. Іноді кути зручно позначати малими буквами грецького алфавіту α , β , δ , γ і т. ін. У цьому випадку перед буквами умовний знак кута ($\angle$) не проставляють.

Якщо сторони кута доповнюють одна іншу до прямої, то кут називають розгорнутим. Розгорнутий кут (рис. 17) зображено з вершиною O та сторонами OA і OB .

Промінь, який виходить з вершини кута й перетинає будь-який відрізок із кінцями на його сторонах, будемо називати таким, що *проходить (лежить) між* сторонами даного кута. Промінь c (рис. 18) проходить між сторонами кута AOB , оскільки він бере початок у точці O – вершині кута AOB – і перетинає відрізок AB у точці X ($X = c \cap AB$), який має кінці на його сторонах.

Для розгорнутого кута вважають, що довільний промінь, який виходить з його вершини і не зливається з жодною із сторін, проходить між сторонами кута.

Відрізок, промінь і кут – найперші похідні геометричні фігури.

Вимірювання відрізків і кутів. Видатний український математик (геометр-теоретик і прикладник) академік Погорелов О. В. (1919-2002 рр.) запропонував доповнити список уже описаних вище *основних позиційних відношень* геометрії двома *метричними* відношеннями, які добре розуміє кожна пересічна людина: *довжина* (стосується відрізків) і *градусна міра* (стосується кутів). Саме це нововведення *суттєво спростило* викладення фактичного матеріалу в розбудові евклідової геометрії.



Меморіальна дошка на
фасаді ХНУ імені В.Н. Каразіна

Практично, вимірюючи відрізки, застосовують різні інструменти. Найпростішим засобом є лінійка з поділками. Довжина відрізка AB (рис. 19) рівна 16 см, відрізка AC – 10 см, відрізка CB – 6 см. Немає жодних сумнівів, що довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин двох відрізків AC і CB . До того ж (рис 20), бачимо як за допомогою лінійки, що проградуєрована в дюймах (1 дюйм = 2, 54 см), можна виміряти довжину металевого ланцюжка.

Очевидно, що звідси отримуємо таку *основну властивість* вимірювання відрізків:

V. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

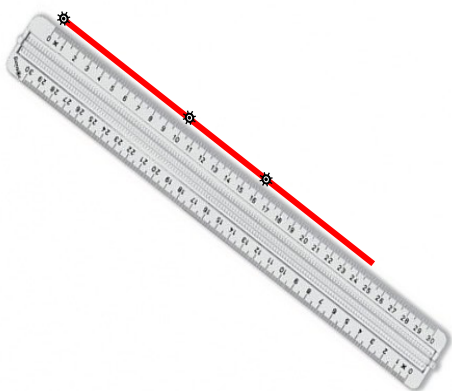


Рис. 19

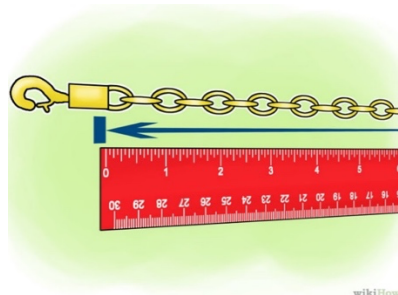


Рис. 20

Це означає, що оперуючи відрізком AB , ми можемо вибрати на ньому довільну точку C і, при цьому, довжина відрізка AB дорівнюватиме сумі довжин відрізків AC і CB . Довжину відрізка AB називають також відстанню між точками A і B .

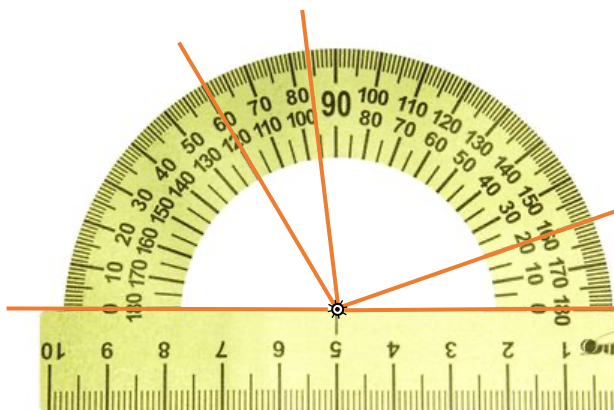


Рис. 21



Рис. 22

Кути, як відомо, вимірюються у градусах з допомогою транспортира. Одиничний кут мірою в один градус (позначають: 1°) отримали поділивши розгорнутий кут на 180 рівних

частин. Тому градусна міра розгорнутого кута AOB дорівнює 180° (рис. 21). Для більш точного вимірювання кутів градуси поділяють на хвилини, а хвилини – на секунди. Хвилиною ($1'$) називають $1/60$ частину градуса, а секундою ($1''$) – $1/60$ частину хвилини. Наприклад, на рисунку 21 кут BOD приблизно дорівнює $95^\circ 55'$.

Дивлячись на шкалу транспортира, неважко помітити, що: $\angle BOC = 120^\circ$. Промінь OK проходить між сторонами кута BOC , $\angle BOK = 20^\circ$, а $\angle KOC = 100^\circ$. Не може бути сумнівів, що $\angle BOC = \angle BOK + \angle KOC = 20^\circ + 100^\circ = 120^\circ$.

Фотокартка (рис. 22) зображує транспортер, виготовлений спеціально для використання у промислових цілях.

Основними властивостями вимірювання кутів називатимемо такі:

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Це означає, що виконуючи операції з накресленим кутом BOC ми можемо проводити між його сторонами будь-який промінь OK і градусна міра кута BOC буде рівна сумі градусних мір кутів BOK й KOC .

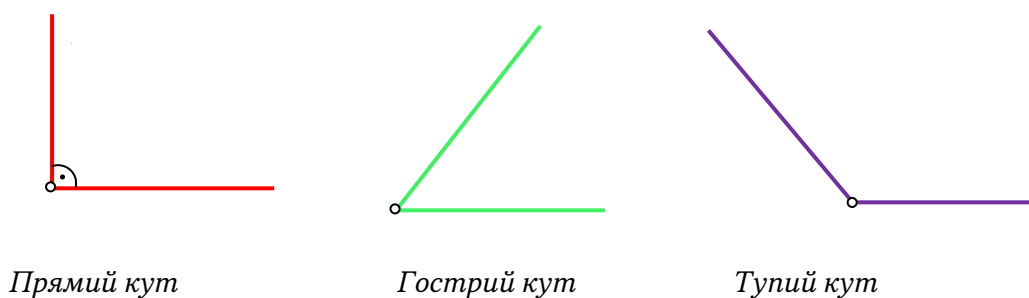


Рис. 23

Додамо, що кут називається *прямим*, якщо його градусна міра («...», коли він дорівнює») 90° ; *гострим*, якщо він має градусну міру меншу 90° , і *тупим*, якщо градусна міра кута більша 90° й менша 180° (рис. 23).

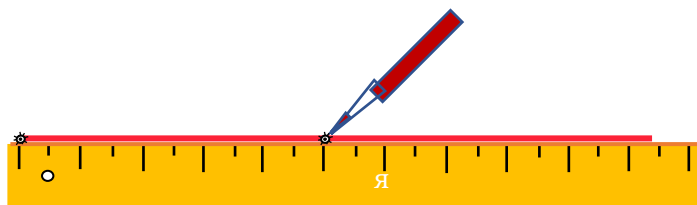


Рис. 24

Відкладання відрізків і кутів. На рисунку 24 показано, як за допомогою лінійки на промені a від його початкової точки A відкладають відрізок даної довжини ($AB = 5$ см).

На рисунку 25 промінь OA , разом зі своїм доповненням, розбиває площину на дві півплощини. Ви бачите, як за допомогою транспортира відкладають від променя OA у вибрану півплощину кут заданої градусної міри ($\angle AOB = 60^\circ$).

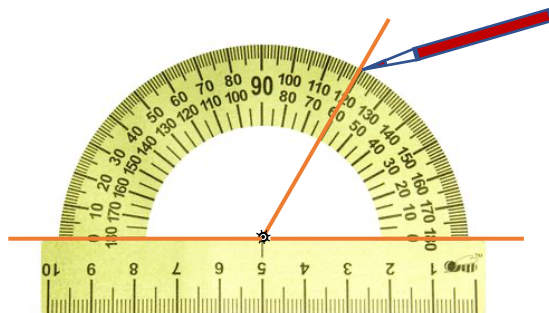


Рис. 25

Такі прості, добре знайомі кожному із власного досвіду практичні операції з олівцем, лінійкою та транспортиром, спонукають нас до формулювання *основних властивостей* відкладання відрізків і кутів:

VII. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і лише один.

VIII. Від будь-якого променя у вибрану півплощину можна відкласти кут даної градусної міри, меншої 180° , і лише один.



Рис. 26

Зауважимо, що стародавні єгиптяни для вимірювань на землі користувалися досить примітивними (як на наш розсуд) інструментами (рис. 26): палицею, тінню, мотузкою, камінцем і, як не дивно, *сажнем* (польовим циркулем, розхил якого становить 213,36 см). Сажень у господарюванні на селі має прадавнє застосування й сьогодні.

У теперішніх умовах, у різних галузях людської діяльності, використовують набагато досконаліші інструменти для вимірювань як лінійних, так і градусних величин. Кожному відомі *масштабна лінійка*, якою користуються креслярі, *складний метр* вельми потрібний столяру, *клеюнчастий сантиметр* – кравцю, а *рулетка* – будівельнику (рис. 27, 28).



Рис. 27

Є багато інших, інструментів. Наприклад, у машинобудівній галузі для замірювання діаметрів циліндричних деталей використовують *кронциркулі* й *нутроміри* (рис. 29). Більш точними є *штангенциркулі* та *мікрометри* (зокрема, електронні, рис. 30).



Рис. 28

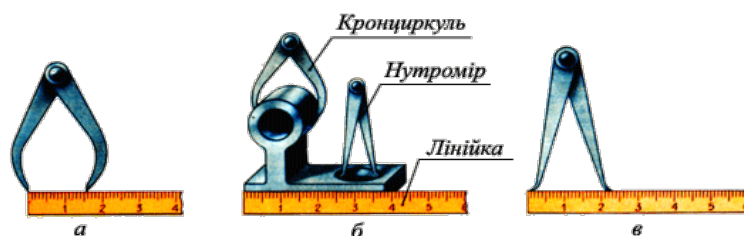


Рис. 29



Рис. 30

Що ж стосується кутових вимірювань, то до найбільш розповсюджених приладів-інструментів, котрі мають неабияке практичне впровадження, слід віднести вже відомий вам *транспортир* (див. рис. 21, 22), а також *астролябію* і *теодоліт* (рис. 31).



Рис. 31

Астролябія (лат. *astron* – зірка і *labe* – схоплювання) – кутовимірювальний прилад, яким до XVIII ст. користувались визначаючи широту і довготу в астрономії та навігації.

Призмova астролябія – сучасний прилад для визначення географічних координат.

Астролябія це давній астрономічний інструмент, створений для вирішення задач, пов'язаних з розрахунком часу доби і позиції Сонця та зірок на небосхилі. Існувало декілька типів астролябій. І досі користуються найпопулярнішим видом – планісферною астролябією, на якій небесна сфера проєкціюється на площину екватора.

Теодоліт (гр. *theomai* – дивлюсь і *dolichos* – довгий) – маркшейдерсько-геодезичний¹ прилад для вимірювання горизонтальних і вертикальних кутів на місцевості. Застосовують теодоліт при виконанні геодезичних, маркшейдерських, астрономічних та інших робіт.

Найперші геометричні поняття «довжина» і «градусна міра» мають надто важливі втілення в реальних, діючих вимірювальних інструментах, які відіграють помітну роль у життєдіяльності сучасної людини.

Трикутник. Перед тим, як навести означення трикутника, нагадаємо, що метричні відношення «довжина» і «градусна міра» включені до розряду основних, неозначуваних понять. Поняття «відрізок» і «кут» – похідні, означувані. При цьому:

Два відрізки називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину.

Два кути називаються рівними, якщо вони мають однакову градусну міру (інколи говорять «... однакову кутову міру в градусах»).

Трикутником називається фігура, яка складається із трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються вершинами трикутника, а відрізки – його сторонами.

На рисунку 32 зображено трикутник із вершинами A , B , C і сторонами AB , BC , AC . Трикутник позначають його вершинами. Замість слова «трикутник» часто вживають знак-символ Δ . Наприклад, трикутник (рис. 32) у символічному запису дозволяється позначити так: ΔABC .

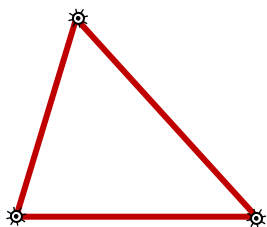


Рис. 32

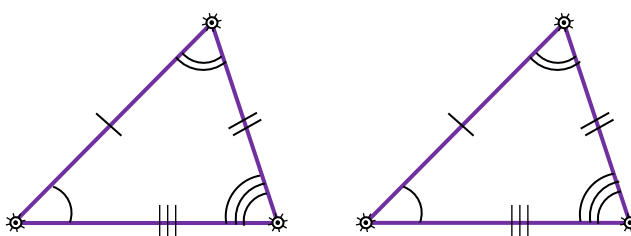


Рис. 33

¹ Маркшейдер – гірничий інженер або технік. Його головним завданням є організація будівництва підземних (і наземних) споруд, з урахуванням правил технічної експлуатації.

Сторони трикутника можна також позначати малими буквами латинського алфавіту a, b, c . Цим зручно скористатися при висвітленні деяких теоретичних питань геометрії та, особливо, при розв'язуванні задач з буквеними виразами, коли довжину сторін трикутника доводиться задавати буквами: $AB = c, BC = a, AC = b$. Тут корисно дотримуватися правила: проти кута A лежить сторона a , проти кута B – сторона b , а проти кута C – сторона c .

Кутом трикутника ABC при вершині A називається кут, утворений променями AB і AC . Аналогічно означають кути з вершинами B і C .

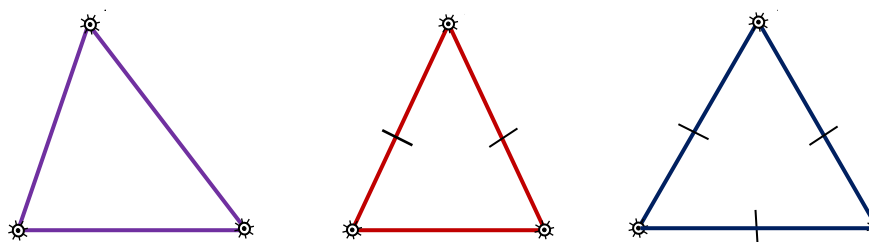
Трикутники називаються рівними, якщо в них відповідні сторони і відповідні кути рівні. При цьому відповідні кути мають лежати проти відповідних сторін.

На рисунку 33 зображені два рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. У них, згідно означенню: $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$.

З метою кращого «бачення» рисунка у візуальному прочитанні, його унаочнюють: рівні відрізки відмічають однією, двома або трьома рисками, а рівні кути – однією, двома або трьома дужками.

Для позначення рівності трикутників у запису користуються звичним знаком рівності $=$. Приміром, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ прочитується так: «Трикутник ABC рівний трикутнику $A_1B_1C_1$ ». Тут порядок розташування в запису вершин трикутника має принципове значення, а саме: рівність $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означає, що $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, \dots, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \dots$. Рівність $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ означає зовсім інше: $AB = B_1A_1, BC = A_1C_1, \dots, \angle A = \angle B_1, \angle B = \angle A_1, \dots$. Можна помітити, що рівність відповідних сторін і кутів зримо зчитується безпосередньо із символічного запису: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, чим на практиці зручно користуватися.

Трикутники, залежно від довжини сторін (рис. 34) та міри кутів у градусах (рис. 35), поділяють відповідно на такі види:



Різносторонній

Рівнобедрений

Рівносторонній

Рис. 34

- *різносторонні*, в них усі сторони різної довжини;
- *рівнобедрені*, в них дві сторони рівні;
- *рівносторонні*, в них усі сторони мають однакову довжину; – *прямокутні*, в них один із кутів прямий;
- *гострокутні*, в них усі кути гострі;

– *тупокутні*, в них один із кутів тупий.

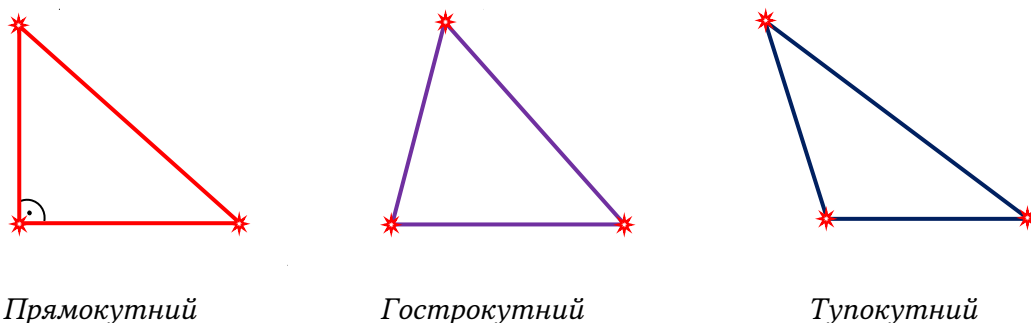


Рис. 35

Додамо, що в рівнобедреному трикутнику рівні сторони ($EF = EG$) називають *бічними*, а третю сторону (GF) – *основною*. Сторони (AC і BC) прямокутного трикутника, які утворюють прямий кут, називають *катетами* (від гр. *κάθετος* – висок, перпендикуляр), а сторону (AB), що лежить навпроти прямого кута, – *гіпотенузою* (від гр. *ὑποτείνουσα* – та, що стягує).

Існування трикутника, що дорівнює даному. Нехай дано (накреслено) трикутник ABC і деінде промінь a (рис. 36, а). Не змінюючи форми і розмірів трикутника ABC , перемістимо його так, щоб вершина A збіглася з початком A_1 променя a , вершина B попала на промінь a , а вершина C розмістилася у вибраній півплощині відносно променя a (разом із доповненням). Вершини заданого трикутника в його новому розташуванні позначимо A_1, B_1, C_1 (рис. 36, б).

Очевидно, що трикутник $A_1B_1C_1$ рівний трикутнику ABC .

Існування трикутника $A_1B_1C_1$, який дорівнює заданому трикутнику ABC і розміщений зазначеним способом відносно заданого променя a , теж відносять до *основних властивостей* найпростіших (похідних) фігур. Ця властивість формулюється так:

IX. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в даному розміщенні відносно даного променя.

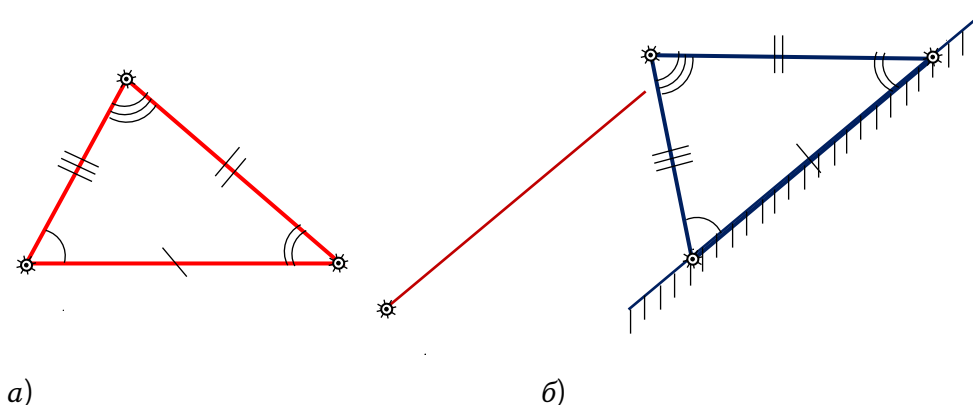


Рис. 36

Окремо зауважимо, що операція моделювання трикутника $A_1B_1C_1$, рівного трикутнику ABC у так встановленому розташуванні, тісно переплітається з основними властивостями

відкладання відрізків (ОВ-VII) і кутів (ОВ-VIII), адже $A_1B_1 = AB$, $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, а $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. По іншому, вже зараз, маючи у власному розпорядженні лінійку і транспортир, можна інтуїтивно й візуально – способом *замірювань і відкладання* – досить точно побудувати $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$:

1. На промені a від точки A_1 відкладайте відрізок A_1B_1 , рівний відрізку AB .
2. Від променя a у вибрану півплощину відкладайте $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$.
3. Від променя B_1A_1 у ту ж півплощину відкладайте $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.
4. Зафіксуйте точку C_1 перетину променів A_1C_1 і B_1C_1 .

Трикутник $A_1B_1C_1$, рівний трикутнику ABC , побудовано.

Паралельні прямі. Дві прямі на площині, у взаємному розташуванні (позиційно), можуть мати або одну єдину спільну точку (*перетинатися*), або не мати спільних точок (не перетинатися).

Кажуть, що кожна із двох прямих, які не мають спільних точок, розташована відносно іншої прямої *паралельно* (гр. *paralelos* – що проходить поряд).

Отже, *дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються*.

Іноді, при злитті двох прямих, зручно вважати це частинним випадком паралельності (позначають: $a \equiv b$). Тут $\equiv$ – знак-символ, що означає злиття двох геометричних фігур.

Дві прямі a і c (рис. 37) перетинаються в тоці A : $A = a \cap c$ та прямі a і b паралельні одна іншій. Паралельність прямих символічно позначають знаком $\parallel$. Запис $a \parallel b$ (чи $AB \parallel CD$) потрібно читати і озвучувати так: «Пряма a (AB) паралельна прямій b (CD)». Відрізки та промені, які лежать на паралельних прямих, теж вважають паралельними.

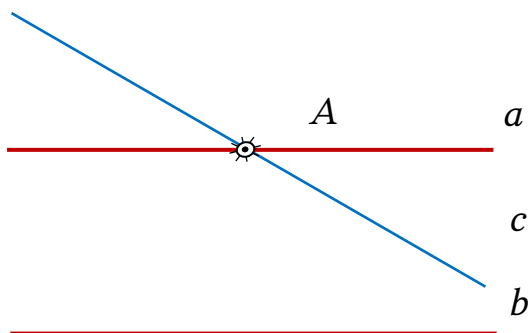


Рис. 37

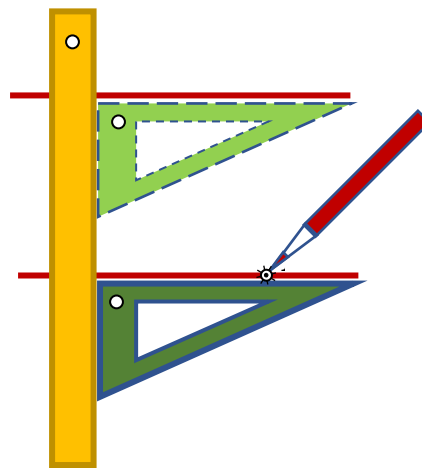


Рис. 38

Основну властивість паралельних прямих слід формулювати так:

Х. Через точку, котра не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Побудову прямої b , що проходить через дану точку B , паралельно даній прямій a , зручно виконувати за допомогою лінійки і прямокутного трикутника (рис. 38).

Твердження, які випливають із сформульованої аксіоми або доведеної теореми, називають їх *наслідками*. Наслідки обов'язково доводять, використовуючи базове твердження й уже відомі істинні факти.

Наслідок. Якщо пряма перетинає одну із двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу пряму.

Справді, нехай a і b – паралельні прямі, а пряма c перетинає пряму a в деякій точці A (рис. 38). Коли б пряма c не перетинала пряму b , то через точку A проходило б дві прямі (a і c), які не перетинають пряму b . Це неможливо за властивістю паралельних прямих (ОВ-Х). Тому пряма c , яка перетинає пряму a , обов'язково перетинає й пряму b , паралельну прямій a .

Теорема і доведення. У виваженій, строгій розбудові евклідової геометрії – дисципліни, що має науковий характер, будь-яке твердження обґрунтовується шляхом *логічних міркувань*, за винятком основних властивостей (І-Х), неозначуваних відношень між основними об'єктами та деякими найпростішими (зокрема, похідними) фігурами. Такі логічні міркування називають *доведенням*. Саме твердження, котре підлягає доведенню, називають *теоремою*.

Теорема (давньо-гр. *θεώρημα* – доведення; вигляд, погляд; подання, положення).

Міркуючи логічно, з посиланням на ОВ-ІІ, ми вже мали змогу довести, що прямі не можуть перетинатися у двох різних точках, не називаючи це теоремою. Наведемо ще один приклад доведення, тепер уже у формі теореми.

Теорема 1.1 (за О. В. Погореловим). Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає лише одну з двох інших сторін.

Доведення. Нехай пряма a не проходить через жодну з вершин трикутника ABC і перетинає його сторону AB у деякій точці P (рис. 39).

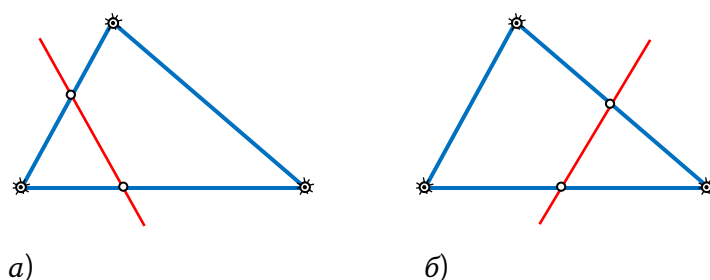


Рис. 39

Логіка міркувань надто проста. Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Точки A і B лежать у різних півплощинах, адже відрізок AB перетинає пряму a (ОВ - ІV). Точка C лежить в одній із цих двох півплощин.

Якщо точка C лежить в одній півплощині з точкою B (рис. 39, а), то відрізок BC не перетинає пряму a , а відрізок AC перетинає цю пряму, адже точки A і C лежать у різних півплощинах.

Якщо точка C лежить у одній півплощині з точкою A (рис. 39, б), то відрізок BC перетинає пряму a , а відрізок AC – не перетинає.

У обох можливих випадках пряма a перетинає лише одну із двох інших сторін AC чи BC трикутника ABC ($P = a \cap AB$ – за умовою). *Доведення завершено.*

Формулювання теореми завжди складається із двох частин, які записують символічно біля якісно виконаного рисунка.

У одній частині, котра називається *умовою* теореми, говориться про те, що дано: трикутник ABC ($\triangle ABC$), пряму a (a), яка не проходить через жодну з вершин трикутника і перетинає одну з його сторін у деякій точці P ($a \cap AB = P$). У другій частині, що називається *висновком* теореми, говориться про те, що потрібно довести: пряма a перетинає тільки одну із двох інших сторін заданого трикутника ($a \cap AC = Q$ або $a \cap BC = F$, рис. 39).

У навчальному матеріалі систематичного курсу геометрії ознайомленню учнів з теоремами та їх доведенням відведено помітне місце. Крім теорем у курсі геометрії 7 класу передбачено значну кількість задач на доведення, які у класичних підручниках геометрії (О. В. Погорелова) відігравали роль теорем. Доведення, як один із надто важливих етапів на шляху до результату, виконують також у процесі розв'язання задач на побудову.

Які ж вимоги програми до математичної підготовки учня, що стосуються теорем та їх доведення? На рівні обов'язкового мінімуму програма вимагає розв'язувати типові задачі на обчислення, доведення і побудову, проводити доказові логічні міркування (доведення), спираючись на відомі теоретичні факти.

Чи повинні учні знати доведення всіх теорем, передбачених програмою курсу? Тут варто дотримуватися прописної істини: *не суть важливо пам'ятати доведення тієї чи іншої теореми, потрібно знати методи доведення і вміти користуватися ними*. Під час вивчення певної теми на рівні обов'язкових результатів навчання ви повинні *знати* теорему як факт і, за потреби, відтворити основні етапи доведення, міркуючи логічно. Більш важливо здобути стабільні вміння й навички застосовування теорем до будь-яких задач, зокрема, практичного (прикладного) характеру і змісту.

Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема: обґрунтованість суджень, стислість та чіткість висловлення думки.

Людині сьогодення випадає жити і працювати в суспільстві інформаційних технологій. У науці та техніці, в інших галузях життєдіяльності необхідні спеціалісти, які б уміли аналізувати проблеми, встановлювати системні зв'язки, виявляти протиріччя, знаходити шляхи їх вирішення, прогнозувати можливі варіанти розвитку таких рішень, творчо

застосовувати набуті знання в нових умовах, а отже, – обґрунтовувати. Особистість такого толку готова до постійних змін у технологіях будь-якої сфери діяльності.



Платон і Аристотель

Аксіоми (більш детально). Давньогрецький вчений-енциклопедист, філософ і логік Аристотель (учень Платона, 384-322 рр. до н. е.) був переконаний, що «Всі науки, в яких наявні доведення, застосовують аксіоми Аксіоми володіють найвищим ступенем загальності й є початком усього».

Аксіома (гр. *ахіота* – загальноприйняте, безперечне; *ахіо* – вважаю гідним, наполягаю, вимагаю).

У дедуктивних наукових теоріях під *аксіомами* розуміють:

1. Основні вихідні положення чи твердження, що не викликають сумнівів, з яких шляхом дедукції, тобто *логічними* засобами, одержують весь інший зміст теорії.

2. Те, що не потребує жодних обґрунтувань, самоочевидні, наочні, непорушно істинні факти, відомі без досвіду, незалежні від нього, спроба обґрунтовувати які спроможна була б лише підірвати їх очевидність (так розумів аксіоми Евклід).

3. Твердження, заперечення якого заперечує самі основи логічного мислення.

4. Це – складові елементи теорії, підтвердження якої є одночасно обґрунтовуванням істинності й самих аксіом.

Аксіоматичний метод – один із методів побудови наукового знання. Він має обмежене застосування, оскільки вимагає високого рівня розвитку змістової теорії, котра підлягає аксіоматизації. Цей метод дає можливість створення закінчених, логічно завершених наукових теорій. Не менше значення має й те, що геометрична (математична) теорія, побудована аксіоматично, часто знаходить застосування на практиці – в інших науках і техніці.

При доведенні теорем, розв'язуванні задач потрібно користуватися якісним рисунком, який унаочнює, геометризує умову теореми (задачі), записану словами. Не дозволяється під час міркувань використовувати властивості фігур, які видно на рисунку, якщо ми не можемо їх обґрунтувати, спираючись на аксіоми і доведені теореми. Проте якісно, акуратно виконаний рисунок у змозі наштовхнути будь-кого на правильний шлях подальших міркувань.

В унікальній за змістом книзі «Елементарна геометрія», адресованій виключно вчителю, О. В. Погорелов зі знанням справи стверджує: «Викладання геометрії у школі має за мету не лише сповіщати учням геометричні результати, але також навчити їх методу, за допомогою якого ці результати одержуються. Як відомо, геометричні результати (теореми) одержуються шляхом логічних міркувань (доведень) із деяких вихідних тверджень (аксіом). Логічні

міркування є необхідною складовою всякого пізнання. Геометрії притаманні виразність і простота як у формулюванні результату, так і в тих вихідних положеннях, з яких цей результат повинен бути одержаний. *Тому геометрія дає нам найкращі можливості для розвитку логічного мислення у школі*». Цю ж тезу ще більш категорично виголошує й наступний абзац книги: «Пропонуючи цей курс, ми виходили з того, що *головна задача викладання геометрії – навчити учнів логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити*. Дуже мало хто з тих, що закінчують школу, будуть математиками, тим більше геометрами. Будуть і такі, котрі в їх практичній діяльності жодного разу не скористаються теоремою Піфагора. Однак навряд чи знайдеться хоча б один, якому не доведеться міркувати, аналізувати, доводити».

У викладенні геометричних текстів, окрім аксіом і теорем, вагоме місце займають *означення*. В найпростішому розумінні означення будь-якого поняття передбачає пояснення, що це таке, спираючись на відомі поняття і факти. В усякому означенні в мовленій, символічній чи зображувальній формі подаються загальні істотні властивості, тобто розкривається зміст поняття.

Наприклад, коли говорять: «Дайте означення відрізка». Відповідають так: «*Відрізком називається частина прямої, яка складена з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Точки, котрі обмежують відрізок, називаються його кінцями*».

Крім цього, відомі також означення променя, кута, трикутника, паралельних прямих, а також рівності відрізків, кутів і трикутників.

Висновки. Специфіка дисципліни «Геометрія» полягає в тому, що її розбудова ведеться на аксіоматичній основі, що *неявно* виражено в інших дисциплінах ЗЗСО, таких як алгебра, фізика, хімія, біологія і т.ін. До того ж, дедуктивна побудова евклідової геометрії, що спирається на систему аксіом Евкліда-Гільберта, надто складна (Гільберт – німецький математик кінця XIX й початку XX століть). Непорозуміння виникають відразу, коли вводять поняття міри для відрізків і кутів. Тому аксіоматику О. В. Погорелова приймають за базову.

Вихідні об'єкти та відношення між ними і, врешті, аксіоми певною мірою знайомі учням із попередніх років навчання. Вивірений системний підхід до засвоєння геометрії варто кваліфікувати як результат ретельного аналізу змісту евклідової геометрії, обов'язково з урахуванням правил і методів формулювання означень й доведення теорем.

Зараз, як не дивно, серед науковців і педагогів панує думка, що відмова від логіко-дидактичної схеми розбудови геометрії, поверхнєве знайомство з аксіомами дозволяє учням глибше зрозуміти предмет. Так, на нашу думку, автори підручників докладають зусиль *спростити* подання фактичного матеріалу формулюваннями і обґрунтуваннями істинної сутності дисципліни. Однак усі схожі удосконалення вельми сумнівні – ми на початку знайомства з першою з наук втрачаємо *систему*, ламаємо *структуру* дедуктивного методу

розбудови геометрії, яка має продуману і остаточно удосконалену аксіоматику (Ленчук, 2015, с. 22).

Увесь багатовіковий досвід навчання геометрії свідчить, що традиційна (з часів Евкліда) система її подання учням найбільш раціональна. Удосконалення не повинно стосуватися розумних і глибоко продуманих фактів диво-науки, в чому як учитель, так і учень мають бути переконаними. Отже, найперше, варто чітко формулювати основні питання, які виникають у висвітленні основ аксіоматичної розбудови першої з наук, демонструвати їх глибоко осмисленими прикладами практичного, прикладного характеру, якісними і ретельно виконаними рисунками.

Стосовно подальших досліджень у цьому ракурсі ми вважаємо, що підручник О. В. Погорелова недосконалий, у ньому є чимало недоліків. Ставимо собі за мету розкрити, підправити невдало описані теми та окремі питання.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Ленчук, І та Працьовитий, М. (2017). Роль рисунка в задачах планіметрії. Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі», №6, 26-32. <http://eprints.zu.edu.ua/31419/>.
- Ленчук, І. (2015). Точки, прямі, площини, ... аксіоми і теореми: введення в евклідову геометрію. Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі», №5, 21-25. <http://eprints.zu.edu.ua/19658/>.
- Погорелов, О. (1998). Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7-9 класів середньої школи. Київ. «Освіта».

References

- Lenchuk, I., & Pratsiovytyi, M. (2017). Rol' rysunka v zadachakh planimetrii [in Ukrainian] (The role of the drawing in planimetry problems). Matematyka v ridnii shkoli, 6, 26-32. <http://eprints.zu.edu.ua/31419/>
- Lenchuk, I. (2015). Tochky, priami, ploschyny, ... aksiomy i teoremy: vvedennia v evklidovu heometriiu [in Ukrainian] (Points, lines, planes, ... axioms and theorems: An introduction to Euclidean geometry). Matematyka v ridnii shkoli, 5, 21-25. <http://eprints.zu.edu.ua/19658/>
- Pohorielov, O. (1998). Heometriia: Planimetriia. Pidruchnyk dlia 7-9 klasiv serednoi shkoly [in Ukrainian] (Geometry: Planimetry. Textbook for grades 7-9 of secondary school). Osvita.

Отримано / Received 21.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 26.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 373.3/.5.016:51:159.955

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-51-64

Компаративний аналіз формування логіко-математичного мислення учнів початкової школи: імплікації для вчителя математики базової школи

Ольга Матяш¹, Irina Velbitskaya²

1. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського Вінниця, Україна
E-mail: matyash_27@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7149-9545>
2. Математична школа «Телером» Коннектикут, США
E-mail: velbytska.iryana@gmail.com

Анотація

У статті пояснюється актуальність проблеми формування логіко-математичного мислення учнів та важливість інформації про технології формування відповідного мислення учнів початкової школи для вчителів математики базової школи. Один із викликів, що спостерігається нині в освітній практиці різних країн - недостатня теоретична та практична готовність учителів математики до реалізації ефективної методики розвитку мислення учнів. Зазначено, що проблема формування та розвитку мислення учнів у процесі навчання математики активніше досліджується українськими науковцями на рівні початкової школи. На прикладі конкретного курсу «Логіка та критичне мислення для молодших школярів» показано які технології формування мислення учнів початкової школи реалізуються у США. Акцентовано увагу на тому, що методична система формування та розвитку мислення сучасних учнів (логічного, критичного, стратегічного) у процесі навчання математики, починаючи з початкових класів, має бути важливим завданням сучасних педагогічних досліджень у галузі методики навчання математики. Щоб ця система була ефективною, важливо дотримуватися принципу наступності, як взаємо узгодженості основних позицій в організації освітнього процесу між суміжними освітніми ланками. Зокрема, обізнаність з методичною системою формування логіко-математичної компетентності в учнів 1-4 класів є важливою для вчителя математики базової школи, який має завдання забезпечити умови для розвитку логіко-математичної компетентності учнів 5-9 класів.

Ключові слова: формування та розвиток мислення; логіко-математична компетентність; учні початкової школи; вчителі математики базової школи.

UDC: 373.3/.5.016:51:159.955

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-51-64

Comparative analysis of the development of logical mathematical thinking in primary school students: implications for the lower secondary mathematics teacher

Olha Matiash¹, Irina Velbitskaya²

1. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: matyash_27@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7149-9545>

2. Mathematics School "Telerom" Connecticut, USA

E-mail: velbytska.iryana@gmail.com

Abstract

The article explains the relevance of the problem of developing students' logical-mathematical thinking and emphasizes the importance of information about technologies for fostering such thinking in primary school students for lower secondary school mathematics teachers. One of the challenges observed in educational practice in different countries is the insufficient theoretical and practical readiness of mathematics teachers to implement effective methodologies for developing students' thinking. It is noted that the problem of the formation and development of students' thinking in the process of learning mathematics is more actively studied by Ukrainian researchers at the primary school level. Using the example of the specific course "Logic and Critical Thinking for Young Learners," the article demonstrates which technologies for developing primary school students' thinking are implemented in the United States. Emphasis is placed on the fact that a methodological system for the formation and development of modern students' thinking (logical, critical, and strategic) in the process of learning mathematics, beginning in primary school, is among the important tasks of contemporary pedagogical research in the field of mathematics education. For this system to be effective, it is important to adhere to the principle of continuity as the alignment of key positions in organizing the educational process between adjacent levels of education. In particular, awareness of the methodological system for developing logical-mathematical competence in students in Grades 1–4 is important for lower secondary school mathematics teachers, whose task is to ensure conditions for the development of logical-mathematical competence in students in Grades 5–9.

Keywords: formation and development of thinking; logical-mathematical competence; primary school students; lower secondary school mathematics teachers.

Постановка проблеми. Навчання математики завжди передбачало розвиток прийомів розумової діяльності. Однак нині, в епоху стрімкого розвитку цифрових технологій, важливо переосмислити пріоритети математичної освіти та шляхи їх реалізації (Матяш, 2025). Однією із найголовніших цілей математичної освіти, особливо в епоху активного використання ІІІ, має стати формування та розвиток мислення здобувачів освіти, зокрема критичного та стратегічного.

Дослідження, здійснені данськими вченими, акцентують увагу на тому, що однією із ключових складових математичної компетентності є *математичне мислення* (Niss, 2002). У багатьох вітчизняних та закордонних публікаціях обґрунтовується, що математика і логіка тісно пов'язані. Саме на уроках математики створюються найбільш оптимальні умови для формування і розвитку різних видів мислення учнів. Аналіз багатьох закордонних досліджень свідчить, що в закордонній педагогіці належно обґрунтовано як навички розвиненого мислення взаємопов'язані з предметною областю математичних умінь. У Стенфордському університеті, для прикладу, практикується курс математичного мислення, фокусом якого є формування навичок математичного мислення для повсякденного життя та професійної (не математичної) діяльності (Sezen, 2011).

Однак, дослідження, проведені американськими науковцями демонструють, що мислення випускників шкіл розвинене недостатньо (Arum, 2011). В іншому дослідженні, проведеному науковцями з Кіпру, продемонстровано низький рівень умінь учнів аналізувати, що свідчить про слабку сформованість логічного мислення (Charalambous, 2010). Японські дослідники вже багато років наголошують на необхідності учнів удосконалювати логічні уміння. Японські вчителі математики підкреслюють важливість формування логічних умінь та досвіду їх використання (Isoda, 2007).

Один із викликів, який нині явно спостерігається в освітній практиці різних країн, це недостатня теоретична та практична готовність учителів математики до реалізації ефективної методики розвитку критичного та стратегічного мислення учнів. Для подолання вказаного виклику, на нашу думку, методична компетентність вчителя математики має включати: обізнаність з методичною системою формування мислення учнів 1-4 класів; розуміння проблем формування логіко-математичного мислення учнів початкової школи; здатність вибудувати ефективну методичну систему розвитку мислення учнів у процесі навчання математики в базовій та старшій школі.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Наш аналіз наукових публікацій дозволяє стверджувати, що вже більше двадцяти п'яти років українські дослідники приділяють значну увагу питанням формування та розвитку логіко-математичного мислення у дітей дошкільного та молодшого шкільного віку. Зокрема, результати досліджень Н. Баглаєвої (1998, 2002), Л. Плетеницької (2002), С. Татарінової (2004, 2008), Т. Бегунової (2012), Л. Гурник (2012), Н. Листопад (2013), Н. Тарнавської, Н. Рудницької, Ю. Мурашевич (2015), К. Щербакової

(2015) стосуються різних технологій формування логіко-математичної компетентності в дітей дошкільного та молодшого шкільного віку.

У більш сучасних публікаціях українських дослідників інтерес до проблеми формування та розвитку логіко-математичної компетентності дітей не зникає. Зокрема, у працях О. Гевко, Р. Дутко (Гевко, 2019), Н. Лазарович (Лазарович, 2019) визначено компоненти у структурі логіко-математичного розвитку особистості (конструктивність, адекватність, гнучкість, економічність і самостійність мислення, характер зв'язку наочно-дійового, наочно-образного, логічного мислення тощо). Можна стверджувати, що з'ясовано ефективні засоби логіко-математичного розвитку дітей дошкільного та молодшого шкільного віку. У дисертації «Розвиток критичного мислення учнів початкової школи у процесі навчання математики» І. Кашубяк (Кашубяк, 2019) здійснено аналіз більше 50 дисертацій виконаних в Україні, а також огляд навчально-методичних посібників для школи, в яких запропоновано різні технологічні аспекти формування та розвитку мислення учнів початкової школи. В. Панченко (Панченко, 2020), Н. Калюжка (Калюжка, 2023), Н. Винницька, В. Довга (Довга, 2025) та інші розглядають проблему формування логічного мислення здобувачів початкової освіти.

В часовому періоді 1999-2008 років проблема формування та розвитку мислення учнів *основної школи* також в полі зору українських дослідників: О. Федоренко (1999), І. Акуленко (2000), О. Матяш (2000), Г. Білоусова (2004), Бельчев П. (2005), О. Віхрова (2004, 2008), Є. Денисенко (2008), І. Лов'янова (2008), Л. Шнайдер (2008), С. Назаренко (2008). У більш сучасних публікаціях українських дослідників проблема формування та розвитку мислення учнів *основної школи* розглядається не так часто. Вкажемо на праці Р. Мілян (2018, 2019, 2020, 2021), О. Данильчук (Данильчук, 2021).

Таким чином, ми констатуємо, що нині проблема формування та розвитку мислення учнів у процесі навчання математики активніше досліджується українськими науковцями на рівні початкової школи. Вважаємо вкрай актуальним нині питання *наступності* у розвитку мислення учнів початкової та базової (основної) школи.

На проблему *наступності* у логіко-математичному розвитку старших дошкільників та першокласників звертали увагу Л. Іщенко (Іщенко, 2009) та С.Скворцова (Скворцова, 2011). У статтях С. Матвієнко (Матвієнко, 2023 а, 2023 б) здійснено аналіз сучасних наукових досліджень, які стосуються проблеми забезпечення *наступності* дошкільної та початкової шкільної ланок освіти. Вказано на те, що в умовах розбудови Нової української школи ця проблема набула особливого значення. Наступність розглядається як взаємоузгодженість основних позицій в організації освітнього процесу між суміжними освітніми ланками, а також урахування вікових та індивідуально психологічних особливостей кожної дитини з метою її гармонійної адаптації до навчання, опанування нею предметних галузей, до яких належить і математична. Зазначено, що заняття математикою є важливою складовою

наступності дошкільної та початкової освіти й формування логіко-математичної компетентності. У свою чергу, логіко-математична компетентність є показником якості логіко-математичного розвитку.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. В психології та педагогіці обґрунтовано, що формування та розвиток мислення особистості, зокрема критичного мислення, може відбуватися ефективніше в діяльності, яка може бути організована як процес розв'язування задач. Як відомо, математика є наукою, що виникла із задач, розвивається в основному для розв'язування задач і через задачі. Однак, у значному масиві сучасних українських педагогічних досліджень щодо формування та розвитку критичного мислення учнів, частка тих, що розробляють та науково обґрунтовують сучасні технології формування та розвитку критичного мислення учнів базової та старшої школи у процесі навчання математики, як не дивно, не є значною. З'ясування та обґрунтування ефективних технологій системного та послідовного розвитку критичного мислення сучасних учнів у процесі навчання математики, починаючи з початкових класів, безумовно, належить до числа важливих завдань сучасних педагогічних досліджень у галузі методики навчання математики.

Погоджуючись з С. Матвієнко, що заняття математикою є важливою складовою наступності дошкільної та початкової освіти щодо формування логіко-математичної компетентності учнів, вважаємо, що заняття математикою є також важливою складовою наступності початкової та базової освіти щодо розвитку логіко-математичної компетентності учнів. Тому обізнаність з методичною системою формування логіко-математичної компетентності в учнів 1-4 класів є важливою для вчителя математики базової школи. Зокрема, це вкрай важливо для вчителів математики, що працюють в 5 та 6 класах.

Мета даної статті презентувати окремі результати аналізу умов формування логіко-математичного мислення сучасних учнів початкової школи в Україні та США, та пояснити важливість відповідної інформації для вчителів математики базової школи.

Виклад основного матеріалу. Педагогічний аспект формування мислення полягає у виявленні умов, конструюванні шляхів і засобів розвитку мислення учнів у навчально-виховному процесі (Гончаренко, 1997).

Навчання є провідною діяльністю у початкових класах, тому саме молодший шкільний вік має значні резерви для формування мислення учнів. Зусилля науковців та практиків нині спрямовані на пошуки нових організаційних і змістовних компонентів навчальної діяльності, за яких відбувається розвиток мислення молодших школярів та оптимізується навчально-виховний процес (Григорчук, 2020).

Найважливішим завданням уроків математики в початковій школі є озброєння учнів загальними прийомами мислення, просторової уяви, розвиток здатності розуміти зміст математичних завдань, уміння логічно міркувати, засвоїти навички алгоритмічного

мислення. На це вказують М. Богданович, О. Онопрієнко, О. Савченко, С. Скворцова та інші. Кожній дитині важливо навчитися аналізувати, чітко висловлювати свої думки, передбачати результат і знаходити шляхи розв'язання різноманітних завдань.

Роль математики в процесі формування логіко-математичного мислення полягає в тому, щоб через систему спеціальних завдань і вправ створити ситуацію, яка дозволяє формувати і розвивати у дитини компоненти математичного мислення: гнучкість, системність, просторову рухливість, логічні прийоми розумових дій і т. п. При цьому суть процесу зводиться не до цільового навчання елементам математики, а до всебічного стимулювання розвитку логічної сфери розумових процесів дитини (Ящук, 2015).

Завдання розвитку логіко-математичної компетентності зафіксоване в Україні у Базовому компоненті дошкільної освіти (БКДО, 2021), а саме в освітньому напрямі «Дитина в сенсорно-пізнавальному просторі», який містить такі складники: предметно-практична, технологічна компетентність, сенсорно-пізнавальна, логіко-математична, дослідницька компетентність.

Педагогіко-дидактична робота з розвитку логіко-математичних умінь та навичок *дошкільників* полягає у створенні відповідних умов для формування в дошкільника пізнавальної активності: вправління в умінні та навичках досліджувати, трансформувати, експериментувати та моделювати різні за розміром, кількістю та просторовим розміщенням об'єкти; використання розумових операцій і логічних засобів та прийомів; здійснення вимірювань та елементарних обчислень. Важливо, щоб сучасна дитина дошкільного віку могла звертатися до своїх логічних і математичних умінь та навичок пізнаючи навколишній світ. Відповідно могла орієнтуватися у просторі, відчувати рух, характеристики часу, засвоювати основні закони буття (зміни дня і ночі, переходу світла в темряву і навпаки); знаходити схоже і відмінне, опановувати дії об'єднання, упорядкування, групування предметів довкілля – одним словом, діяти свідомо, з розумінням зв'язку причин та наслідків (Баглаєва, 2002).

Завдання розвитку мислення учнів *початкової школи* зафіксоване в Україні у Державному стандарті початкової освіти (ДСПО, 2019). Згідно вказаного стандарту метою математичної освітньої галузі є формування математичної та інших ключових компетентностей; розвиток мислення, здатності розпізнавати і моделювати процеси та ситуації з повсякденного життя, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів, а також здатності робити усвідомлений вибір.

Психологи підкреслюють, що в молодшому шкільному віці активно формується здатність до аналізу, порівняння, узагальнення, що є складовими логічного мислення. Водночас діти цього віку залишаються схильними до ігрової та образної діяльності, тому розвиток логічних умінь потребує особливої організації освітнього процесу.

Нині основою для початкової школи є програми НУШ-1 та НУШ-2. Їх називають типовими для всіх українських шкіл, Міністерство освіти та науки України затвердило їх у 2018 році. Окрім НУШ існують ще кілька авторських або експериментальних програм: Інтелект України; Росток; На крилах успіху; Світ, в якому я живу; Світ чекає крилатих.

НУШ передбачає сім навчальних предметів, роботу в колективі та багато ігор. Автори програм стверджують, що їхній підхід виховує в дітей розуміння навколишнього світу і спонукає до самостійного мислення. Навчальна програма «Інтелект України» існує з 2018 року, відрізняється від НУШ, адже передбачає уроки, яких немає в типовій навчальній програмі. Зокрема, на уроках «Еврика» діти розвивають логічне мислення, вчать розв'язувати логічні проблеми і розвивають творчі навички. Важливо розуміти, що кожна навчальна програма передбачає, що вчитель з нею дуже добре ознайомлений, дотримується всіх рекомендацій авторів програм.

Попри спрямування Нової української школи на оновлення предметних методик, чимало вчителів початкової школи все ще тяжіють до використання традиційних підходів до навчання, що здебільшого є застарілими та неефективними для розвитку нинішнього покоління дітей. Такі підходи зорієнтовані переважно на репродуктивне наслідування наданих у готовому вигляді зразків, механічне запам'ятовування правил та алгоритмів, механічне виконання розумових і практичних дій. Водночас недостатньо уваги приділяється формуванню в учнів умінь критично сприймати інформацію, аналізувати дані, мислити логічно та варіативно, застосовувати знання і вміння в змінених навчальних або життєвих обставинах. Саме тому є гострою необхідність удосконалення та модернізації методики навчання предметів і курсів у початковій школі (Онопрієнко, 2024).

У вказаному контексті цікавим є досвід інших країн щодо умов формування логіко-математичного мислення сучасних учнів початкової школи.

У цій статті зосередимо увагу на тому, як вирішується питання формування та розвитку мислення учнів початкової школи, для прикладу, у США.

Створення спеціалізованих програм з логіки та критичного мислення для учнів 1–4 класів має стратегічне значення для американської освіти. У часи, коли штучний інтелект змінює ринок праці, а дезінформація поширюється зі швидкістю світла, здатність критично мислити, аналізувати дані та логічно аргументувати стає не просто академічною навичкою — це питання національної безпеки та конкурентоспроможності. Попри те, що американські стандарти CCSS (Common Core State Standards) чітко описують математичні компетенції, вони залишають критичну прогалину: формальна логіка, робота з істинністю висловлювань, систематичний аналіз та доказове мислення зазвичай з'являються лише в базовій або старшій школі. Водночас дослідження когнітивного розвитку показують, що діти 6–10 років цілком здатні освоювати базові логічні операції — якщо подавати їх в ігровій формі. Нині в Америці поширюється ідея, що створення та поширення курсів логіки та критичного

мислення для молодших школярів — це не просто педагогічна інновація. Це стратегічна інвестиція в майбутнє нації. Кожна дитина, яка навчається систематично аналізувати інформацію, логічно аргументувати та приймати обґрунтовані рішення, — це майбутній науковець, інженер, підприємець, юрист чи лідер громади, здатний розв'язувати складні проблеми 21 століття.

Курс «Логіка та критичне мислення для молодших школярів» інтегрує логічне мислення в повсякденні математичні активності. Замість абстрактних символів діти працюють з детективними історіями, де потрібно визначити, хто каже правду, а хто бреше; аналізують атрибути об'єктів через діаграми Венна; вчаться формулювати точні заперечення висловлювань ("Everyone was in the gym" → "Not everyone was in the gym"). Це не просто математика — це фундамент наукового методу, юридичного мислення та цифрової грамотності. Що робить цей курс ефективним? Замість теорії — реальні задачі. У форматі «Math Court» діти працюють в командах Детективів та Присяжних, розслідуючи справи про трофей, який зник. Детективи аналізують свідчення та визначають, кому можна довіряти; Присяжні синтезують інформацію та приймають обґрунтоване рішення. Участь професійного юриста Harold Rose (Yale Law School J.D., колишній Senior Associate General Counsel Єльського університету) надає процесу автентичності — діти вчаться презентувати та захищати власні висновки з тією ж чіткістю, що й у справжній залі суду. Курс спрямований на розвиток кількох критичних компетентностей:

Аналіз даних (організація інформації в таблиці, підрахунок у категоріях, візуалізація через графіки)

Логічне мислення (робота з істинністю, запереченням, кванторами «всі/деякі/ніхто»)

Класифікація (атрибути об'єктів, діаграми Венна, пошук спільного та відмінного)

Комунікація (аргументація, точність формулювань, публічний захист рішень)

Програма курсу повністю узгоджена з CCSS: від базових стандартів 1.MD.C.4 (представлення даних у 2–3 категоріях) до складніших 3.MD.B.3 (масштабовані діаграми). Головне в тому, що цей курс розвиває Mathematical Practices (MP1–MP7): наполегливе розв'язування проблем, абстрактне мислення, аргументацію, моделювання, виявлення структури. Це саме ті навички, яких американські роботодавці шукають у випускниках, але які рідко систематично формуються в початковій школі.

Чому це важливо? За даними Всесвітнього економічного форуму, критичне мислення та аналіз входять у топ-3 навичок для робочих місць майбутнього. Країни, які інвестують у розвиток цих компетентностей з ранніх років, формують покоління інноваторів, здатних конкурувати в глобальній економіці знань. У епоху фейк-ньюз та цифрової маніпуляції здатність перевіряти факти, розпізнавати логічні помилки та відрізняти істину від брехні — це основа демократії. Діти, які з першого класу вчаться питати «Як ми це знаємо?» та «Які докази це підтверджують?», виростають громадянами, які стійкі до пропаганди.

Розглянемо один із прикладів реалізації вказаних вище ідей.

Курс: Справа про про зниклий Трофей.

Мета курсу: Розвинути логіко-математичне мислення у дітей 1–4 класів через захоплюючі детективні задачі. На курсі учні вчать помічати атрибути об'єктів, класифікувати їх за різними ознаками, вести організований підрахунок, працювати з даними та будувати чіткі аргументи для обґрунтування своїх висновків.

Курс розрахований на учнів 1–4 класів. Діти працюють у двох вікових підгрупах: молодша група (1–2 класи) та старша група (3–4 класи), що дозволяє адаптувати складність завдань до рівня кожної групи.

Ключові модулі курсу:

Атрибути та класифікація. Діти вчать розпізнавати та аналізувати основні атрибути об'єктів: колір, форму та розмір. Проводимо інвентаризацію геометричних фігур, порівнюємо кількості та визначаємо «на скільки більше або менше» одних елементів порівняно з іншими.

Діаграма Венна. Освоюємо роботу з діаграмами Венна для визначення спільних та відмінних характеристик об'єктів. Вчимося бачити «перекриття» наборів — які елементи належать одночасно кільком групам.

Робота з даними. Організовуємо інформацію у 2–3 категоріях, створюємо міні-таблиці для систематизації даних, проводимо підрахунки та будуємо прості діаграми для візуального представлення результатів.

Комбінаторика. Вивчаємо принципи підрахунку варіантів (pick-and-count): складаємо повний перелік можливих комбінацій без урахування порядку елементів.

Логіка. Працюємо з істинністю висловлювань: визначаємо True (правда), False (брехня) або Unknown (невідомо). Вивчаємо логічні операції AND (і) та OR (або). Освоюємо заперечення тверджень (negation) та обернені твердження (converse).

Олімпіадна підготовка (Enrichment). Розбираємо складні задачі з математичної олімпіади «Кенгуру» на 5 балів для рівня 3–4 класу. Ці задачі тренують уважне читання умови, систематичний перебір варіантів та логічне виключення неможливих випадків.

Курс повністю узгоджений з американськими стандартами Common Core State Standards (CCSS):

K.MD.B.3 — класифікація об'єктів за атрибутами

1.MD.C.4 — представлення та інтерпретація даних

K.G / 1.G — геометрія та властивості двовимірних фігур

2.MD.D.10 — піктографіки та стовпчикові діаграми (для готових груп)

3.MD.B.3 — масштабовані діаграми та інтерпретація (для готових груп)

Практики математичного мислення (CCSS Mathematical Practices): MP1 (наполегливе розв'язування проблем), MP3 (аргументація та критика міркувань), MP6 (точність формулювань), MP7 (виявлення структури).

Фінальний івент: Math Court — Справа про Вкрадений Трофей.

Формат заходу: Учні працюють у двох командах: Детективи та Присяжні. Детективи отримують свідчення від підозрюваних, визначають, хто з свідків каже правду, а хто бреше, та передають свої висновки команді Присяжних. Присяжні аналізують тільки релевантні свідчення (ті, що виходять від правдивих свідків) та виносять остаточний вердикт — визначають, хто саме вкрав трофей.

Проводиться дві окремі справи, щоб обидві вікові групи (1–2 класи та 3–4 класи) змогли спробувати себе в обох ролях — і Детективів, і Присяжних.

Запрошений експерт Harold Rose виступає як Guest Lecturer & Math Court Judge (запрошений лектор та суддя Math Court). Він має ступінь доктора права (J.D.) від Yale Law School, працював на посаді Senior Associate General Counsel у Єльському університеті та був клерком в Окружному суді США (District of Connecticut). Harold допомагає дітям навчитися ясно, структуровано й впевнено презентувати свої рішення та захищати їх перед аудиторією.

Результат курсу. Під час фінального івенту діти застосовують всі навички, здобуті протягом курсу: роботу з атрибутами та класифікацією об'єктів, використання діаграм Венна для аналізу інформації, організований підрахунок даних, розуміння логічних зв'язків та заперечень, систематизацію даних у таблиці та діаграми, а також публічну аргументацію своєї позиції. Завдяки цьому діти успішно доводять справу до логічно обґрунтованого вердикту, демонструючи повне володіння математичним та критичним мисленням.

Пісумовуючи огляд Курсу «Логіка та критичне мислення для молодших школярів» (США), зауважимо, що нині значні можливості для досягнення освітніх завдань надають освітні онлайн-платформи. Для прикладу, спеціально для дошкільнят і молодших школярів створено освітню онлайн-платформу LogicLike <https://logiclike.com/uk/rozvytok-navchannya/logichne-myslennya>. Сайт розроблений для розвитку в дітей 5-10 років логічного й критичного мислення. Понад 3500 задач на розвиток логічного мислення. LogicLike розподілені за 17 тематичними розділами. Крім затребуваних у школі текстових завдань на логіку, питань із тем «Закономірності», «Хибні і правдиві висловлювання», на сайті є десятки інших видів завдань: загадки на логічне мислення, головоломки для розвитку просторового мислення, адаптовані для дитячого розуміння завдання за темами «Алгоритми» та «Комбінаторика», **математичні ребуси**, вправи й ігри на розвиток логічного мислення.

Українські вчителі початкової школи розробляють і публікують на сайтах «Всеосвіта» та «На урок» різні авторські методичні посібники, значна частка яких стосується проблеми розвитку мислення учнів. Для прикладу «Логіка для дітей» (Н. Конончук), «Вправи для розвитку логічного мислення» (О. Панкратов), «Розвиток логічного мислення» (Л.Ребендюк) та інші. Також варто вказати сайт «Розвиток дитини», що містить предметну категорію «Логіка». На цьому сайті підібрано 1044 завдання на логіку для дітей від 5 до 10 років.

Висновки. Цілком погоджуємося із позицією американських колег, що у часи, коли штучний інтелект змінює ринок праці, а дезінформація поширюється зі швидкістю світла, здатність критично мислити, аналізувати дані та логічно аргументувати, стає не просто академічною навичкою, а питанням національної безпеки та конкурентоспроможності. Завдання розвитку мислення учнів у процесі навчання, у початковій, базовій та старшій школах, чітко зафіксоване в освітніх державних документах. Наш аналіз дозволяє стверджувати, що на рівні дошкілля та початкової школи ставляться чіткі завдання розвитку логіко-математичного мислення дітей; спостерігається активність науковців до виявлення відповідних ефективних методик; наявні цікаві розробки вчителів на освітніх сайтах, розробки освітніх платформ. Також ми вказуємо на оригінальні технології розвитку логіко-математичного мислення дітей початкової школи у закордонному досвіді.

Акцентуємо увагу на тому, що методична система формування та розвитку мислення сучасних учнів (логічного, критичного, стратегічного) у процесі навчання математики, починаючи з початкових класів, безумовно, належить до числа важливих завдань сучасних педагогічних досліджень у галузі методики навчання математики. Щоб ця система була ефективною, важливо дотримуватися принципу наступності, як взаємо узгодженості основних позицій в організації освітнього процесу між суміжними освітніми ланками. Зокрема, обізнаність з методичною системою формування логіко-математичної компетентності в учнів 1-4 класів є важливою для вчителя математики базової школи, який має завдання забезпечити умови для розвитку логіко-математичної компетентності учнів 5-9 класів.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Баглаєва, Н. І. (1998). Діагностика логіко-математичних умінь дитини. *Палітра педагога*, (3–4).
- Баглаєва, Н. (2002). Логіко-математичний розвиток дошкільнят: шляхи оптимізації. *Палітра педагога*, (2), 12–14.
- Бегунова, Т. (2012). Розвиток логіко-математичної компетентності дошкільника. *Дошкільний навчальний заклад*, (6), 4–13.
- Базовий компонент дошкільної освіти. (2021). https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/rizne/2021/12.01/Pro_novu_redaktsiyu%20Bazovoho%20komponenta%20doshkilnoyi%20osvity.pdf
- Гевко, О., & Дутко, Р. (2019). Педагогічні шляхи логіко-математичного розвитку дітей старшого дошкільного віку. *Молодь і ринок*, 10(177).
- Гончаренко, С. У. (1997). *Український педагогічний словник*. Либідь.
- Григорчук, Т. (2020). Підготовка майбутніх учителів початкової школи до формування логічного мислення учнів Нової української школи. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training*, 58, 83–90. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2020-58-83-90>

- Гурник, Л. (2012). Використання паличок Х. Кюізенера в логіко-математичному розвитку дошкільників. *Вісник кафедри корекційної освіти*, (10), 15–22.
- Данильчук, О. (2021). Логіко-математичне мислення: шляхи розвитку, особливості та напрямки.
- Державний стандарт початкової освіти. (2019). <https://mon.gov.ua/news/onovleno-derzhavnyi-standart-pochatkovoi-osvity-rozpochato-hromadske-obhovorennia>
- Іщенко, Л. В. (2009). Наступність у логіко-математичному розвитку старших дошкільників та першокласників. *Педагогічні науки*, 51(1), 161–164.
- Калюжка, Н. (2023). Формування логічного мислення здобувачів початкової освіти у процесі розв'язування математичних задач. *International Science Journal of Education & Linguistics*, 2(1), 1–21. <https://doi.org/10.46299/j.isjel.20230201.01>
- Кашубяк І. (2019). Розвиток критичного мислення учнів початкової школи у процесі навчання математики. Дисертація на здобуття наук. ст. кандидата пед. наук за спец. 13.00.02 – теорія і методика навчання (математика).
- Лазарович, Н. Б. (2019). *Логіко-математичний розвиток дітей дошкільного віку: методичні рекомендації*. Івано-Франківськ.
- Матвієнко, С. І. (2023а). Забезпечення наступності логіко-математичного розвитку дитини на етапі «заклад дошкільної освіти – школа». *Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя. Психолого-педагогічні науки*, (3), 15–23.
- Матвієнко, С. І. (2023б). Гра як засіб забезпечення наступності у формуванні логіко-математичної компетентності старших дошкільників і учнів першого класу НУШ. *Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя. Психолого-педагогічні науки*, (1), 54–62.
- Матяш, О. І. (2000). До питання вивчення елементів логіки в шкільному курсі математики. *Сучасний стан і перспективи шкільних курсів математики та інформатики у зв'язку з реформуванням у галузі освіти* (с. 34–36). ДПУ.
- Матяш, О. І., & Мілян, Р. С. (2020а). *Вчимося мислити логічно*. Вектор.
- Матяш, О. І., & Мілян, Р. С. (2020б). *Навчаємо мислити логічно*. Вектор.
- Матяш, О. І., Коваль, О. С., & Михайленко, Л. Ф. (2022). Формування в учнів інтересу до математичних задач та їх розв'язування. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання*, 65, 103–113.
- Матяш, О. І., & Кривошея, М. І. (2025). Формування в учнів здатності до досліджень як педагогічна проблема. *Фізико-математична освіта*, 40(2), 30–35.
- Онопрієнко, О., & Скворцова, С. (2024). Освітня програма «Методика формування математичної компетентності учнів початкової школи» як ресурс професійного розвитку вчителів.
- Панченко, В. (2020). Формування у молодших школярів логічного складника математичної компетентності. *Молодий вчений*, 2(78), 446–449. <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-2-78-94>
- Плетеницька, Л. С., & Крутий, К. Л. (2002). *Логіко-математичний розвиток дошкільників*. ЛІПС.
- Скворцова, С. (2011). Логіко-математична компетентність дитини: наступність дошкілля і школи. *Дошкільне виховання*, (5), 13–17.
- Сучасні технології формування логіко-математичної компетентності в дітей дошкільного та молодшого шкільного віку (2015). (Н. П. Тарнавська, Н. Ю. Рудницька, & Ю. М. Мурашєвич, Eds.). ФОП Левковець.
- Татарінова, С. О. (2004). Логіко-математична компетентність дітей старшого дошкільного віку. *Актуальні проблеми дошкільної та початкової освіти в сучасних умовах* (с. 59–61).
- Татарінова, С. О. (2008). *Формування логіко-математичних понять у старших дошкільників у процесі пізнавальної діяльності* (Канд. дис.). Мелітополь.
- Щербаківа, К. Й. (2015). *Теорія і методика логіко-математичного розвитку дітей дошкільного віку*. Мелітополь.
- Ящук, О. М. (2015а). Основні поняття логіко-математичного мислення особистості. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи*, 52.
- Ящук, О. М. (2015б). Роль математики у формуванні логіко-математичного мислення. *Сучасні технології розвитку професійної майстерності майбутніх учителів*.
- Arum, R., & Roksa, J. (2011). *Academically adrift: Limited learning on college campuses*. University of Chicago Press.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117–151.
- Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. World Scientific.
- Menker, H., Yohannes, G., Bhatti, A. H., & Hasan, R. (2016). Impact of multimedia in teaching mathematics. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 39, 80–83.

- Milian, R. (2021). Pupils' mathematical competence components formation in the conditions of distance learning. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX(99), Issue 252, 21–25.
- Niss, M., & Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematikl ring*. Undervisningsministeriet.
-  zer, E., & Sezer, R. (2014). A comparative analysis of questions in American, Singaporean, and Turkish mathematics textbooks based on the topics covered in 8th grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(1), 411–421.
- Sezen, N., & B lb l, A. (2011). A scale on logical thinking abilities. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 15, 2476–2480.

References

- Bahlaieva, N. I. (1998). *Diahnostyka lohiko-matematychnykh umin dytyny* [in Ukrainian] (*Diagnostics of a child's logical and mathematical skills*). *Palitra pedahoha*, (3–4).
- Bahlaieva, N. (2002). *Lohiko-matematychnyi rozvytok doshkilniat: shliakhy optymizatsii* [in Ukrainian] (*Logical and mathematical development of preschool children: Ways of optimization*). *Palitra pedahoha*, (2), 12–14.
- Biehunova, T. (2012). *Rozvytok lohiko-matematychnoi kompetentnosti doshkilnyka* [in Ukrainian] (*Development of logical and mathematical competence of a preschool child*). *Doshkilnyi navchalnyi zaklad*, (6), 4–13.
- Ministerstvo Osvity i Nauky Ukrainy. (2021). *Bazovyi komponent doshkilnoi osvity* [in Ukrainian] (*Basic component of preschool education*). https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/rizne/2021/12.01/Pro_novu_redaktsiyu%20Bazovoho%20komponenta%20doshkilnoyi%20osvity.pdf
- Hevko, O., & Dutko, R. (2019). *Pedahohichni shliakhy lohiko-matematychnoho rozvytku ditei starshoho doshkilnoho viku* [in Ukrainian] (*Pedagogical ways of logical and mathematical development of senior preschool children*). *Molod i rynek*, 10(177).
- Honcharenko, S. U. (1997). *Ukrainskyi pedahohichnyi slovnyk* [in Ukrainian] (*Ukrainian pedagogical dictionary*). Lybid.
- Hryhorchuk, T. (2020). *Pidhotovka maibutnikh uchyteliv pochatkovoї shkoly do formuvannia lohichnoho myslennia uchniv Novoi ukrainskoї shkoly* [in Ukrainian] (*Training future primary school teachers to develop logical thinking of NUS students*). *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training*, 58, 83–90. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2020-58-83-90>
- Hurnyk, L. (2012). *Vykorystannia palychok Kh. Kuizenenera v lohiko-matematychnomu rozvytku doshkilnykiv* [in Ukrainian] (*Using Cuisenaire rods in logical and mathematical development of preschoolers*). *Visnyk kafedry korektsiinoї osvity*, (10), 15–22.
- Danylchuk, O. (2021). *Lohiko-matematychne myslennia: shliakhy rozvytku, osoblyvosti ta napriamky* [in Ukrainian] (*Logical and mathematical thinking: Ways, features, and directions of development*).
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2019). *Derzhavnyi standart pochatkovoї osvity* [in Ukrainian] (*State standard of primary education*). <https://mon.gov.ua/news/onovleno-derzhavnyi-standart-pochatkovoї-osvity-rozpochato-hromadske-obhovorennia>
- Ishchenko, L. V. (2009). *Nastupnist u lohiko-matematychnomu rozvytku starshykh doshkilnykiv ta pershoklasnykiv* [in Ukrainian] (*Continuity in logical and mathematical development of preschoolers and first graders*). *Pedahohichni nauky*, 51(1), 161–164.
- Kaliuzhka, N. (2023). *Formuvannia lohichnoho myslennia zdobuvachiv pochatkovoї osvity u protsesi rozviazuvannia matematychnykh zadach* [in Ukrainian] (*Formation of logical thinking of primary education students through solving mathematical problems*). *International Science Journal of Education & Linguistics*, 2(1), 1–21. <https://doi.org/10.46299/j.isjel.20230201.01>
- Kashubiak, I. (2019). *Rozvytok krytychnoho myslennia uchniv pochatkovoї shkoly u protsesi navchannia matematyky* [in Ukrainian] (*Development of critical thinking of primary school students in mathematics learning*) (Doctoral dissertation).
- Lazarovych, N. B. (2019). *Lohiko-matematychnyi rozvytok ditei doshkilnoho viku: metodychni rekomendatsii* [in Ukrainian] (*Logical and mathematical development of preschool children: Methodological recommendations*). Ivano-Frankivsk.
- Matviienko, S. I. (2023a). *Zabezpechennia nastupnosti lohiko-matematychnoho rozvytku dytyny na etapi "zaklad doshkilnoi osvity – shkola"* [in Ukrainian] (*Ensuring continuity of logical and mathematical development at the preschool-school stage*). *Naukovi zapysky NDU im. M. Hoholia. Psykholoho-pedahohichni nauky*, (3), 15–23.
- Matviienko, S. I. (2023b). *Hra yak zasib zabezpechennia nastupnosti u formuvanni lohiko-matematychnoi kompetentnosti* [in Ukrainian] (*Play as a means of ensuring continuity in forming logical and mathematical competence*). *Naukovi zapysky NDU im. M. Hoholia. Psykholoho-pedahohichni nauky*, (1), 54–62.

- Matiash, O. I. (2000). *Do pytannia vyvchennia elementiv lohiky v shkilnomu kursi matematyky* [in Ukrainian] (*On studying elements of logic in the school mathematics course*). In *Suchasnyi stan i perspektyvy shkilnykh kursiv matematyky ta informatyky* (pp. 34–36). DPU.
- Matiash, O. I., & Milian, R. S. (2020a). *Vchymosia myslyty lohichno* [in Ukrainian] (*Learning to think logically*). Vektor.
- Matiash, O. I., & Milian, R. S. (2020b). *Navchaimo myslyty lohichno* [in Ukrainian] (*Teaching to think logically*). Vektor.
- Matiash, O. I., Koval, O. S., & Mykhailenko, L. F. (2022). *Formuvannia v uchniv interesu do matematychnykh zadach ta yikh rozviazuvannia* [in Ukrainian] (*Developing students' interest in mathematical problems and their solving*). *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia*, 65, 103–113.
- Matiash, O. I., & Kryvosheia, M. I. (2025). *Formuvannia v uchniv zdatnosti do doslidzhen yak pedahohichna problema* [in Ukrainian] (*Formation of students' research ability as a pedagogical problem*). *Fyzyko-matematychna osvita*, 40(2), 30–35.
- Onopriienko, O., & Skvortsova, S. (2024). *Osvitnia prohrama "Metodyka formuvannia matematychnoi kompetentnosti uchniv pochatkovoï shkoly"* [in Ukrainian] (*Educational program "Methods of forming mathematical competence of primary school students"*).
- Panchenko, V. (2020). *Formuvannia u molodshykh shkoliariv lohichnoho skladnyka matematychnoi kompetentnosti* [in Ukrainian] (*Formation of the logical component of mathematical competence of junior schoolchildren*). *Molodyi vchenyi*, 2(78), 446–449. <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-2-78-94>
- Pletenicka, L. S., & Krutii, K. L. (2002). *Lohiko-matematychnyi rozvytok doshkillnykiv* [in Ukrainian] (*Logical and mathematical development of preschoolers*). LIPS.
- Skvortsova, S. (2011). *Lohiko-matematychna kompetentnist dytyny: nastupnist doshkillia i shkoly* [in Ukrainian] (*Logical and mathematical competence of a child: Continuity between preschool and school*). *Doshkilne vykhovannia*, (5), 13–17.
- Tarnavska, N. P., Rudnytska, N. Yu., & Murashevych, Yu. M. (Eds.). (2015). *Suchasni tekhnolohii formuvannia lohiko-matematychnoi kompetentnosti v ditei doshkilnoho ta molodshoho shkilnoho viku* [in Ukrainian] (*Modern technologies for forming logical and mathematical competence in preschool and primary school children*). FOP Levkovets.
- Tatarynova, S. O. (2004). *Lohiko-matematychna kompetentnist ditei starshoho doshkilnoho viku* [in Ukrainian] (*Logical and mathematical competence of senior preschool children*). In *Aktualni problemy doshkilnoi ta pochatkovoï osvity* (pp. 59–61).
- Tatarynova, S. O. (2008). *Formuvannia lohiko-matematychnykh poniat u starshykh doshkillnykiv u protsesi piznavalnoi diialnosti* [in Ukrainian] (*Formation of logical and mathematical concepts of senior preschoolers in cognitive activity*) (Doctoral dissertation). Melitopol.
- Shcherbakova, K. Y. (2015). *Teoriia i metodyka lohiko-matematychnoho rozvytku ditei doshkilnoho viku* [in Ukrainian] (*Theory and methods of logical and mathematical development of preschool children*). Melitopol.
- Yashchuk, O. M. (2015a). *Osnovni poniattia lohiko-matematychnoho myslennia osobystosti* [in Ukrainian] (*Basic concepts of logical and mathematical thinking of personality*). *Psykhologo-pedahohichni problemy silskoi shkoly*, 52.
- Yashchuk, O. M. (2015b). *Rol matematyky u formuvanni lohiko-matematychnoho myslennia* [in Ukrainian] (*The role of mathematics in forming logical and mathematical thinking*). In *Suchasni tekhnolohii rozvytku profesiinoi maisternosti maibutnikh uchyteliv*.
- Arum, R., & Roksa, J. (2011). *Academically adrift: Limited learning on college campuses*. University of Chicago Press.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117–151.
- Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. World Scientific.
- Menker, H., Yohannes, G., Bhatti, A. H., & Hasan, R. (2016). Impact of multimedia in teaching mathematics. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 39, 80–83.
- Milian, R. (2021). Pupils' mathematical competence components formation in the conditions of distance learning. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX(99), Issue 252, 21–25.
- Niss, M., & Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematikl ring*. Undervisningsministeriet.
-  zer, E., & Sezer, R. (2014). A comparative analysis of questions in American, Singaporean, and Turkish mathematics textbooks. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(1), 411–421.
- Sezen, N., & B lb l, A. (2011). A scale on logical thinking abilities. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 15, 2476–2480.

Отримано / Received 16.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 17.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 37.016:51:37.015.3(100+477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-65-80

Формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики: огляд закордонного досвіду

Олег Коношевський

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

E-mail: oleh.konoshevskiy@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8408-1829>

Анотація

У статті здійснено огляд закордонного досвіду формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики. Розкрито сутність поняття «позитивне ставлення до вивчення математики» як комплексної характеристики, що охоплює емоційний, когнітивно-пізнавальний та поведінково-діяльнісний компоненти.

У статті окреслено ключові чинники, які визначають ставлення учнів до математики: особистісні переконання, самоефективність, методика навчання, емоційний клімат у класі, підтримка з боку батьків і вчителів. Розглянуто ефективні педагогічні практики, поширені у різних країнах (Сінгапур, Естонія, Швейцарія, Канада, Австралія), серед яких: акцент на проблемному навчанні, реальних життєвих контекстах, інноваціях та балансі мотивації; гейміфікація, внутрішня мотивація, роль вчителів, мотиваційний дизайн уроків, емоційна підтримка, само-ефективність, позитивні установки, дослідницьке навчання, цінності учнів, когнітивна активація.

На основі аналізу закордонного досвіду сформульовано рекомендації для української школи щодо підвищення інтересу до математики: раннє формування позитивного ставлення, використання контекстних задач, підтримка учнівської самооцінки та підготовка вчителів до роботи з емоційними аспектами навчання.

Ключові слова: мотивація, закордонний досвід, реальний життєвий контекст, контекстна задача, самоефективність, емоційна складова.

UDC 37.016:51:37.015.3(100+477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-65-80

Formation of students' positive attitude towards learning mathematics: review of foreign experience

Oleh Konoshevskyi

Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine.

E-mail: oleh.konoshevskyi@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8408-1829>

Abstract

The statistics provide a comprehensive overview of the formation of a positive attitude towards learning mathematics. The essence of the concept of «positive attitude to learning mathematics» is revealed as a complex characteristic that includes emotional, cognitive-cognitive and behavioral-actional components.

The article identifies the key factors that determine the goals of students in mathematics: specialization, self-efficiency, learning methods, emotional climate in the class, support from parents and teachers. Effective pedagogical practices, widespread in different countries (Singapore, Estonia, Switzerland, Canada, Australia), are reviewed, including: emphasis on problem learning, real contexts, innovation and balance of motivation; gamification, intrinsic motivation, role of teachers, motivational design of lessons, emotional encouragement, self-efficacy, positive attitudes, pre-study learning, values of students, cognitive activation.

Based on the analysis of the foreign evidence, recommendations have been formulated for the Ukrainian school to promote interest in mathematics: early development of a positive attitude, selection of contextual tasks, encouragement academic self-esteem and teacher training before working with the emotional aspects of learning.

Key words: motivation, foreign evidence, real context, contextual task, self-efficiency, emotional warehouse.

Постановка проблеми. У сучасному світі математика є фундаментальною дисципліною, яка формує критичне мислення, логіку та навички розв'язання проблем, необхідні для розвитку науки, технологій та економіки. Вона відіграє ключову роль у підготовці учнівської молоді до викликів цифрової ери, де математичні компетентності є основою для професій у сферах STEM (наука, технології, інженерія, математика). За даними Організації економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР), математична грамотність є одним із ключових індикаторів конкурентоспроможності націй, оскільки безпосередньо впливає на інноваційний потенціал суспільства. Однак, попри об'єктивну важливість математики, у багатьох країнах спостерігається стійка тенденція до зниження мотивації учнів до її вивчення, що призводить до низьких академічних досягнень, відтоку талановитої молоді з математичних спеціальностей та загального падіння інтересу до точних наук.

Ця проблема набуває глобального масштабу, про що свідчать результати міжнародних досліджень, таких як Programme for International Student Assessment (PISA). Згідно з даними PISA попередніх років, 59% учнів віком 15-16 років часто відчують тривогу щодо уроків математики, вважаючи їх складними та неприємними. У країнах Європи та Азії певна частина школярів демонструють високу математичну тривожність, що перешкоджає ефективному навчанню та формує негативне ставлення до предмета на все життя: в середньому по країнах ОЕСР лише 52% учнів з високим рівнем досягнень активно ставлять запитання, коли не розуміють матеріал, що вказує на брак внутрішньої мотивації та ініціативи. У багатьох випадках це призводить до того, що учні сприймають математику не як інструмент для розуміння світу, а як абстрактну та відірвану від реальності дисципліну, що посилює демотивацію.

В Україні ситуація не менш тривожна: за опитуваннями, понад дві третини старшокласників (68,2%) відчують значні труднощі з математикою, що робить її лідером серед предметів, з якими учні мають проблеми. Національний звіт PISA 2018 підкреслює, що українські школярі демонструють нижчі показники математичної грамотності порівняно з середніми по ОЕСР, з тенденцією до подальшого зниження мотивації через пандемію, війну та економічні виклики. Основні причини відсутності інтересу включають застарілі методики навчання, фокус на механічному запам'ятовуванні формул замість розуміння, а також зовнішні фактори, такі як стрес і брак релевантності матеріалу до повсякденного життя. Як наслідок, це не тільки знижує академічні результати, але й впливає на психологічний стан учнів, посилюючи тривожність і формуючи фіксоване мислення про власні здібності («математика не для мене»).

Наслідки такої демотивації є довгостроковими: зниження зацікавленості в математиці призводить до дефіциту фахівців у STEM-галузях, що гальмує економічний розвиток. У глобальному контексті, країни з низькою математичною мотивацією ризикують відставати в інноваціях, як зазначається в звітах ОЕСР. В Україні це особливо актуально в умовах війни,

коли освіта повинна сприяти відновленню та адаптації, але мотивація до вивчення точних наук падає через психологічні травми та дистанційне навчання. Тому формування позитивного ставлення до математики стає не лише педагогічною, а й соціальною задачею.

Огляд закордонного досвіду з країн-лідерів PISA дозволяє виявити ефективні стратегії подолання цієї проблеми та допоможе адаптувати кращі практики до української освітньої системи, сприяючи підвищенню мотивації та якості математичної освіти.

Країни для огляду досвіду щодо формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики ми обирали керуючись результатами PISA 2022 від OECD (PISA 2022 Results).

Так ми виділили країни за успіхами учнів у вивченні математики за умовно кожною частиною світу. Це Сінгапур (місце № 1 у рейтингу, 575 балів), Естонія (№ 7, 510), Швейцарія (№ 8, 508), Канада (№ 9, 497), Австралія (№ 16, 487). Країни Південної Америки знаходяться нижче нас в рейтингу, а країни африканського континенту представляла лише Марокко (№ 71, 365 балів), що теж нижче нашої позиції. Україна, як відомо, посідає у цьому рейтингу 41-е місце з балом 441 серед 81 країни.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Сінгапур є лідером у математичній освіті, що підтверджують результати міжнародних тестів, таких як TIMSS та PISA. Водночас наукові дослідження вказують на необхідність покращення мотивації учнів, особливо внутрішньої, оскільки високі досягнення не завжди супроводжуються ентузіазмом до вивчення математики. Багато робіт базуються на теорії самодетермінації (SDT), аналізують профілі мотивації та пропонують альтернативні методики навчання.

Так Yee L. S. (Yee, 2010) у своєму дослідженні стверджує, що учні загалом мають позитивне ставлення до математики, але низьку внутрішню мотивацію переважає зовнішня (наприклад, через винагороди чи покарання). Але внутрішня мотивація сильніше корелює з досягненнями, ніж зовнішня, тому освітяни та батьки замість акценту на зовнішніх стимулах повинні зосередитися на розвитку внутрішньої мотивації дітей для покращення їх результатів.

Дослідження Ng B.L.L., Liu W.C. та Wang J.C.K (Ng та ін., 2016) зосереджено на поглибленому розумінні мотивації учнів та саморегульованого навчання в математиці за допомогою кластерного аналізу. Кластерний аналіз виявив чотири різні профілі навчання, які порівнювали у зв'язку зі сприйнятою підтримкою автономії вчителів, задоволенням потреб, мотиваційними нормами та оцінками. Кластерне профілювання дозволяє вчителям краще розуміти саморегульоване навчання своїх учнів, щоб вони могли застосовувати ефективні методики навчання для сприяння їх мотивації.

Естонія також демонструє високі результати в міжнародних тестах з математики, але дослідження вказують на проблеми з мотивацією учнів, особливо внутрішньою, яка знижується з віком і залежить від сприйняття корисності предмета, самооцінки та

педагогічних методів. Багато робіт базуються на теорії очікуваної цінності (EVT), самодетермінації (SDT) та аналізують погляди учнів щодо вивчення математики.

Так дослідники Terpo M., Soobard R. та Rannikmäe M. (Terpo та ін., 2021) дійшли висновку, що мотивація учнів знижується з віком; теми з повсякденного життя (наприклад, природні катастрофи) учнями сприймаються цікавіше та серйозніше; для формування мотивації необхідна інтеграція реальних життєвих контекстів та міждисциплінарних підходів.

Дослідники Orav-Puurand K., Jukk H., Kraav T., Oras K., Pihlap S. (Orav-Puurand та ін., 2024), аналізуючи досвід учнів 12 класу в онлайн-курсі математики під час пандемії COVID-19, приходять до висновку, що учні цінують гнучкість часу та самооцінку (наприклад, через quizzes), але демотивуються через брак людського зв'язку (відчувають самотність) та технічні труднощі; баланс технологій (відео, Zoom) та взаємодії з вчителями підвищує залученість, а отже мотивація залежить від збереження людського фактору в дистанційному навчанні; без нього технології призводять до розсіювання уваги.

Швейцарія показує стабільно високі результати в міжнародних тестах з математики, проте дослідження швейцарських науковців також вказують на проблеми з мотивацією, особливо в контексті багатомовності країни, переходу між рівнями освіти та впливу педагогічних методів. Роботи часто базуються на теорії самодетермінації (SDT), аналізують роль автономії, компетентності та пов'язаності математики з життям, а також на вивченні та порівнянні досвіду інших країн.

Так науковці Aeschlimann B., Herzog W., Makarova E. (Aeschlimann та ін., 2016) опитавши учнів гімназій та здійснивши аналіз даних, роблять висновки, що формування мотивації позитивно впливає на академічні результати та професійні орієнтації; акцент же потрібно робити на автономній підтримці, створенні методики навчання з фокусом на внутрішній мотивації та просуванні STEM.

Дослідники Gasteiger H., Brunner E., Chen CS. (Gasteiger та ін., 2020) у своїй праці здійснюють порівняльний аналіз педагогічних підходів в дитячих садках Швейцарії, Німеччини та Тайваню і приходять до висновку, що у Швейцарії, на відміну від вчитель-орієнтованих методів в Азії, орієнтація на учня в дитячих садках сприяє ранній мотивації до математики. Їх рекомендація: впровадження учень-орієнтованих методів для посилення залученості дітей в ранній математичній освіті.

Не дивлячись на те, що Канада традиційно демонструє високі результати в математичній освіті за міжнародними тестами, ряд досліджень їх науковців вказують на проблеми з мотивацією, особливо серед іммігрантів, у онлайн-навчанні та під час шкільних переходів на інші рівні. Наукові праці наголошують, що в Канаді мотивація до математики формується через ранні досягнення, самооцінку здатності та культурно-гендерні фактори, з акцентом на іммігрантів та онлайн-навчання. Внутрішня мотивація часто залежить від успіхів, а не навпаки; гендерні розриви вимагають інтервенцій.

Так Garon-Carrier G., Boivin M., Guay F., Kovas Y., Dionne G., Lemelin J. P., Séguin J. R., Vitaro F., Tremblay R. E. (Garon-Carrier та ін., 2015) стверджують, що в канадській початковій школі (Квебек) ранні досягнення в математиці є ключем до формування внутрішньої мотивації, особливо для дівчат, у яких з віком мотивація дещо знижується.

Результати дисертаційного дослідження Crothers S. (Crothers, 2025) показали наявність глибинного культурного фактора, який може впливати на формування в учнів внутрішньої мотивації; стверджують, що психологічні потреби учнів впливають на їх внутрішню мотивацію до навчання; зрештою, свідчать про те, що існують методики навчання, які вчителі можуть використовувати для підтримки психологічних потреб своїх учнів.

В Австралії основними чинниками, що впливають на успішність учнів у математиці, як вважають Wei Y., Zhang Y. (Wei, Zhang, 2025), є підтримка сім'ї, процес вивчення математики та індивідуальні характеристики учнів. Домашній контекст, такий як підтримка соціально-економічного статусу сім'ї, освітній капітал та освіта батьків, високе почуття безпеки, стійкість, допитливість, сильна воля, гарне емоційне управління, добрі стосунки між вчителем і учнем та стале навчання підвищують успішність у математиці. З іншого боку, надмірне використання ІКТ негативно впливає на їх успішність.

Підтверджувальний та дослідницький факторний аналіз даних, зібраних Kirkham J., Chapman E., Male S. (Kirkham та ін., 2023) серед учнів 10-их класів (кількість учнів 886), виявив чотирифакторну модель формування мотивації щодо вивчення математики, яка складається з чітко визначених факторів: переконань щодо компетентності, внутрішньої цінності, цінності досягнень та цінності корисності.

Мета статті: здійснити огляд закордонного досвіду формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики (на базі Сінгапуру, Естонії, Швейцарії, Канади, Австралії) та виявити кращі чинники його формування.

Виклад основного матеріалу. Наведемо узагальнене визначення закордонними науковцями поняття «позитивне ставлення учнів до вивчення математики»:

Позитивне ставлення до вивчення математики – це стійка установка учня, яка проявляється у трьох взаємопов'язаних компонентах:

Емоційний компонент – учень відчуває зацікавленість, задоволення, впевненість або, принаймні, готовність до роботи з математикою. Наприклад, учневі «подобається математика», або «я можу справитися з математикою» тощо (Bhowmik, Banerjee, 2013).

Когнітивний/пізнавальний компонент – включає віру учня у власні математичні здібності (самоефективність), у корисність математики для себе, розуміння цінності її в навчанні чи житті. Наприклад: «математика мені корисна», «я можу стати кращим у математиці» (Wen, Dubé, 2022).

Поведінковий/діяльнісний компонент – учень реалізує своє ставлення в поведінці: залучається до математичних активностей, намагається розв'язувати задачі, не уникає математики, готовий докладати зусиль (Wakhata та ін., 2024).

Отже, позитивне ставлення до математики можна визначити як «навчено-складену схильність учня реагувати на математику з інтересом, вірою у власні сили і готовністю діяти (учитися, працювати, долати труднощі) у межах вивчення цієї дисципліни».

Розглянемо аспекти формування позитивного ставлення учнів до математики у вище представлених країнах.

Особливості формування мотивації учнів до вивчення математики в Сінгапурі такі: мотивація формується через акцент на проблемному навчанні, життєвих контекстах математичних завдань, інноваційних методах та балансі зовнішньої та внутрішньої мотивації. Розглянемо деякі ключові особливості.

1. Акцент на проблемному навчанні та життєвих контекстах задач для підвищення релевантності.

У сінгапурській математичній програмі центральним є розв'язання реальних проблем. Зв'язок математики з повсякденним життям та економічними потребами мотивує учнів. Наприклад, логарифми пов'язують зі шкалою Ріхтера для вимірювання сили землетрусів, а подібність трикутників – з вимірюванням висот дерев чи медичними застосуваннями (наприклад, радіаційна онкологія). Такий підхід задовольняє потребу в релевантності, посилюючи зовнішню мотивацію (корисність для майбутньої кар'єри) та внутрішню (цікавість). Дослідження показують, що це сприяє кращій залученості, особливо в диференційованих програмах для різних рівнів (наприклад, Foundation Mathematics для слабших учнів) (ґео, 2022).

2. Використання інноваційних та ігрових методів для розвитку внутрішньої мотивації.

Щоб культивувати радість від навчання, вчителі застосовують пісні, відео, історії, комікси та гейміфікацію. Наприклад, пісні про полігони чи похідні («I Will Derive!») роблять уроки веселими, а онлайн-escape rooms змушують розв'язувати рівняння для «втечі». Дослідження серед вчителів показують, що 70% інтегрують реальні контексти, але лише 34% регулярно використовують розважальні ресурси, хоча вони ефективно підвищують інтерес. Для слабших учнів (наприклад, у Normal (Technical) потоках) історії та рольові ігри допомагають подолати низьку самооцінку, перетворюючи пасивне навчання на активне та розвиваючи почуття контролю (ґео, 2022).

3. Розвиток самооцінки та само-ефективності, особливо для слабших учнів.

Мотивація залежить від академічної само-концепції (сприйняття власних здібностей) та само-ефективності (віри в успіх). У Сінгапурі робиться акцент на ранньому втручанні: для низькоуспішних учнів (наприклад, Secondary 1 Normal (Technical)) використовують альтернативні методи, такі як комікси для алгебри чи статистики, щоб розірвати цикл

низької мотивації. Дослідження показують, що успіхи в таких активностях підвищують самооцінку та мотивацію, сприяючи довгостроковому інтересу. Загалом, 97% вчителів застосовують поступово складніші завдання для розвитку компетентності, а 98% заохочують наполегливість (*Why the Singapore Approach to Maths Works - Open Minds Campus*, б. д.).

4. Баланс зовнішньої та внутрішньої мотивації в контексті високих очікувань.

Учні часто мають позитивне ставлення до математики, але в ньому домінує зовнішня мотивація (через іспити та соціальну мобільність), тоді як внутрішня слабша. Дослідження серед 984 студентів джуніор-коледжів показало слабкий зв'язок між зовнішньою мотивацією та досягненнями, але сильний з внутрішньою. Система компенсує це через ініціативи як «Thinking Schools, Learning Nation» (1997) та «Teach Less, Learn More» (2003), що зменшують обсяг контенту на 10-30% для фокусу на креативності та взаємодії. Батьки та суспільство підтримують високі очікування, а школи надають ресурси для всіх, включаючи субсидії для малозабезпечених.

5. Роль вчителів та професійного розвитку.

Вчителі є ключовими фігурами, вони проходять 100 годин професійного розвитку щорічно, фокусуючись на інноваційній педагогіці та інтеграції ІТ. Система EPMS стимулює прогрес від початківця до майстра, з акцентом на моніторинг прогресу учнів та підтримку. Дослідження профілів мотивації підтверджують, що учні з високою мотивацією (зусилля, цінність, компетентність) досягають кращих результатів, а вчителі сприяють цьому через учень-центровані методи (Wang та ін., 2017).

Ці особливості роблять сингапурську систему ефективною, але орієнтованою на культурний контекст з високим тиском на досягнення.

Особливості формування мотивації учнів до вивчення математики в Естонії пов'язані із поєднанням технологій, реальних контекстів, внутрішніх орієнтацій учнів та ролі вчителів. Розглянемо їх.

1. Використання гейміфікації та технологій для підвищення інтересу

Естонія активно впроваджує цифрові інструменти для мотивації учнів. Наприклад, платформа 99math, створена естонським школярем Тімо Тіммі, перетворює уроки математики на конкурентні онлайн-ігри. Учні від 1-го до 12-го класу змагаються в реальному часі у розв'язуванні задач на додавання, віднімання чи множення. Це залучає тисячі школярів одночасно (наприклад, понад 9000 учнів з 200 шкіл в одному змаганні), покращує атмосферу в класі та робить математику веселою. Вчителі відзначають зростання мотивації, а учні просять повторювати ігри. Такий підхід вирішує проблему зниження інтересу до математики, стимулюючи обговорення математичних концепцій.

2. Інтеграція реальних життєвих контекстів (екстраматематичні знання).

Дослідження показують, що мотивація посилюється через зв'язок математики з повсякденним життям. У 5-му класі естонських шкіл екстраматематичні знання (наприклад,

розуміння цін у магазинах, знижок чи операцій у торгівлі) позитивно впливають на мотивацію, підвищуючи очікування успіху, інтерес, корисність та зменшуючи сприйняття витрат на завдання. Це діє як посередник між знаннями та розв'язанням задач: учні з кращими реальними контекстами впевненіші, менше бояться помилок і краще виконують математичні вправи. Такий підхід базується на теорії очікування-цінності (SEVT) і рекомендується для інтеграції в уроки (Sigus & Mädamürk, 2025).

3. Формування внутрішньої мотивації через переконання та цілі учнів.

Естонські учні, особливо в університетах і старших класах, демонструють орієнтацію на майстерність (бажання розвивати навички), що є сильним внутрішнім мотиватором. Дослідження серед 970 першокурсників дозволило виділити такі основні погляди на математику: орієнтація на майстерність, цінність математики (корисність для суспільства та інших предметів), компетентність учня, роль вчителя та уникнення шахрайства. Внутрішня мотивація переважає над зовнішньою (орієнтація на демонстрацію компетентності іншим). Учні з високою самооцінкою компетентності та сприйняттям цінності математики більш мотивовані до вивчення. У молодших класах (7-11 класи) переконання про математику як корисну та цікаву також посилюють мотивацію (Kaldo & Hannula, 2012).

4. Роль вчителів та шкільної системи.

Вчителі відіграють ключову роль: їхні переконання про природу математики та самоефективність впливають на здатність учнів самостійно керувати навчанням. У первинній освіті вчителі, які вірять у динамічну природу математики, сприяють кращій мотивації. Естонська система освіти, з її акцентом на розвиток можливостей учнів, включає перехід від класного до предметного навчання, що впливає на мотивацію. Крім того, школи з вступними іспитами мотивують учнів через акцент на високих оцінках з математики, граматики та природничих наук. Міжнародний проект MATHMot (за участю Естонії) показує, що мотивація залежить від класного середовища, батьківських установок та гендерних факторів, з варіаціями порівняно з іншими країнами (наприклад, Норвегія, Швеція) (Radišić & Baucal, 2024).

Загалом, естонський підхід поєднує індивідуальні, шкільні та домашні фактори для стійкої мотивації.

Формування мотивації учнів до вивчення математики в Швейцарії відбувається через комбінацію емоційних факторів, самооцінки, реальних життєвих контекстів та дизайну уроків. Розглянемо нижче ключові особливості.

1. Мотиваційний дизайн уроків для підвищення інтересу та вибору STEM-кар'єри.

У швейцарських гімназіях (вищі школи) застосовується мотиваційний дизайн уроків математики та природничих наук, базований на моделі очікувань-цінностей (expectancy-value model). Дослідження за участю 3032 учнів з 167 класів показало, що ефективні методики навчання (створення цікавого середовища, підтримка, акцент на релевантності) значно

підвищують внутрішню цінність (задоволення та інтерес) та корисність (релевантність для майбутнього) математики. Це призводить до зростання мотивації та ймовірності вибору STEM-спеціальностей в університеті. Методики ефективні незалежно від статі вчителя чи учня, допомагаючи зменшити гендерний розрив у STEM. Такі підходи рекомендуються для запобігання зниженню інтересу серед хлопців та дівчат (Aeschlimann та ін., 2016).

2. Інтеграція реальних контекстів та емоційних факторів.

Мотивація посилюється через зв'язок математики з емоціями та повсякденним життям. Дослідження серед учнів 7-х класів (415 учасників) виявило, що високі досягнення в математиці асоціюються з сильним академічним само-концептом, який сприяє позитивним емоціям (радість), зниженню тривоги та само-детермінованій мотивації (за теорією само-детермінації). Учні з іммігрантським фоном мають нижчі бали, але вищу мотивацію та тривогу, що вказує на необхідність емоційної підтримки. Реальні контексти (наприклад, застосування математики в повсякденні) допомагають формувати позитивні емоції та мотивацію, особливо в базових школах (Brandenberger та ін., 2017).

3. Формування внутрішньої мотивації через само-ефективність та цінності.

Внутрішня мотивація (орієнтація на майстерність, само-ефективність) є ключовою в швейцарській освіті. Дослідження показують, що мотивація є предиктором математичної компетентності в PISA понад інтелект та попередні досягнення. Учні з високою само-ефективністю та сприйняттям цінності математики (корисність для кар'єри) демонструють кращі результати. Методики навчання включають розвиток переконань про математику як динамічну та корисну, що посилює внутрішню орієнтацію.

4. Роль вчителів та шкільного середовища.

Вчителі відіграють центральну роль у формуванні мотивації через якісне навчання. Дослідження підкреслюють, що інструкційна якість (чіткі пояснення, зворотний зв'язок, залучення) впливає на мотиваційні переконання учнів. У мультирівневому аналізі шкільне середовище (наприклад, акцент на само-детермінації) посилює мотивацію, особливо в гетерогенних класах з іммігрантами. Стать учителя не впливає, але його/її переконання про природу математики (динамічна чи статична) формують агентність учнів.

5. Загальні системні фактори.

Швейцарія інвестує в дослідження мотивації через PISA та національні проекти, де мотивація корелює з досягненнями (81% учнів досягають рівня 2+ з математики в PISA 2022). Зниження мотивації в перехідні періоди компенсується емоційною підтримкою та батьківськими установками. Культурний контекст (багатомовність, імміграція) також впливає: іммігранти мотивованіші, але потребують додаткової допомоги. Загалом, підхід поєднує індивідуальні (емоції, само-концепт), шкільні (дизайн уроків) та соціальні фактори для стійкої мотивації.

Особливості формування мотивації учнів до вивчення математики в Канаді наступні: акцент на позитивних установках, само-ефективності, зменшенні тривоги, зусиллях та інтеграції реальних життєвих контекстів з урахуванням провінційних відмінностей. Охарактеризуємо ці ключові особливості.

1. Формування позитивних установок та емоційних факторів через реальні життєві контексти.

Позитивні установки до математики (насолюдження, сприйняття як легкого та корисного) є ключовим мотиватором і корелюють з вищими досягненнями. Це формується через інтеграцію реальних контекстів у навчання, таких як застосування математики в повсякденні (розрахунок податків, часу подорожей), що підвищує корисність та інтерес. Дослідження PISA показують, що 50% канадських учнів вважають математику улюбленим предметом, а 93% прагнуть успіху в ній, що сприяє залученості. Тривога (занепокоєння про помилки чи оцінки) знижує мотивацію та результати (наприклад, 481 бал для високотривожних проти 547 для низькотривожних), тому стратегії зменшення тривоги, підтримка та успіхи є важливими.

2. Розвиток само-ефективності та внутрішньої мотивації через ранні успіхи.

Внутрішня мотивація (інтерес та насолода) формується через попередні досягнення, а не навпаки. У дослідженні, у якому брало участь 1478 канадських дітей 1-4 класів (Квебек), з'ясувалось, що успіхи в математиці в ранніх класах передбачають вищу мотивацію в наступних, з акцентом на зростання (математичні здібності – результат зусиль, а не вродженість). Само-ефективність (віра в здатність розв'язувати задачі) є сильним предиктором: учні, впевнені в розрахунках (наприклад, податки чи рівняння), набирають 556-562 бали проти 422-450 для невпевнених. Це розвивається через поступові виклики та підтримку, особливо для дівчат, у яких мотивація знижується швидше (Garon-Carrier та ін., 2015).

3. Використання дослідницького навчання (inquiry-based learning) для підвищення інтересу.

Дослідницьке навчання (IBL), де учні ставлять питання, досліджують та розробляють стратегії, формує мотивацію через сприйняття математики як креативної та корисної. У проєкті SUM (канадський контекст) з 248 учнями 11-16 років показано, що підтримка вчителів через професійний розвиток посилює внутрішню цінність (насолюда), само-ефективність та корисність математики. Учні з частішим IBL вважають математику творчою, що корелює з вищою мотивацією. Це компенсує зниження інтересу в перехідний період (з початкової до середньої школи), особливо для дівчат, і сприяє зростанню мислення (Pedersen & Haavold, 2023).

4. Роль вчителів та методики навчання у стимулюванні зусиль.

Вчителі формують мотивацію через методики, які базуються на теорії очікування-цінності: соціальні (співпраця), афективні (конкретні матеріали, відкриті задачі), когнітивні

(мислення, комунікація) та оціночні (зворотний зв'язок, самооцінка). Зусилля учнів (участь у дискусіях, увага, наполегливість) корелюють з вищими балами (531 для активних проти 503 для пасивних). Домашні завдання в помірній кількості (30 хв-1 год) оптимальні, тоді як надмірні (>3 год) знижують мотивацію. Додаткові заняття (індивідуальні чи малогрупові) допомагають, особливо в пандемійний період, де щоденна підтримка (матеріали, віртуальні уроки) підвищувала результати (521 проти 495).

5. Загальні системні фактори та провінційні варіації.

Канадська система акцентується на учень-центрованих реформах, де мотивація залежить від соціально-економічного статусу (10% варіації в результатах), доступу до ресурсів (пристрої, цифрові матеріали) та пандемійної підтримки. Провінційні відмінності: Квебек має вищі показники (514 балів, менші розриви через тривогу – 56 балів) завдяки сильній само-ефективності; Нова Шотландія та Альберта – більші розриви через тривогу (95-87 балів). Загалом, мотивація формується через цикл успіхів, підтримки та релевантності, з фокусом на зменшенні нерівності між учнями (Sagwar та ін., 2012).

Особливостями формування мотивації учнів до вивчення математики в Австралії є акцент на само-ефективності, емоційних факторах, цінностях учнів, вчительських методиках та інтеграції реальних життєвих контекстів, з урахуванням таких проблем, як тривога та низький рівень зусилля (майже 80% учнів не докладали повних зусиль у PISA). Висвітливо детальніше ключові особливості.

1. Розвиток само-ефективності та внутрішньої мотивації через індивідуальні та класні фактори.

Мотивація переважно варіюється на рівні індивідуальних особливостей учнів, де ключовими є само-ефективність (віра в здатність розв'язувати задачі), орієнтація на майстерність (фокус на розумінні) та наполегливість (продовження зусиль попри труднощі). Дослідження, яке охопило 1701 учня 8-10 класів показало, що ці адаптивні фактори домінують над такими, як тривога чи уникнення невдач. На класному рівні (варіація до 1/3) стосунки між вчителем та учнем посилюють насолоду від математики та зменшують демотивацію (Green та ін., 2007).

2. Інтеграція цінностей учнів (вправність, веселощі, зусилля) для підвищення інтересу.

Учні цінують «вправність» (smartness, 9%), «веселощі» (fun, 5.3%) та «зусилля» (effort, 4.8%) як ключові для успіху в математиці, що формує мотивацію через конотативний драйв (воля до фокусу та наполегливості). Дослідження серед 625 учнів показало, що ці цінності пов'язані з внутрішньою мотивацією: веселощі стимулюють емоційний зв'язок, зусилля – зростання мислення (здібності як результат праці), а вправність може демотивувати, якщо сприймається як вроджена. Відсутність акценту на досягненнях (на відміну від топ-країн) вказує на внутрішню орієнтацію, де програми інтегрують розважальні елементи (ігри, реальні задачі) для стійкої мотивації (Han & Seah, 2019).

3. Використання теорії очікування-цінності (SEVT) для вибору курсів та STEM-орієнтації.

Мотивація до вибору вищих курсів математики (наприклад, Methods чи Specialist) базується на SEVT: очікування успіху (компетентність), внутрішня цінність (насолюда), досягнення-цінність (самоідентифікація) та корисність (для кар'єри). Дослідження серед 886 учнів 10 класу виявило, що витрати (зусилля, тривога, втрата альтернатив) інтегровані в ці компоненти, а не окремі, – наприклад, тривога знижує компетентність, а зусилля – насолоду. Це формує мотивацію через баланс витрат-вигод: інтервенції підвищують корисність (зв'язок з STEM) та зменшують тривогу, аби протидіяти зменшенню зарахувань на вищі курси (Kirkham та ін., 2023).

4. Роль вчительської методики та шкільного середовища в стимулюванні когнітивної активації.

Вчителі формують мотивацію через когнітивну активацію (заохочення міркування), підтримку (допомога, інтерес) та експозицію до задач 21 століття (моделювання, інтерпретація даних). PISA-дані показують, що позитивний дисциплінарний клімат та безпека посилюють мотивацію, тоді як надмірна тривога чи булінг її знижують. Уроки фокусуються на цікавості та емоційному контролі, з акцентом на незалежне мислення, аби уникнути негативу від надмірної групової роботи. Це компенсує зниження мотивації в перехідні періоди.

5. Загальні системні фактори та PISA-інсайти.

Австралійська система акцентує на учень-центрованих реформах, де мотивація залежить від домашнього контексту (19.9% варіації), ресурсів та пандемійної підтримки. Провінційні відмінності (наприклад, сильніші в Квінсленді) та низьке зусилля в тестах (80% не старалися повноцінно) вказують на проблеми з інтересом. Загалом, мотивація формується через цикл само-ефективності, цінностей та практик, з фокусом на зменшенні нерівності (гендер, соціо-економіка) та посиленні STEM-мотивації (Wei & Zhang, 2025).

Висновки. У нашому огляді ми не розглядали вплив на формування мотивації учнів до вивчення математики різноманітних математичних змагань, конкурсів, олімпіад та інших видів позакласної роботи та математичних активностей, які функціонують у цих країнах. Це, на нашу думку, вартє окремого дослідження.

Також зауважимо що, у порівнянні український досвід формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики є цілком самодостатнім, дієвим, креативним та має свої власні здобутки та традиції. В умовах війни українські вчителі на власному ентузіазмі та щирому захопленні своєю справою перетворюють математику з складного предмета на джерело натхнення та зростання молодого покоління.

Все ж таки, на основі аналізу особливостей формування мотивації до математики в Сінгапурі (акцент на проблемному навчанні, реальних життєвих контекстах, інноваціях та балансі мотивації), Естонії (гейміфікація, внутрішня мотивація, роль вчителів), Швейцарії

(мотиваційний дизайн уроків, емоційна підтримка, само-ефективність), Канаді (позитивні установки, дослідницьке навчання, само-ефективність) та Австралії (само-ефективність, цінності учнів, когнітивна активація), сформулюємо певні рекомендації, які були б, на нашу думку, корисні для української освіти. Вони враховують контекст Нової української школи (НУШ) та сучасні виклики (війна, дистанційне навчання). Рекомендації спрямовані на інтеграцію кращих практик для підвищення інтересу до вивчення математики, зменшення тривоги та розвитку стійкої мотивації.

1. Інтеграція реальних життєвих контекстів та проблемного навчання (з Сінгапуру, Естонії, Швейцарії, Канади). Варто адаптовувати сінгапурську модель «розв'язання проблем як основна мета»: впроваджувати задачі з повсякденного життя (розрахунок витрат на продукти, геометрія в архітектурі українських міст), поєднуючи з історичними чи патріотичними елементами (наприклад, математичні моделі в історії України). Це посилить релевантність, як у естонських екстрематематичних знаннях. Варто застосовувати швейцарський та канадський підхід: використовувати теорію очікування-цінності для зв'язку математики з емоціями та кар'єрою (STEM). Потрібно оновлювати програми НУШ, додавши у програму значний відсоток задач з реальним життєвим контекстом; тренувати вчителів через вебінари для інтеграції з різноманітними онлайн-інструментами.

2. Використання гейміфікації та інноваційних методів (з Естонії, Сінгапуру, Австралії). Аналогічно естонській платформі 99math варто впроваджувати онлайн-ігри та змагання в реальному часі для молодших класів, перетворюючи уроки на веселі турніри (додавання, множення). Це підвищить залученість до математики. З австралійських цінностей (веселощі, зусилля) можна інтегрувати ігрові елементи (комікси, escape rooms) для слабших учнів, розвиваючи зростання мислення («здібності – результат праці»). Можна розробити національну платформу на базі NaUrok чи аналогів, з безкоштовними іграми; проводити шкільні/регіональні онлайн-турніри, залучаючи частину уроків на гейміфікацію, з відповідним моніторингом мотивації через опитування.

3. Розвиток само-ефективності та внутрішньої мотивації (з Швейцарії, Канади, Австралії, Сінгапуру). Згідно канадського та швейцарського досвіду можна фокусуватися на ранніх успіхах у 1–4 класах через поступові виклики та зворотний зв'язок, розвиваючи віру молодших школярів у свої здібності. Згідно австралійської SEVT можна балансувати витрати (тривога) та вигоди (насолада, корисність). Аналогічно сінгапурському підходу для слабших учнів можна використовувати альтернативні методи (історії, рольові ігри) для подолання низької самооцінки.

4. Посилення ролі вчителів та шкільного середовища, зокрема окрема спеціальна підготовка вчителів до роботи з емоційними аспектами навчання (зворотній зв'язок, підтримка, протидія булінгу тощо).

Звісно, реалізація таких рекомендацій потребує сталої і фундаментальної державної іміджевої та фінансової підтримки математики та професії вчителя.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

References

- Aeschlimann, B., Herzog, W., & Makarova, E. (2016). How to foster students' motivation in mathematics and science classes and promote students' STEM career choice. A study in Swiss high schools. *International Journal of Educational Research*, 79, 31-41. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.06.004>
- Bhowmik, M., & Banerjee, B. (2013). Fuzzy measure of secondary students' attitude towards Mathematics. *International Journal of Research Studies in Education*. <https://doi.org/10.5861/IJRSE.2012.122>
- Brandenberger, C. C., Hagenauer, G., & Hascher, T. (2017). Zum Zusammenspiel von Mathematikleistung, Schüler/innen-motivation und Lernemotionen auf der Sekundarstufe 1 – ein Vergleich zwischen Schüler/innen mit und ohne Migrationshintergrund in der Schweiz. *Swiss Journal of Educational Research*, 39(2), 375-394. <https://doi.org/10.24452/sjer.39.2.5016>
- Crothers, S. (2025). Postsecondary business mathematics students' motivation to learn in an e-learning environment (Doctoral thesis, University of Calgary, Calgary, Canada). <https://hdl.handle.net/1880/122843>
- Garon-Carrier, G., Boivin, M., Guay, F., Kovas, Y., Dionne, G., Lemelin, J. P., Séguin, J. R., Vitaro, F., & Tremblay, R. E. (2016). Intrinsic Motivation and Achievement in Mathematics in Elementary School: A Longitudinal Investigation of Their Association. *Child development*, 87(1), 165-175. <https://doi.org/10.1111/cdev.12458>
- Gasteiger, H., Brunner, E. & Chen, C. (2020, online first). Basic conditions of early mathematics education – a comparison between Germany, Taiwan and Switzerland. *International Journal of Science and Mathematics Education*. doi:10.1007/s10763-019-10044-x.
- Green, J., Martin, A. J., & Marsh, H. W. (2007). Motivation and engagement in English, mathematics and science high school subjects: Towards an understanding of multidimensional domain specificity. *Learning and Individual Differences*, 17(3), 269-279. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2006.12.003>
- Han, C. D., & Seah, W. T. (2019). What Australian Students Say They Value Most in Their Mathematics Learning. *Mathematics Education Research Group of Australasia*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED604498.pdf>
- Kaldo, I., & Hannula, M. (2012). Structure of university students' view of mathematics in Estonia. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(2). <https://doi.org/10.7146/nomad.v17i2.148418>
- Kirkham, J., Chapman, E., & Male, S. (2023). Measuring Motivation for Mathematics Course Choice in Secondary School Students: Interrelationships Between Cost and Other Situated Expectancy-Value Theory Components. *Sage Open*, 13(2). <https://doi.org/10.1177/21582440231180671>
- Ng, B.L.L., Liu, W.C. & Wang, J.C.K. (2016). Student Motivation and Learning in Mathematics and Science: A Cluster Analysis. *Int J of Sci and Math Educ* 14, 1359-1376. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9654-1>

- Orav-Puurand, K., Jukk, H., Kraav, T., Oras, K., & Pihlap, S. (2024). A Study of Estonian High School Students' views on Learning Mathematics and the Integration of Digital Tools in Distance Learning. *Acta Didactica Napocensia*, 17(1), 36–43. <https://doi.org/10.24193/adn.17.1.3>
- Pedersen, I. F., & Haavold, P. Ø. (2023). Students' mathematical beliefs and motivation in the context of inquiry-based mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(8), 1649–1663. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2189171>
- Radišić, J., & Baucal, A. (2024). Mathematics motivation in primary education: building blocks that matter. *European Journal of Psychology of Education*. <https://doi.org/10.1007/s10212-024-00832-7>
- Sarwar, G. S., Zerpa, C., Hachey, K., Simon, M., & Van Barneveld, C. (2012). Teaching Practices and Student Motivation that Influence Student Achievement on Large-Scale Assessments. *International Journal of Education*, 4(3). <https://doi.org/10.5296/ije.v4i3.2087>
- Sigus, H., & Mädamürk, K. (2025). Students' motivation as a mediator between extra-mathematical knowledge and word problem-solving. *Discover Education*, 4(1). <https://doi.org/10.1007/s44217-025-00595-3>
- Teppo, M., Soobard, R., & Rannikmäe, M. (2021). A Study Comparing Intrinsic Motivation and Opinions on Learning Science (Grades 6) and Taking the International PISA Test (Grade 9). *Education Sciences*, 11(1), 14. <https://doi.org/10.3390/educsci11010014>
- Wakhata, R., Balimuttajjo, S., & Mutarutinya, V. (2024). Relationship between students' attitude towards, and performance in mathematics word problems. *PloS one*, 19(2), e0278593. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0278593>
- Wang, C. K. J., Liu, W. C., Nie, Y., Chye, Y. L. S., Lim, B. S. C., Liem, G. A., Tay, E. G., Hong, Y.-Y., & Chiu, C.-Y. (2017). Latent profile analysis of students' motivation and outcomes in mathematics: an organismic integration theory perspective. *Heliyon*, 3 (5), Стаття e00308. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2017.e00308>
- Wei, Y., & Zhang, Y. (2025). Exploration of factors affecting Australian students' mathematics grades: a multiple regression analysis based on PISA 2022 data. *Frontiers in psychology*, 16, 1611350. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2025.1611350>
- Wen, R., & Dubé, A. K. (2022). A Systematic Review of Secondary Students' Attitudes Towards Mathematics and its Relations With Mathematics Achievement. *Journal of Numerical Cognition*, 8(2), Article e7937. <https://doi.org/10.5964/jnc.7937>
- Why the Singapore Approach to Maths Works - Open Minds Campus. (б. д.). Open Minds Campus. <https://openmindscampus.co.za/why-the-singapore-approach-to-maths-works/>
- Yee, L. S. (2010). Mathematics Attitudes and Achievement of Junior College Students in Singapore. In G. Merrilyn, G. Vince, & D. Shelley (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 681-689). Mathematics Education Research Group of Australasia. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED521019.pdf>
- Yeo, J. B. W. (2022). Motivating mathematics students and cultivating the joy of learning mathematics. *The Mathematician Educator*, 3(1), 41-61. <https://ame.org.sg/2022/06/01/tme2022-vol-3-no-1-pp-41-61>

Отримано / Received 26.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 26.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 37.016:51(091):159.955

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-81-91

Історія математичних відкриттів як засіб розвитку критичного мислення учнів

Аліна Воевода

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна.

E-mail: alina.voievoda@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1844-6759>

Анотація

У статті розглянуто проблему розвитку критичного мислення учнів засобами історії математичних відкриттів. Підкреслено, що в умовах становлення сучасної освітньої парадигми, орієнтованої на компетентнісний підхід, формування критичного мислення є одним із провідних завдань навчання. Проаналізовано погляди закордонних і вітчизняних науковців щодо сутності критичного мислення як усвідомленого, рефлексивного, самостійного процесу осмислення інформації, що ґрунтується на доведеннях і логічних судженнях. Обґрунтовано, що історія математичних відкриттів має значний потенціал для розвитку критичного мислення, адже показує процес становлення наукових ідей, шлях від помилок і сумнівів до доведених істин. Запропоновано низку методичних прийомів, ефективних у цьому контексті: створення проблемних ситуацій з історичним змістом, використання інтерактивних методів, організація дослідницьких проєктів, підготовка цифрових продуктів (презентацій, відеороликів), а також розв'язування історичних математичних задач. Наголошено, що залучення учнів до пізнання історії науки сприяє розвитку аналітичного мислення, формує вміння порівнювати, аргументувати, оцінювати різні точки зору та приймати виважені рішення. У результаті зроблено висновок, що історія математики є потужним дидактичним засобом розвитку критичного мислення, який поєднує пізнавальний, дослідницький і виховний потенціал навчання, сприяючи становленню творчої, мислячої, самостійної особистості учня.

Ключові слова: критичне мислення, історія математики, математичні відкриття, компетентнісний підхід, методика навчання математики, історичні задачі.

UDC 37.016:51(091):159.955

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-81-91

The history of mathematical discoveries as a means of developing students' critical thinking

Alina Voievoda

Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine.

E-mail: alina.voievoda@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1844-6759>

Abstract

The article examines the problem of developing students' critical thinking through the study of the history of mathematical discoveries. It emphasizes that, within the modern educational paradigm focused on the competence-based approach, the formation of critical thinking is one of the key objectives of learning. The views of foreign and Ukrainian scholars (J. Dewey, M. Lipman, D. Halpern, P. Saukh, S. Terno, O. Pometun, and others) on the essence of critical thinking as a conscious, reflective, and independent process of reasoning based on evidence and logic are analyzed. It is substantiated that the history of mathematical discoveries has great potential for developing critical thinking, as it demonstrates the evolution of scientific ideas, the path from mistakes and doubts to proven truths. A set of effective methodological techniques is proposed, including the creation of problem-based situations with historical content, the use of interactive methods, the organization of research projects, the preparation of digital products (presentations, videos), and the solving of historical mathematical problems. It is emphasized that engaging students in exploring the history of science contributes to the development of analytical abilities, fosters skills of comparison, argumentation, evaluation of various viewpoints, and the ability to make reasoned decisions. The article concludes that the history of mathematics serves as a powerful didactic tool for fostering critical thinking, combining cognitive, research, and educational potential, and promoting the development of creative, thoughtful, and independent learners.

Keywords: critical thinking, history of mathematics, mathematical discoveries, competence-based approach, mathematics teaching methods, historical problems.

Постановка проблеми. Складність сучасного життя, величезні потоки інформації та маніпулювання нею вимагають від кожної людини вміння аналізувати, критично мислити і оцінювати факти, визначати альтернативи і щоразу робити той чи інший вибір.

Розвиток критичного мислення школярів в умовах становлення сучасної освітньої парадигми виступає одним з наскрізних завдань освітнього процесу, орієнтованого на компетентнісний підхід, який передбачає опанування здобувачами освіти не лише певною сукупністю знань, умінь і навичок, але й оволодіння способами діяльності ефективного використання набутих знань для вирішення життєвих і професійних проблем. Науковці називають критичне мислення одним із ключових умінь ХХІ століття, яке разом з креативністю, комунікацією і кооперацією складає сучасну систему компетентностей «4 К» (Саух, 2021).

Ці характеристики надзвичайно актуальні в контексті сучасних тенденцій суспільного розвитку, які набувають загального соціантропологічного характеру і охоплюють усі сфери людського життя: від освіти (навчання) до практичної діяльності, від форм управління до способів мислення, тощо. Тому формування критичного мислення стає не лише складовою компетентнісного підходу, але й узагальнюючою характеристикою, що актуалізує проблеми самовизначення людини в динамічному інформаційному просторі.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Теоретичні основи становлення та розвитку теорії формування критичного мислення заклали роботи американських філософа і педагога Дж. Д'юї (Д'юї, 2003) соціолога та філософа У. Самнера, філософа М. Ліпмана (Lipman, 1991). Активно займалися вивченням питань розвитку критичного мислення Дж. А. Браус, Д. Вуд, Д. Гелперн, Р. Енніс, Д. Клустер, Дж. Лоу, К. Мередіт, Ч. Темл, Дж. Стіл (Стіл та ін., 2001).

В Україні одними з перших порушили проблематику розвитку критичного мислення харківські науковці С. Тягло та Т. Воропай (Тягло, 1999).

Дослідженнями розвитку критичного мислення в контексті інноваційного характеру української освіти займаються В. Надурак (Надурак, 2022), П. Саух (Саух, 2021), С. Терно (Терно, 2021) та інші. Особливості становлення та розвитку критичного мислення учнів в Новій українській школі досліджували Н. Демченко (Демченко, 2022), А. Лякішева (Лякішева та ін., 2022), І. Кашуб'як, І. Сущенко, О. Пометун (Пометун, Сущенко, 2017) та ін. Питання розвитку критичного мислення учнів на уроках математики висвітлені в працях О. Барболіної (Барболіна, 2016), О. Матяш (Матяш, 2016), С. Скворцової (Скворцова, 2016), О. Чашечнікової (Чашечнікова, 2013) та ін.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Проблема розвитку критичного мислення надзвичайно актуальна ще й з огляду її впливу на підвищення якості математичної освіти. Адже, згідно Державного стандарту базової і повної середньої освіти метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості учня через формування математичної

компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя.

Вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів з математичної освітньої галузі передбачають, що учень:

- досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
- моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблем;
- критично оцінює процес і результат розв'язання проблем;
- розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020).

Тобто критичне мислення — ключова навичка, що підтримується стандартом як частина ключових компетентностей.

Незважаючи на різнопланові дослідження розвитку критичного мислення в процесі навчання математики вказане питання науковці не розглядали в контексті застосування історії математичних відкриттів. Звернення до історичного матеріалу на уроках математики має широкі можливості для розвитку критичного мислення учнів, адже показує, що будь-яке наукове відкриття не виникає миттєво, а є результатом роздумів, сумнівів, помилок, перевірок і доведень.

Мета статті – проаналізувати можливості розвитку критичного мислення учнів засобами історії математики та запропонувати шляхи удосконалення даного процесу.

Виклад основного матеріалу. Існує чимало трактувань критичного мислення як педагогічного феномену. Усе це вказує на актуальність і широту досліджуваної проблеми. Найчастіше провідні науковці розглядають критичне мислення в контексті осмислення основних теорій, принципів, методів і понять, а його формування вважають одним з найважливіших завдань освіти.

М. Ліпман, засновник Інституту критичного мислення у США, розглядає критичне мислення як уміння мислити компетентно й відповідально, формуючи обґрунтовані судження, оскільки воно спирається на певні критерії оцінювання та має здатність до самовдосконалення (Lipman, 1991).

Роберт Енніс, американський дослідник, філософ і педагог ХХІ ст., який зробив значний внесок у розвиток поняття «критичне мислення», описує його як «рефлексивне мислення, спрямоване на обґрунтування рішення про те, у що вірити і що робити» (Ennis, 2018, p.169). Американська психологиня Дайана Халперн характеризує критичне мислення як аргументоване, цілеспрямоване мислення, що використовується для вирішення проблем, формулювання висновків та прийняття рішень (Halpern, 2014).

Українські вчені-психологи С. Максименко, В. Соловієнко стверджують, що «критичність мислення виявляється у здатності суб'єкта пізнавальної діяльності не потрапляти під вплив

чужих думок, об'єктивно оцінювати позитивні та негативні аспекти явища чи факту, виявляти цінне та помилкове в них. Людина з критичним розумом вимогливо оцінює власні думки, ретельно перевіряє рішення, зважає всі «за» і «проти», виявляючи тим самим самокритичне ставлення до власних дій» (Максименко, 2000, с. 123–124).

Українська дослідниця-педагогиня О. Пометун трактує критичне мислення як здатність людини усвідомлювати власну позицію з того чи іншого питання, вміння знаходити нові ідеї, аналізувати події і оцінювати їх, приймати ретельно обдумані, зважені рішення стосовно будь-яких думок і дій (Пометун, 2020).

На нашу думку, попри всю різноманітність цих та інших визначень критичного мислення в них прослідковується близькість змісту: критичне мислення – це мислення, що не приймає догм, розвивається шляхом осмислення та аналізу нової інформації, її проекцією на особистий життєвий досвід.

Критичне мислення передусім означає вміння мислити самостійно. Це здатність людини самій формулювати власні ідеї, судження й переконання, не покладаючись повністю на думку інших. Коли навчальний процес організований на засадах критичного мислення, кожен учень має можливість висловити свою позицію, аргументувати її, сумніватися, перевіряти факти та робити власні висновки. Ніхто не може мислити критично за нас — цей процес відбувається лише тоді, коли ми активно осмислюємо інформацію і приймаємо рішення самостійно.

У педагогічній практиці, часто не враховується складність феномену критичного мислення, яке включає в себе синтетичне й аналітичне, репродуктивне й продуктивне, теоретичне й практичне мислення. Це означає, що у формуванні критичного мислення не може бути лінійного підходу, а відтак єдино правильного розуміння методики навчання мислити.

На основі проведеного аналізу наукової та методичної літератури зауважимо, що українські дослідники працюють над різними аспектами теорії розвитку критичного мислення в українських реаліях. Так, до прикладу, С. Терно розробив положення теорії розвитку критичного мислення, спираючись на процес вивчення історії та суспільствознавства (Терно, 2021). У працях О. Пометун представлено теорію розвитку критичного мислення учнів початкової школи в умовах НУШ (Пометун, 2020). Проте ці положення можна використати у конструюванні відповідних методик навчання будь-якому предмету, зокрема й математики.

Саме історія математики є важливим засобом формування критичного мислення учнів, адже вона демонструє, як розвивалися математичні ідеї, які суперечки виникали між ученими та як змінювалися підходи до розв'язання наукових проблем. Ознайомлення учнів з історичними аспектами математичних відкриттів допомагає усвідомити, що знання не з'являються миттєво, а є результатом пошуку, помилок, сумнівів і логічних роздумів.

Математичні задачі й теореми, доведені сотні та тисячі років тому, і досі вражають своєю красою та логічною витонченістю. Вивчаючи історію науки, бачимо, що більшість математичних ідей і понять, які згодом були систематизовані в теорії, виникли з практичних потреб і діяльності людини.

Водночас пошуки розв'язків багатьох математичних задач, поставлених життям, часто призводили до нових математичних відкриттів (Воевода, 2012).

Для ефективного використання історії математики з метою розвитку критичного мислення учнів пропонуємо застосовувати наступні прийоми:

- проблемні ситуації;
- інтерактивні методи;
- дослідницькі проекти на історичну тематику;
- створення мініпрезентацій або відеороликів про математиків і їхні відкриття;
- розв'язування історичних задач.

Розглянемо детально кожен з вказаних вище прийомів.

Одним із найефективніших засобів розвитку критичного мислення учнів на уроках математики є створення проблемних ситуацій, зокрема з опорою на історичний матеріал. Проблема ситуація виникає тоді, коли учень стикається з питанням або суперечністю, для розв'язання якої потрібно мислити самостійно, аналізувати різні підходи, робити припущення, шукати аргументи. Саме в такому процесі розвивається критичне мислення.



До прикладу розглянемо наступну проблемну ситуацію для учнів 5 класу з теми «Вимірювання відрізків»:

Демонструємо картинку і ставимо запитання: «Як, на вашу думку, люди в Давньому Єгипті могли виміряти розміри землі після розливу Нілу, якщо не мали метрів чи рулеток?». Учні висувують різні

гіпотези, після чого відбувається обговорення різних способів вимірювання.

Інтерактивні методи навчання — це сучасний педагогічний інструмент, який перетворює урок на простір співпраці між учителем та учнями. Особливо ефективно їх застосовувати у поєднанні з історією математики, адже історичні факти, суперечки та відкриття надають навчальному процесу життєвості та глибини. Одним з варіантів інтерактивної взаємодії може бути робота в парах.

Для учнів 7 класу на перших уроках геометрії можна запропонувати наступне завдання для роботи в парах.

Встановіть відповідність між геометричним терміном та його походженням

№	Термін		Походження терміну
1.	Аksiома	А	Французьке <i>bissectrice</i> від латинських <i>bis</i> – двічі, <i>secare</i> – сікти, розтинати
2.	Бісектриса	Б	Латинське <i>gradus</i> – крок, ступінь
3.	Точка	В	Грецьке $\gamma\epsilon\alpha$ (гео) – земля, $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\iota\nu$ (метр) – міряю, вимірювати – дослівно землемірство
4.	Геометрія	Г	Грецьке $\alpha\chi\upsilon\omicron\mu\alpha$ – гідність, повага
5.	Теорема	Д	Від латинського дієслова <i>punctum</i> – ткнути, доторкнутись
6.	Градус	Е	Грецьке $\theta\epsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ – видовище, вистава. Як математичний термін вперше зустрічається в Архімеда в розумінні «істина, яка доступна для споглядання»

Відповідь занесіть в таблицю

	А	Б	В	Г	Д	Е
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Розуміння етимології терміну допомагає учням зрозуміти як він з'явився і для чого був потрібен людям.

У сучасних умовах цифровізації суспільства учням можна запропонувати для виконання дослідницькі проекти як один з різновидів позаурочної роботи. Метою виконання таких проектів є створення умов, за яких учні самостійно здобувають знання з різних джерел, навчаються використовувати набуті знання для розв'язання нових пізнавальних і практичних завдань. Вибір тематики проектів може бути різним залежно від віку учнів та кола їх пізнавальних інтересів.

Пропонуємо для учнів профільної школи добірку дослідницьких проектів, пов'язаних із внеском українських математиків у розвиток світової математичної науки. За допомогою таких проектів можна виховувати в учнів патріотизм, почуття гордості за власну країну:

Українські математики – лауреати премії Філдса.

Видатні українські математики у світовій науці.

Математичне Поділля (учені-математики рідного краю).

Цікаві пам'ятники математиці і математикам.

Результати виконання проєктів можуть бути представлені у вигляді власних цифрових продуктів (мініпрезентацій або відеороликів) про життя та відкриття видатних математиків, які доцільно презентувати у соціальних мережах, зокрема Instagram, Tik-tok.

Такий вид діяльності ми успішно практикуємо й з майбутніми учителями у процесі вивчення вибіркової освітньої компоненти «Історія математики». Найкращі студентські роботи представлені на сторінці кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського у соціальних мережах Facebook (<https://www.facebook.com/department.algebra.mathteaching.vspu>) та Instagram.

Чудовим способом розвитку критичного мислення учнів може стати розв'язування історичних задач. Визначні математичні задачі, які переходили від одного народу до іншого, зберегли національний колорит, народну мудрість, містять чимало історичних відомостей. Серед них є задачі-«мандрівниці», знані ще в Стародавньому Єгипті, Вавилоні, Китаї та Індії, а втім, цікаві й нині.

Наступні задачі-«мандрівниці» варто розглянути при вивченні теми «Геометрична прогресія» у 9 кл.

У написаному 4000 років тому папірусі Ахмеса (Рінда) «Способи, за допомогою яких можна дійти до розуміння всіх темних речей, всіх таємниць, які містяться в речах» подана задача:

У семи людей по сім кішок; кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мірок ячменю. Знайдіть числа цього ряду і їх суму.

Відповідь: 7, 49, 343, 2401, 16807. Сума – 19607.

Схожі задачі були відомі в народній математиці Київської Русі понад тисячу років тому.

Йшло сім сестриць, несло по сім палиць, на кожній палиці по сім сучків, на кожному сучку по сім торбин, у кожній торбині по сім паляниць. Скільки всіх паляниць?

На семи горах росте по сім дерев, під кожним деревом по сім нір, у кожній норі живуть по сім лисиць, у кожній лисиці по сім лисенят. Скільки всього лисиць?

Старовинна українська задача. *Стоїть стовп, а на стовпі сорок кілець, до кожного кільця прив'язано по 40 кобил, у кожній кобилі 40 лошат. Скільки всього лошат?*

Відповідь: 64000 лошат.

Співзвучну задачу аргентинський письменник Х. Л. Борхес в оповіданні «Жахливі дзеркала» (1934) «одягнув» у літературну форму.

«Тим, хто відкидає Слово, ... обіцяю я дивне Пекло. Бо кожен з них буде царювати над 999 царствами вогню, і в кожному царстві 999 вогняних гір, і на кожній горі 999 вогняних веж, і в

кожній вежі 999 вогняних кімнат, і в кожній кімнаті 999 вогняних лож, і на кожному з них буде лежати ... 999 вогняних фігур... » Скільки буде таких фігур? (Воевода, 2021, с. 74).

Перед розв'язуванням історичних задач учителю слід лаконічно, в доступній для сприйняття формі, повідомити учнів про автора задачі. Для ілюстрації задачі варто використати можливості штучного інтелекту, рисунки, кінофрагменти. Якщо дозволяє час, можна запропонувати учням розв'язування задачі методом автора, а потім – сучасним методом, звернувши увагу учнів на ті пояснення та помилки, які допускали в тлумаченні математичних понять учені різних епох.

Щоб учні прийшли до самостійного «перевідкриття» вже давно відкритого в математиці, а знання стали результатом їхніх власних пошуків, учителю необхідно вміло організувати ці пошуки, враховуючи, що емоції та емоційні стани мають значний вплив на пам'ять людини та на процес розвитку мислення. Відчувши «радість відкриття», учні сміливо йдуть на пошук розв'язання нових задач.

Висновки. Отже, історико-математичний матеріал стимулює учнів до розуміння самої сутності математичного пізнання: постановки проблеми, пошуку різних шляхів її розв'язання, перевірки правильності отриманих результатів. Розгляд математичних відкриттів у динаміці, через призму розвитку людського мислення, сприяє формуванню в учнів умінь аналізувати, порівнювати, узагальнювати, робити логічні висновки.

Методика розвитку критичного мислення учнів на уроках математики із застосуванням історичного матеріалу повинна включати: створення проблемних ситуацій; розв'язування історичних задач; створення ситуації вибору; організацію діалогу у процесі розв'язування проблемних задач (інтерактивні форми навчання). За таких умов навчання учнів набуватиме усвідомленості, самостійності, обґрунтованості, контрольованості та самоорганізованості, що і є основними ознаками критичності мислення.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Барболіна, О. С. (2016). Розвиток критичного мислення учнів шляхом розв'язання математичних задач. Таврійський вісник освіти, 4(56), 190–196.
- Воевода А.Л. (2012) Зацікавити математикою:(методичні матеріали для підвищення інтересу до математики), 181. <https://dspace.vspu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/cfb6cd40-aldc-43bb-alal-bd915b1fe829/content>
- Воевода А.Л. (2021) Цікава математика на уроках та в позаурочній роботі: методичний посібник, 184 DOI: <https://doi.org/10.31652/978-617-552-037-6-1-184>

- Державний стандарт базової середньої освіти. (2020, 30 вересня). Постанова Кабінету Міністрів України № 898. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#n16>
- Демченко, Н. М. (2022). Розвиток критичного мислення в учнів початкових класів на уроках математики. Психолого-педагогічні науки, 3, 38–45. <https://doi.org/10.31654/2663-4902-2022-PP-3-38-45>
- Д'юї, Д. (2003). Досвід і освіта (М. Васильченко, пер.). Львів: Кальварія.
- Лякішева, А. В., Вітюк, В. В., & Кашуб'як, І. О. (2022). Кейсбук методів і прийомів технології розвитку критичного мислення в Новій українській школі: навчально-методичний посібник. Луцьк: ФОП Іванюк В. П.
- Максименко, С. Д., & Соловієнко, В. О. (2000). Загальна психологія: навчальний посібник. http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/875/Maksimenko_S.D._Zagal%27na_psihologiya.pdf
- Матяш, О. І. (2016). Геометрична компетентність як складова математичної компетентності учнів. Математика в рідній школі, 3, 28–32.
- Надурак, В. (2022). Критичне мислення: поняття та практика. Філософія освіти, 28(2), 129–147. <https://philosopheducation.com/index.php/philed/article/view/739>
- Пометун, О. І. (2020). Нова українська школа: розвиток критичного мислення учнів початкової школи: навчально-методичний посібник. Київ: Видавничий дім «Освіта». <https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/navchalno-metodychny-posibnyky/dlya-pedpraytsivnykiv/Metody-%20Pometun.pdf>
- Пометун, О., & Сущенко, І. (2017). Путівник з розвитку критичного мислення в учнів початкової школи: методичний посібник для вчителів. Київ.
- Саух, П. (2021). Розвиток критичного мислення як провідний тренд сучасного освітнього процесу. Неперервна професійна освіта: теорія і практика (Серія: педагогічні науки), 2(67), 7–15. <https://doi.org/10.28925/1609-8595.2021.2.1>
- Скворцова, С. (2016). Розвиток критичного мислення в учнів початкової школи на уроках математики. Науковий вісник Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського. Серія: Педагогічні науки, 2, 163–169.
- Стіл, Дж., Мередіт, К., & Темпл, Ч. (2001). Методична система «Розвиток критичного мислення у навчанні різних предметів». Київ: Науково-методичний центр розвитку критичного та образного мислення «Інтелект».
- Терно, С. (2021). Критичне мислення та філософське усвідомлення світу: посіб. для підготовки докторів філософії. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 107 <https://dspace.znu.edu.ua/jspui/handle/12345/6164>
- Тягло, О. В. (2008). Критичне мислення: навчальний посібник. Харків: Основа.
- Чашечнікова, О. С. (2013). Формування творчої особистості учнів. Розвиток математичних здібностей. Суми.
- Ennis, R. H. (2018). Critical Thinking Across the Curriculum: A Vision. *Topoi* 37 (1), 165–184 <https://link.springer.com/article/10.1007/s11245-016-9401-4>
- Halpern D. (2014). *Thought and Knowledge: An Introduction to Critical Thinking* (5th ed.). Psychology Press.
- Lipman, M. (1991). A reflective model of educational practice. In *Thinking in Education* (pp. 7–25). Cambridge. <http://www.philosophy.ru/iphras/library/deti/ch2.html>

References

- Barbolina, O. S. (2016). *Rozvytok krytychnoho myslennia uchniv shliakhom rozviazannia matematychnykh zadach* [in Ukrainian] (*Development of students' critical thinking through solving mathematical problems*). *Tavriiskyi visnyk osvity*, 4(56), 190–196.
- Voevoda, A. L. (2012). *Zatsikavyty matematykoiu: metodychni materialy dlia pidvyshchennia interesu do matematyky* [in Ukrainian] (*How to interest students in mathematics: Methodological materials*) (p. 181). <https://dspace.vspu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/cfb6cd40-a1dc-43bb-a1a1-bd915b1fe829/content>

- Voevoda, A. L. (2021). *Tsikava matematyka na urokakh ta v pozaurochnii roboti: metodychnyi posibnyk* [in Ukrainian] (*Interesting mathematics in lessons and extracurricular activities: A methodological guide*) (p. 184). <https://doi.org/10.31652/978-617-552-037-6-1-184>
- Kabinet Ministriv Ukrainy. (2020). *Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity* [in Ukrainian] (*State Standard of Basic Secondary Education*). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#n16>
- Demchenko, N. M. (2022). *Rozvytok krytychnoho myslennia v uchniv pochatkovykh klasiv na urokakh matematyky* [in Ukrainian] (*Development of critical thinking in primary school students in mathematics lessons*). *Psykholohopedahohichni nauky*, 3, 38–45. <https://doi.org/10.31654/2663-4902-2022-PP-3-38-45>
- Diuī, D. (2003). *Dosvid i osvita* (M. Vasylychenko, Trans.) [in Ukrainian] (*Experience and Education*). Kalvariia.
- Liakisheva, A. V., Vitiuk, V. V., & Kashub'iak, I. O. (2022). *Keisbook metodiv i pryiomiv tekhnolohii rozvytku krytychnoho myslennia v Novii ukrainskii shkoli* [in Ukrainian] (*Casebook of methods and techniques of critical thinking development technology in the New Ukrainian School*). FOP Ivaniuk V. P.
- Maksymenko, S. D., & Soloviienko, V. O. (2000). *Zahalna psykholohiia: navchalnyi posibnyk* [in Ukrainian] (*General psychology: Textbook*). http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/875/Maksimenko_S.D._Zagal%27na_psihologiya.pdf
- Matyash, O. I. (2016). *Heometrychna kompetentnist yak skladova matematychnoi kompetentnosti uchniv* [in Ukrainian] (*Geometric competence as a component of students' mathematical competence*). *Matematyka v ridnii shkoli*, 3, 28–32.
- Nadurak, V. (2022). *Krytychne myslennia: poniattia ta praktyka* [in Ukrainian] (*Critical thinking: Concept and practice*). *Filosofii osvity*, 28(2), 129–147. <https://philosopheducation.com/index.php/philed/article/view/739>
- Pometun, O. I. (2020). *Nova ukrainska shkola: rozvytok krytychnoho myslennia uchniv pochatkovoї shkoly: navchalno-metodychnyi posibnyk* [in Ukrainian] (*New Ukrainian School: Development of critical thinking of primary school students: A methodological guide*). Vydavnychiy dim "Osvita". <https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/navchalno-metodychny-posibnyky/dlya-pedpraysivnykiv/Metody-%20Pometun.pdf>
- Pometun, O., & Sushchenko, I. (2017). *Putivnyk z rozvytku krytychnoho myslennia v uchniv pochatkovoї shkoly: metodychnyi posibnyk dlia vchyteliv* [in Ukrainian] (*Guide to developing critical thinking in primary school students: A teacher's manual*). Kyiv.
- Saukh, P. (2021). *Rozvytok krytychnoho myslennia yak providnyi trend suchasnoho osvitnoho protsesu* [in Ukrainian] (*Critical thinking development as a leading trend of modern educational process*). *Neperervna profesiina osvita: teoriia i praktyka*, 2(67), 7–15. <https://doi.org/10.28925/1609-8595.2021.2.1>
- Skvortsova, S. (2016). *Rozvytok krytychnoho myslennia v uchniv pochatkovoї shkoly na urokakh matematyky* [in Ukrainian] (*Development of critical thinking in primary school students in mathematics lessons*). *Naukovyi visnyk Mykolaivskoho natsionalnoho universytetu im. V. O. Sukhomlynskoho. Pedahohichni nauky*, 2, 163–169.
- Stil, Dzh., Meredyt, K., & Templ, Ch. (2001). *Metodychna systema "Rozvytok krytychnoho myslennia u navchanni riznykh predmetiv"* [in Ukrainian] (*Instructional system "Critical thinking development in teaching various subjects"*). *Naukovometodychnyi tsentr rozvytku krytychnoho ta obraznoho myslennia "Intelekt"*.
- Terno, S. (2021). *Krytychne myslennia ta filosofske usvidomlennia svitu: posibnyk dlia pidhotovky doktoriv filosofii* [in Ukrainian] (*Critical thinking and philosophical awareness of the world: A guide for PhD preparation*). Zaporizhzhia National University. <https://dspace.znu.edu.ua/jspui/handle/12345/6164>
- Tiahlo, O. V. (2008). *Krytychne myslennia: navchalnyi posibnyk* [in Ukrainian] (*Critical thinking: Textbook*). Osnova.
- Chashechnikova, O. S. (2013). *Formuvannia tvorchoi osobystosti uchniv. Rozvytok matematychnykh zdibnostei* [in Ukrainian] (*Formation of students' creative personality. Development of mathematical abilities*). Sumy.
- Ennis, R. H. (2018). Critical thinking across the curriculum: A vision. *Topoi*, 37(1), 165–184. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11245-016-9401-4>
- Halpern, D. (2014). *Thought and knowledge: An introduction to critical thinking* (5th ed.). Psychology Press.
- Lipman, M. (1991). A reflective model of educational practice. In *Thinking in education* (pp. 7–25). Cambridge. <http://www.philosophy.ru/iphra/library/deti/ch2.html>

Отримано / Received 26.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 26.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 378.147:51:004.8(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-92-101

Методичні аспекти впровадження інформаційних технологій в процес навчання математики в ЗВО

Наталія Підлісничка

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна;

E-mail: soni.box85@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3142-7811>

Анотація.

Проаналізовано статті українських і закордонних дослідників щодо впровадження засобів штучного інтелекту в освітній процес. Нині в процесі професійної підготовки фахівця активно використовуються сучасні цифрові платформи, різні додатки, засоби ШІ тощо. Науковці досліджують, як саме ці технології впливають на процеси навчання, на мотивацію студентів і на ефективність підготовки фахівців у нових умовах. В контексті нашого дослідження ми виокремили особливості використання засобів ШІ на заняттях з математики у ЗВО України. В процесі навчання розв'язувати математичні задачі майбутніми фахівцями даний інструмент є гарним помічником, оскільки адаптований до математичних завдань різного рівня. Проте не варто перетворювати використання даного засобу на самоціль. Він є помічником, який можна використати для перевірки правильності своїх міркувань та отриманої відповіді, або як помічник у випадку, якщо завдання, яке стоїть перед студентом виявилось для нього непосильним. Інструмент може допомогти також для економії часу при рутинних громіздких обчисленнях, при умові, що у студента гарно сформовані відповідні навички. ШІ пропонує значні переваги, такі як персоналізоване навчання, покращення результатів навчання та підвищення залученості студентів. В процесі навчання застосовуючи засоби ШІ забезпечуємо формування здатності працювати з інформацією (аналізувати, обробляти тощо), розвиток критичного мислення, сприятимемо формуванню розуміння важливості підвищення рівня професійно-математичної підготовки для роботи в різних сферах тощо. Зазначено, що завдяки методично грамотному впровадженню інформаційних комп'ютерних помічників ми нині можемо не лише не втратити в якості але й удосконалити процес навчання математики майбутніх фахівців.

Ключові слова: математична підготовка, майбутні фахівці, проблеми застосування ШІ в процесі навчання, чинники удосконалення математичної підготовки засобами ШІ.

Methodological aspects of implementing information technologies in the process of teaching mathematics in higher education institutions

Nataliia Pidlisnycha

Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: soni.box85@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3142-7811>

Abstract.

Analyzed are the articles of Ukrainian and foreign researchers concerning the implementation of artificial intelligence (AI) tools in the educational process. Currently, in the process of professional training, modern digital platforms, various applications, and AI tools are actively used. Scholars study how exactly these technologies influence learning processes, students' motivation, and the effectiveness of training specialists under new conditions.

In the context of our study, we highlight the specific features of using AI tools in mathematics classes at higher education institutions in Ukraine. Increasingly, researchers discuss the effectiveness of applying AI tools in university education. When learning to solve mathematical problems, this instrument serves as a valuable assistant, as it is adapted to mathematical tasks of different levels. However, its use should not become an end in itself. It should serve as a support tool — to verify one's reasoning and results or to assist when a given task appears too difficult for the student. The tool can also help save time on routine and complex calculations, provided that the student has well-developed corresponding skills. AI offers significant advantages such as personalized learning, improved learning outcomes, and increased student engagement. Using AI tools in the learning process helps develop the ability to work with information (to analyze, process, and interpret it), fosters critical thinking, and promotes awareness of the importance of enhancing the level of professional and mathematical training necessary for various fields. It is noted that through methodologically sound integration of digital and AI-based learning assistants, we can not only maintain but even improve the quality of mathematics education for future professionals.

Keywords: mathematical training, future professionals, challenges of AI application in learning, factors of improving mathematical training through AI tools.

Постановка проблеми. Сучасна система освіти нині перебуває у процесі трансформації. Розвиток інформаційних технологій розпочав цей процес перебудови і переосмислення процесу навчання, а COVID19 та воєнні події на території України пришвидшили, посилили та активізували цей процес. За 5 останніх років, починаючи з 2020, суспільство та середовище професійної підготовки значно змінилися. Активно впроваджуються, зокрема, такі форми навчання як дистанційне та змішане навчання. Маємо завдання формувати професійно-математичну компетентність майбутніх фахівців в нових умовах.

Нині в процесі професійної підготовки фахівця активно використовуються сучасні цифрові платформи, різні додатки, засоби ІІІ тощо. Науковці досліджують, як саме ці технології впливають на процеси навчання, на мотивацію студентів і на ефективність підготовки фахівців у нових умовах. В контексті нашого дослідження ми виокремимо особливості використання засобів ІІІ на заняттях з математики у ЗВО України.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Окрім цифрових технологій дедалі частіше дослідники обговорюють ефективність застосування засобів ІІІ в освітньому процесі ЗВО. Організація Об'єднаних Націй з питань освіти, науки і культури UNESCO активно залучена до дослідження застосування засобів ІІІ в освітній процес. Зокрема, організація вважає, що штучний інтелект відрізняється від інших цифрових технологій своїм потенціалом докорінно змінювати суспільства, економіку та системи освіти ([Artificial Intelligence in education](#)).

У дослідженні Vieriu A. M., та Petrea G. (2025) «The Impact of Artificial Intelligence (AI) on Students' Academic Development. Education Sciences» розглядається вплив технологій штучного інтелекту на процеси навчання та академічну успішність студентів Національного університету науки і технологій Політехніка Бухареста. Автори аналізували проблеми та труднощі, пов'язані з інтеграцією ІІІ в освіту. ІІІ має потенціал революціонізувати освіту (Holmes et al., 2019). Інтеграція ІІІ в академічне середовище порушує критичні питання, пов'язані з рівністю, доступністю та зростаючою роллю традиційних методів навчання. Зокрема, Qadir (Qadir, 2023) наголошує на ризику зловживання студентами інструментами штучного інтелекту нечесними або несанкціонованими способами, такими як використання контенту, створеного штучним інтелектом, для виконання завдань без належного зазначення авторства.

Інтелектуальні системи репетиторства, освітні роботи, панелі аналітики навчання, адаптивні навчальні платформи та взаємодія людини з комп'ютером, продемонстрували значний потенціал для покращення викладання та навчання (Chen et al., 2020; Zawacki-Richter et al., 2019). Ключовим викликом є забезпечення того, щоб ІІІ доповнював, а не замінював взаємодію з людьми. Хоча ІІІ автоматизує завдання та надає аналітичні дані, йому бракує емпатії, креативності та глибокого розуміння нюансів, які мають викладачі-люди (Holmes & Tuomi, 2022). Надмірна залежність від ІІІ для оцінювання та зворотного зв'язку

може зменшити можливості для змістовного діалогу та рефлексії, що є важливим для мислення вищого порядку (Facione, 2020).

На сайті університету University of San Diego, у звіті про штучний інтелект в освіті, що був розроблений інноваційною онлайн-програмою магістра наук із прикладного штучного інтелекту виокремлено 39 прикладів штучного інтелекту в освіті ([39 Examples of Artificial Intelligence in Education](#)). Серед них, зокрема:

Міждисциплінарне навчання: ШІ руйнує бар'єри між предметами, сприяючи міждисциплінарному навчанню. Такі інструменти, як Wolfram Alpha, використовують ШІ для демонстрації реального застосування різних теорій, допомагаючи студентам зрозуміти взаємозв'язок різних галузей навчання ([39 Examples of Artificial Intelligence in Education](#)).

Теоретичне обґрунтування необхідності використання штучного інтелекту в освітньому просторі надано Бублик Л., Весоловською М. (Бублик, 2024), які підкреслюють, що інтеграція штучного інтелекту в освітній простір є одним із ключових напрямів модернізації освіти, що дозволяє адаптувати її до потреб нового покоління та підвищувати ефективність навчального процесу. ШІ пропонує широкий спектр інструментів і можливостей для покращення освіти — від персоналізації навчання до автоматизації рутинних завдань. Вивчення особливостей роботи студентів зі штучним інтелектом є пріоритетним завданням освіти.

Майбутні перспективи розвитку навичок ШІ для студентів економічних освітніх напрямів досліджувала Бублик Л. (Бублик, 2025). Описується проблема невідповідності між навичками, необхідними для успіху в економіці, що керується штучним інтелектом, та поточними можливостями студентів-економістів. Традиційна економічна освіта, що часто зосереджена на теоретичних моделях і статистичному аналізі, може недостатньо готувати студентів до унікальних викликів і можливостей, які несе з собою ШІ. Ключові аспекти вказаної проблеми: низький рівень обізнаності студентів-економістів про ШІ; недостатня підготовка до роботи в середовищі, де ШІ доповнює працю: оскільки ШІ автоматизує рутинні завдання і трансформує професійні ролі, майбутні економісти мають бути готовими до співпраці з інтелектуальними машинами і до адаптації до нових форматів спільної роботи та вирішення проблем (Бублик, 2025). ШІ трансформує професію економіста і ШІ-грамотність є обов'язковою для майбутніх економістів. Проте потрібне не лише технічне володіння, але й критичне мислення й етичне бачення. Навчальні програми мають адаптуватися, а саме: мають вводитись спецкурси, має відбуватись інтеграція ШІ у чинні дисципліни, надавати практичний досвід (Бублик, 2025).

Конкретні можливості застосування засобів ШІ в процесі навчання математики в ЗВО запропоновані Кусій М. І., Крутоус Т. П., Матяш А. Д. (Кусій, 2025). Зазначено, що ШІ у своїй поточній формі, з ChatGPT, і, безумовно, у своїх майбутніх варіантах, може бути вдало використаний для підвищення ефективності навчання, оскільки допоможе подолати три бар'єри: недостатність прикладної спрямованості навчання; ілюзію глибокого розуміння пояснення; проблему навчання критично оцінювати зміст. Зокрема, ШІ може надавати

величезну кількість прикладів, а викладач може спонукати студентів: порівнювати ці приклади в різних контекстах, пояснювати сутність та вказувати на недоречності. Тобто, якщо ІІІ має тенденцію вигадувати інформацію, то можна це використати на користь навчання і спонукати студентів досліджувати результати ІІІ, а також виконувати необхідну роботу з виправлення помилок. Для успішної адаптації до цифрової трансформації студенти мають розвивати навички ефективного отримання та обробки інформації. Особливо важливо навчитися розрізняти достовірні дані та швидко знаходити необхідні знання (Кусій, 2025).

Мінцифри та МОН України розробили рекомендації щодо відповідального використання ІІІ в закладах вищої освіти. ЗВО мають адаптуватися до сучасних освітніх трендів і впроваджувати найкращі світові практики у сфері ІІІ, щоб зберігати конкурентоспроможність, робити нові наукові прориви та готувати сильних спеціалістів.

У рекомендаціях щодо відповідального впровадження та використання технологій штучного інтелекту в закладах вищої освіти (<https://www.kmu.gov.ua/news/mintsyfyry-ta-mon-razom-z-ekspertamy-rozrobyly-rekomendatsii-shchodo-vidpovidalnoho-vykorystannia-shi-u-vuzakh>) подано корисні матеріали для підвищення рівня ІІІ-грамотності та можливості для безоплатного або пільгового доступу для ЗВО до популярних ІІІ-інструментів від Microsoft, Google, Amazon, Canva, Grammarly та інших.

Виокремимо деякі актуальні в контексті нашого дослідження пункти з рекомендацій щодо відповідального впровадження та використання технологій штучного інтелекту в закладах вищої освіти.

ІІІ може: допомогти оцінювати окремі елементи творчих робіт студентів, як-от структура, аргументація та стиль; генерувати різноманітні навчальні матеріали, як-от тести, вправи та навіть короткі пояснення складних тем, що дає змогу викладачам зекономити час і дібрати більш інтерактивні та цікаві матеріали; створювати інтерактивні презентації на основі наявних матеріалів, додаючи анімації, звукові ефекти та інші елементи, які роблять презентацію цікавішою; автоматизувати багато рутинних операцій, як-от перевірка завдань, оцінювання тестів і надання зворотного зв'язку студентам, що допомагає викладачам зосередитися на більш творчих і стратегічних аспектах своєї роботи; аналізувати інтереси та навчальні досягнення студентів, щоб рекомендувати їм додаткові матеріали для вивчення; відповідати на часті запитання студентів, надавати технічну підтримку та виконувати інші рутинні завдання (<https://www.kmu.gov.ua/news/mintsyfyry-ta-mon-razom-z-ekspertamy-rozrobyly-rekomendatsii-shchodo-vidpovidalnoho-vykorystannia-shi-u-vuzakh>).

За допомогою ІІІ, студенти можуть: швидко знаходити необхідну інформацію для виконання завдань і підготовки до навчальних занять та контрольних заходів; працювати з матеріалами іноземною мовою; генерувати ідеї для написання есе, створення презентацій та інших творчих завдань; отримувати підказки та пояснення щодо виконання складних завдань або концепцій; генерувати різноманітні тестові завдання, що допомагає ефективно

готуватися до іспитів; аналізувати помилки під час виконання тестів і надавати персоналізовані рекомендації щодо їх виправлення; знаходити релевантні наукові статті й дослідження за заданими критеріями; аналізувати великі обсяги даних; генерувати нові гіпотези для дослідження на основі аналізу наявних даних; автоматично створювати конспекти лекцій та інших навчальних матеріалів, що дає змогу зосередитися на розумінні основних ідей (<https://www.kmu.gov.ua/news/mintsyfry-ta-mon-razom-z-ekspertamy-rozrobyly-rekomendatsii-shchodo-vidpovidalnoho-vykorystannia-shi-u-vuzakh>).

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Українські та закордонні автори досліджували впровадження та вплив засобів ІІІ в навчальний процес. Ключовими напрямками досліджень були вплив технологій ІІІ на процеси навчання та успішність студентів, перспективи розвитку навичок ІІІ, ІІІ-грамотність, відповідальне використання ІІІ в ЗВО тощо. Варто зазначити, що дослідниками недостатньо приділено уваги висвітленню можливостей інтеграції ІІІ в процес навчання математики у підготовці майбутніх фахівців ЗВО. В процесі навчання математики ми маємо можливості для застосування ІІІ, зокрема при розв'язуванні задач.

Мета статті. Розглянути методичні особливості інтеграції засобів ІІІ в процес навчання математики в ЗВО при розв'язуванні задач.

Виклад основного матеріалу. В Україні впровадження засобів ІІІ в навчальний процес підтримується і заохочується на державному рівні. Розглянемо конкретні приклади розв'язування задач, актуальних для майбутніх фахівців, з використанням сучасних цифрових технологій та засобів навчання.

Приклад 1. *Знайти інтеграл $\int (2x^3 - 3x^2 + x - 5)dx$.*

Класичний приклад з теми невизначений інтеграл. Знаходиться за допомогою таблиці інтегралів та базових правил диференціювання. Можемо знайти даний інтеграл, використавши додаток Wolfram|Alfa, або використовуючи ChatGpt.

У професійній діяльності майбутні фахівці будуть виконувати багато рутинних обчислень, і, швидше за все, це будуть виконувати цифрові технології чи засоби ІІІ. Тому за допомогою завдань такого типу ми можемо готувати студента до майбутньої професійної діяльності, зокрема до співпраці з інтелектуальними машинами. З іншого боку, студент має вміти виконувати такі завдання самостійно. В умовах нинішніх реалій в Україні маємо досвід, зокрема, браку електроенергії, і майбутні фахівці мають бути готові до роботи в таких ситуаціях в тому числі. В критичних ситуаціях особистість опиняється зі своїми фундаментальними налаштуваннями: знаннями, вміннями та навичками. Маємо спонукати майбутніх фахівців до розумової діяльності, до набуття базових знань, вмінь та навичок, щоб вони могли адаптуватись до будь-якої ситуації майбутньої професійної діяльності.

Додаток Wolfram|Alfa додатково зобразив графіки підінтегральної функції та її первісної, а ChatGpt пояснив хід розв'язання. У процесі взаємодії з цифровими технологіями та засобами ІІІ в майбутній професійній діяльності важливо розуміти, як правильно з ними

взаємодіяти. Різні засоби по різному запрограмовані, і генерують нерідко різну відповідь до однієї задачі. Тому запит до різних засобів ШІ, отримання різної відповіді дозволяє майбутнім фахівцям краще зрозуміти зміст і розібратись у своєму запиті. Крім того, щоб зрозуміти згенеровану відповідь в одному середовищі ШІ, іноді потрібно мати глибоке розуміння в запитуваній темі (як, зокрема, у відповіді додатку Wolfram|Alfa), натомість інше середовище може запропонувати покрокове доступне пояснення. Таким чином, ми розвиватимемо у майбутніх фахівців не лише технічне володіння засобами цифрових технологій і ШІ, а й формуватимемо здатність мислити критично. Варто іноді застосовувати кілька цифрових технологій в процесі розв'язування одного завдання разом з традиційним розв'язанням завдання, а потім обговорити отримані результати. Додатково у студентів можна запитати, що за графіки побудував додаток Wolfram|Alfa тощо.

Приклад 2. Масу дорогоцінних каменів вимірюють у каратах. Один карат дорівнює 0,2 г. Обчисліть масу діаманта масою 0,8 карата, подану в кілограмах.

Прокоментуємо, як виконують розв'язання даної задачі Wolfram|Alfa та ChatGpt. Відмітимо, що додаток Wolfram|Alfa не розуміє кирилицею сформульованих запитів. Тому на перший погляд здається, що він не впорався з завданням, на відміну від ChatGpt. Проте, якщо запит сформулювати англійською мовою, то матимемо результат.

Приклад 3. Наприкінці серпня 2018 року адміністрація Одеської області мала певну суму грошей, яку передбачалося витратити на поповнення нафтових запасів області. Сподіваючись на зміну кон'юнктури ринку, керівництво краю, відтермінувавши закупівлю нафти, вклало цю суму 1 вересня 2018 року в банк. Далі відомо, що сума вкладу в банку збільшувалася першого числа кожного місяця на 26% по відношенню до суми на перше число попереднього місяця, а ціна бареля сирої нафти знижувалася на 10% щомісяця. На скільки відсотків більше (від початкового об'єму закупівель) керівництво області змогло поповнити нафтові запаси області, знявши 1 листопада 2018 року всю суму, отриману в банку разом з відсотками, і витративши її на закупівлю нафти?

Додаток Wolfram|Alfa не зміг виконати дане завдання оскільки безкоштовна версія має обмеження щодо кількості введених символів. Варто показати студентам, що середовище інтелектуальних машин не є досконалим, тому часом вони будуть стикатись з ситуаціями, коли цифрові технології чи засоби ШІ не можуть впоратись із завданням, або не вірно інтерпретують умову і в результаті згенерована відповідь невірна. Також є випадки, коли згенерована відповідь на перший погляд відображає реальний результат, але в процесі обчислень допущено помилки. Варто знайомити майбутніх студентів з кейсами, щоб вони були готові до такої співпраці з інтелектуальними машинами, і вміли адаптуватись в форматі такої спільної роботи.

ChatGpt виконав обчислення, проте для повноцінного розуміння всіма студентами процесу розв'язування даної задачі варто додатково обговорити його, хоча додаток показав

покрокове розв'язання. Досвід показує що задачі такого типу викликають труднощі у студентів, зокрема, їм не вистачає даних для повного розуміння процесу розв'язання.

Отриманий за допомогою ШІ результат варто обговорювати зі студентами. Запитати, чи є студенти, які з перших секунд отримання результату не сумнівались у його правильності? Запитати, хто одразу зорієнтувався і побачив, що результат хибний? В чому саме було помічено це? Проаналізувати відповідь. Можливо слід перефразувати умову задачі, з метою виключення неоднозначних термінів.

Висновки. Можемо стверджувати, що ШІ має двоякий вплив. У процесі навчання розв'язувати математичні задачі майбутніми економістами даний інструмент є гарним помічником, оскільки адаптований до математичних завдань різного рівня. Проте не варто перетворювати використання даного засобу на самоціль. Він є помічником, який можна використати для перевірки правильності своїх міркувань та отриманої відповіді, або як помічник у випадку, якщо завдання, яке стоїть перед студентом виявилось для нього непосильним. Інструмент може допомогти також для економії часу при рутинних громіздких обчисленнях, при умові, що у студента гарно сформовані відповідні навички. ШІ пропонує значні переваги, такі як персоналізоване навчання, покращення результатів навчання та підвищення залученості студентів. Однак він також створює проблеми, такі як надмірна залежність від технологій, зниження критичного мислення та ризик академічного шахрайства. Також є занепокоєння щодо точності контенту, створеного штучним інтелектом. Певні рекомендації, які можуть сприяти ефективній інтеграції засобів ШІ в навчальний процес: комплексне навчання (впровадження навчальних програм як для викладачів, так і для студентів, щоб сприяти глибокому розумінню інструментів штучного інтелекту та їх правильному використанню); встановлення надійних стандартів для розгортання штучного інтелекту, які включають регулярну перевірку інформації, згенерованої штучним інтелектом, та чіткі інструкції для запобігання надмірній залежності від технологій; розробка та забезпечення дотримання політики захисту даних студентів та зменшення потенційних упереджень у системах штучного інтелекту.

Обираючи засоби ШІ, зокрема таких, як ChatGPT, Perplexity, Copilot, DeepSeek, Gemini, Claude, варто пам'ятати, що потрібно це робити обережно, виважено, методично грамотно. В процесі навчання застосовуючи вказані засоби ШІ ми можемо забезпечити формування здатності працювати з інформацією (аналізувати, обробляти тощо), розвиток критичного мислення, сприятимемо формуванню розуміння важливості підвищення рівня професійно-математичної підготовки для роботи в економічній сфері тощо.

Завдяки методично грамотному впровадженню інформаційних комп'ютерних помічників ми нині можемо не лише не втратити в якості але й удосконалити процес навчання математики майбутніми економістами. В процесі застосування цифрових технологій і засобів ШІ варто, в першу чергу, дотримуватись балансу між застосуванням технологій та традиційним навчанням. Також варто пам'ятати про можливі помилки в

згенерованих відповідях комп'ютерних технологій і вміло це використовувати в процесі навчання розв'язувати задачі. Важливо дбати про обговорення отриманих результатів, уточнювати ключові моменти та міркувати над іншими шляхами пошуку розв'язання, уникати бездумного переписування готових рішень. Методично виважений підхід до впровадження цифрових технологій та засобів ІІІ до процесу навчання розв'язувати задачі може сприяти виконанню нових завдань формування математично компетентного фахівця. А саме: формувати вміння та навички використання математичного апарату майбутніми економістами у майбутній професійній діяльності; розвивати прийоми розумової діяльності, які сприятимуть ефективній професійній діяльності майбутніх фахівців; забезпечити усвідомлення майбутніми економістами необхідності професійно-математичного самовдосконалення.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- 39 Examples of Artificial Intelligence in Education [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://onlinedegrees.sandiego.edu/artificial-intelligence-education/>
- Artificial Intelligence in education [Електронний ресурс] / UNESCO. Режим доступу: <https://www.unesco.org/en/digital-education/artificial-intelligence?hub=32618>
- OpenAI. ChatGPT / OpenAI. URL : <https://chat.openai.com/>
- Vieriu, A. M., & Petrea, G. (2025). The Impact of Artificial Intelligence (AI) on Students' Academic Development. Education Sciences, 15(3), 343. <https://doi.org/10.3390/educsci15030343>
- Wolfram Alpha / Wolfram Alpha LLC. URL : <https://www.wolframalpha.com/>
- Бублик Л. Я. (2025) Майбутні перспективи розвитку навичок ІІІ для студентів економічних освітніх напрямів. Економіка та суспільство, № 71. Режим доступу: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-71>.
- Бублик Л., Весоловська М. (2024) Теоретичне обґрунтування необхідності використання штучного інтелекту в освітньому просторі. Економіка та суспільство. № 68. Режим доступу: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2024-68-166>.
- Кусій, М. І. (2025) Сучасні виклики у навчанні математики в контексті цифрової трансформації вищої освіти / М. І. Кусій, Т. П. Крутоус, А. Д. Матяш // Наукові записки [Укр. держ. університету імені Михайла Драгоманова]. Серія : Педагогічні науки : [збірник наукових статей] / М-во освіти і науки України, УДУ імені Михайла Драгоманова ; упор. Л. Л. Макаренко. – Київ : Видавничий дім "Гельветика", Вип. CLX (160). С. 112-120.
- Матяш, О. І., & Гусак, Л. П. (2005). *Математика і підготовка фахівців економічних спеціальностей: навчально-методичний посібник*. [Mathematics and the training of specialists in economic fields: A teaching and methodological manual]. Вінниця. 118 с.
- Матяш, О., & Риндюк, В. (2023). Навчання математики з використанням цифрових навчальних платформ: аналіз закордонного досвіду. *Фізико-математична освіта*, 38(3), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-006>

- Міністерство цифрової трансформації України. Мінцифри та МОН разом з експертами розробили рекомендації щодо відповідального використання ШІ у вузах [Електронний ресурс]. – 2025. – 01 трав. – Режим доступу: <https://www.kmu.gov.ua/news/mintsyfry-ta-mon-razom-z-ekspertamy-rozrobyly-rekomendatsii-shchodo-vidpovidalnoho-vykorystannia-shi-u-vuzakh>
- Andrii D. Matiash, Olha I. Matiash Artificial intelligence in teaching geometry to students: opportunities and warnings. *Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen Faculty of Mathematics and Informatics* vol. XXVI C, 2025, pp. 139–148, <https://doi.org/10.46687/YAUI8030>

References

- 39 Examples of Artificial Intelligence in Education. (n.d.). *Online Degrees – University of San Diego*. Retrieved from <https://onlinedegrees.sandiego.edu/artificial-intelligence-education/>
- UNESCO. (n.d.). *Artificial Intelligence in Education*. Retrieved from <https://www.unesco.org/en/digital-education/artificial-intelligence?hub=32618>
- OpenAI. (n.d.). *ChatGPT*. Retrieved from <https://chat.openai.com/>
- Vieriu, A. M., & Petrea, G. (2025). The impact of artificial intelligence (AI) on students' academic development. *Education Sciences*, 15(3), 343. <https://doi.org/10.3390/educsci15030343>
- Wolfram Alpha LLC. (n.d.). *Wolfram Alpha*. Retrieved from <https://www.wolframalpha.com/>
- Bublyk, L. Ya. (2025). *Maibutni perspektyvy rozvytku navychok SHI dlia studentiv ekonomichnykh osvityv napriamiv* [in Ukrainian] (*Future prospects for AI skills development for students of economic educational fields*). *Ekonomika ta suspilstvo*, 71. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-71>
- Bublyk, L., & Vesolovska, M. (2024). *Teoretychne obgruntuvannia neobkhidnosti vykorystannia shtuchnoho intelektu v osvitnomu prostori* [in Ukrainian] (*Theoretical justification for the need to use artificial intelligence in the educational space*). *Ekonomika ta suspilstvo*, 68. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2024-68-166>
- Kusii, M. I., Krutous, T. P., & Matiash, A. D. (2025). *Suchasni vyklyky u navchanni matematyky v konteksti tsyfrovoy transformatsii vyshchoi osvity* [in Ukrainian] (*Modern challenges in mathematics teaching in the context of digital transformation of higher education*). *Naukovi zapysky. Serii: Pedagogichni nauky*, 160, 112–120.
- Matiash, O. I., & Husak, L. P. (2005). *Matematyka i pidhotovka fakhivtsiv ekonomichnykh spetsialnostei: navchalno-metodychnyi posibnyk* [in Ukrainian] (*Mathematics and the training of specialists in economic fields: A teaching and methodological manual*). Vinnytsia.
- Matiash, O., & Ryndiuk, V. (2023). *Navchannia matematyky z vykorystanniam tsyfrovoykh navchalnykh platform: analiz zakordonnoho dosvidu* [in Ukrainian] (*Teaching mathematics using digital learning platforms: Analysis of foreign experience*). *Fyzyko-matematychna osvita*, 38(3), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-006>
- Ministry of Digital Transformation of Ukraine. (2025, May 1). *Mintsyfry ta MON razom z ekspertamy rozrobyly rekomendatsii shchodo vidpovidalnoho vykorystannia SHI u vuzakh* [in Ukrainian] (*The Ministry of Digital Transformation and the Ministry of Education and Science developed recommendations on the responsible use of AI in universities*). Retrieved from <https://www.kmu.gov.ua/news/mintsyfry-ta-mon-razom-z-ekspertamy-rozrobyly-rekomendatsii-shchodo-vidpovidalnoho-vykorystannia-shi-u-vuzakh>
- Matiash, A. D., & Matiash, O. I. (2025). Artificial intelligence in teaching geometry to students: Opportunities and warnings. *Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen, Faculty of Mathematics and Informatics*, 26C, 139–148. <https://doi.org/10.46687/YAUI8030>

Отримано / Received 22.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 21.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 37.016:51:004.7

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-102-111

Ключові фактори визначення мети та завдань використання навчальних платформ у навчанні учнів математики

Валентин Риндюк

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна

E-mail: Valentine.Rydyuk@vspu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1026-4401>

Анотація.

Аналіз публікацій українських науковців останніх років дозволяє стверджувати, що наразі активно досліджуються процеси упровадження навчальних платформ в шкільну та вищу освіту. Українські дослідження підкреслюють роль навчальних платформ у зміні структури та логіки засвоєння матеріалу. Метою цієї статті є виокремлення та обґрунтування ключових факторів визначення мети та завдань використання навчальних платформ у навчанні учнів математики. Основною метою використання цифрових навчальних платформ є покращення загальної ефективності діяльності учнів протягом уроку, а завданням, відповідно, є підвищення рівня сприйняття навчального матеріалу учнями. Тобто, вчитель має використовувати доступне середовище обраної навчальної платформи для формування предметної компетентності учнів. Зміна ролі вчителя у цифровому навчальному середовищі також потребує переосмислення цілей і методів навчання. Виокремлено чотири групи ключових факторів, які визначають мету, зміст і завдання використання навчальних платформ у процесі навчання математики: педагогічно-дидактичні — орієнтація на розвиток математичної компетентності, дослідницьку діяльність; змістові — інтеграція динамічних візуалізацій, відкритих задач, міжпредметних зв'язків; техніко-організаційні — забезпечення доступності, стабільності роботи та підтримки користувачів; методичні — підготовка педагогів, створення сценаріїв уроків і системи інтерактивного оцінювання. Навчальні платформи у навчанні математики здатні стати не лише засобом організації навчання, а потужним інструментом формування дослідницької, візуально-аналітичної та когнітивної компетентності учнів.

Ключові слова: навчальні платформи; навчання математики; мета і завдання використання.

Key factors in determining the purpose and tasks of using learning platforms in teaching mathematics students

Valentyn Ryndiuk

Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: Valentine.Rydyuk@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1026-4401>

Abstract.

An analysis of recent publications by Ukrainian scholars indicates that the processes of integrating learning platforms into school and higher education are currently being actively researched. Ukrainian studies highlight the role of learning platforms in transforming the structure and logic of knowledge acquisition. The purpose of this article is to identify and substantiate the key factors that determine the purpose and tasks of using learning platforms in the teaching of mathematics students. The main purpose of using digital learning platforms is to improve the overall effectiveness of students' performance during the lesson, and the corresponding task is to enhance students' understanding of the learning material. In other words, the teacher should use the available environment of the chosen learning platform to develop students' subject-specific competence. The changing role of the teacher in a digital learning environment also requires rethinking instructional goals and methods. Four groups of key factors have been identified that determine the purpose, content, and tasks of using learning platforms in mathematics education: pedagogical-didactic — focusing on the development of mathematical competence and research activities; content-related — integration of dynamic visualizations, open-ended problems, and interdisciplinary connections; technical-organizational — ensuring accessibility, operational stability, and user support; methodological — teacher training, development of lesson scenarios, and systems of interactive assessment. Learning platforms in mathematics education can become not only a means of organizing instruction but also a powerful tool for developing students' research, visual-analytical, and cognitive competencies.

Keywords: learning platforms; mathematics education; purpose and tasks of use.

Постановка проблеми. Впровадження інноваційних технологій є однією з складових, необхідних для розвитку закладу освіти в сучасних умовах. Найбільш поширеним прикладом впровадження технологій в школах в умовах дистанційного навчання є навчальні платформи. Такий інформаційно-технологічний інструмент в руках педагога сприяє підвищенню якості освітнього процесу та навіть створенню інформаційної системи управління школою. В умовах сьогодення бачимо, що освіта повинна бути гнучкою, відкритою системою, забезпечувати можливості для духовного, інтелектуального, фізичного, соціального, морального розвитку всіх громадян України і мати випереджувальний характер. Провідну мету нової української школи наразі виконують сучасні освітні заклади, які апробують інноваційні педагогічні, технологічні та освітні методи та інструменти (Сударева Г).

Мета сучасної школи має бути багатогранною: забезпечення всебічного розвитку особистості, реалізація інноваційних, творчих підходів у роботі з дітьми, навчання їх критичному мисленню, вмінню приймати рішення, розвивати навички комунікації та навички роботи із інформаційними технологіями, формувати та розвивати предметні компетентності (Матяш, 2025).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз публікацій українських науковців останніх років дозволяє стверджувати, що наразі активно досліджуються процеси впровадження навчальних платформ в шкільну та вищу освіту. Українські дослідження підкреслюють роль навчальних платформ у зміні структури та логіки засвоєння матеріалу. Для прикладу, М.Друшляк обґрунтувала, що використання середовища GeoGebra у навчанні математичних дисциплін дає змогу трансформувати традиційні репродуктивні завдання у дослідницькі, спрямовані на самостійне відкриття закономірностей та експериментальне підтвердження теоретичних тверджень (Друшляк, 2019). Відповідно, зміст математичних курсів має орієнтуватися на побудову зв'язку між графічними, аналітичними та числовими представленнями, що сприяє розвитку гнучкого мислення.

О. Матяш та Л. Михайленко, аналізуючи міжнародні дослідження щодо використання інформаційних технологій навчання в галузі математичної освіти зазначають, що без оновленої системи формування методичної компетентності вчителів математики неможливо якісно організувати навчання математики із сучасними цифровими технологіями. Важливим вектором розвитку освіти наразі є цифрова компетентність педагогів (Матяш, 2021 А).

В попередніх публікаціях (Риндюк, 2024) проаналізовано вітчизняний досвід використання цифрових навчальних платформ у навчанні учнів математики.

Метою цієї статті є виокремлення та обґрунтування ключових факторів визначення мети та завдань використання навчальних платформ у навчанні учнів математики.

Виклад основного матеріалу. Для того, щоб визначити ключові фактори використання навчальних платформ під час уроків фізико-математичного циклу, слід розглянути доступні методи роботи із навчальними платформами загалом. Першим варіантом є використання

сучасних комп'ютерних програм у навчанні. Як зазначають Стецюк Л. та Костоглодова О., особливістю цього варіанту використання комп'ютерних програм є проведення уроків з математики, фізики та астрономії, коли всі учні працюють на комп'ютерах під керівництвом вчителя, використовуючи при цьому матеріали і завдання із навчальних платформ. Використання навчальних платформ у такому випадку сприяє формуванню певних навичок у межах дослідницької компетентності, зокрема: уміння сформулювати навчальну проблему; уміння скласти план роботи; уміння орієнтуватися у виборі способів і засобів для вирішення конкретного завдання; уміння аналізувати отримані дані й робити висновки, оцінити отриманий результат. Метою використання навчальних платформ в межах такого способу їх застосування є додаткова предметна спеціалізація учнів, урізноманітнення використовуваних способів сприйняття інформації протягом уроку та розширення інформативності власне уроку в цілому (Стецюк, 2021).

Інший варіант, який поширений у руслі останніх подій та, відповідно, впровадження дистанційної форми навчання, це робота з використанням інтернету. Стецюк Л. та Костоглодова О. стверджують, що це значно розширює спектр та можливості різних форм підготовки та проведення уроків фізико-математичного циклу. Така форма навчання відбувається у двох режимах: живе онлайн-спілкування або дистанційне навчання, в межах якого вчитель використовує певні цифрові інструменти або створює платформу для самостійного опанування інформації, передбаченої навчальною програмою (Стецюк, 2021).

Основною метою використання цифрових навчальних платформ є покращення загальної ефективності діяльності учнів протягом уроку, а завданням, відповідно, є підвищення рівня сприйняття навчального матеріалу учнями. Тобто, вчитель використовує доступне середовище обраної навчальної платформи для формування предметної компетентності учнів. Основними факторами, на які звертається увага при формулюванні завдань використання навчальних платформ з математики Сударева Г. вказує наступні (Сударева, 2020):

Освітні цілі та стандарти: необхідно визначити, які конкретні освітні цілі та стандарти мають бути досягнені в навчанні математики.

Потреби учнів: важливо враховувати індивідуальні потреби та рівень знань учнів. Навчання повинно бути адаптоване до рівня і потреб кожного, і навчальні платформи можуть надавати можливості для індивідуалізації навчального процесу.

Доступність ресурсів: визначення доступних ресурсів для того чи іншого навчального закладу може включати в себе доступ до комп'ютерів, Інтернету, програмного забезпечення та інших технологій, які можуть використовуватися в процесі навчання та підготовки уроків.

Технічна підтримка та навчання вчителів: вчителі повинні бути підготовленими та компетентними у використанні цифрових навчальних платформ, а також інших технологій, що є допоміжними. Забезпечення вчителів необхідною підтримкою та навчанням (за потреби) є ключовим фактором успіху всього процесу.

Вибір платформи та засобів: серед різних навчальних платформ та засобів, мають бути проаналізованими та обраними ті, які найкраще відповідають цілям навчання предмету і потребам учнів.

Моніторинг та оцінка: визначення систем відстежування та оцінювання успішності використання навчальної платформи. Це може включати в себе оцінку навчальних досягнень учнів, їхню активність на платформі та інші параметри.

Залучення батьків і громади: залучення батьків і громади до процесу навчання та відкрите спілкування з ними щодо використання навчальних платформ.

Залучення доцільних педагогічних методів: навчальні платформи використовуються як інструмент для впровадження ефективних педагогічних методів, таких як активне навчання, проблемне навчання, групова робота тощо.

Постійне вдосконалення: навчальний процес в сучасних умовах і взагалі відрізняється динамічністю. Оцінювання та вдосконалення методів використання навчальних платформ на основі зворотного зв'язку та досвіду є ще одним ключовим фактором як при виборі платформи для навчання, так і при формуванні мети та завдання в цілому.

Узагальнюючи матеріали щодо використання навчальних платформ з математики у сучасній освіті, Близнюк Т. визначає ключові фактори, що впливають на формування мети та завдань використання навчальних платформ [Близнюк Т.]:

1. *Загальна доступність освіти.* Онлайн-курси забезпечують учнів доступом до освіти у віддалених регіонах або у місцях з обмеженими ресурсами, скорочуючи при цьому географічні та соціальні бар'єри.

2. *Навчання побудоване на принципах індивідуалізації.* Цифрові навчальні платформи з математики дають можливість вчителям адаптувати навчальний план згідно з потребами кожного учня, підтримуючи індивідуальний темп та стиль навчання.

3. *Підтримка дистанційного формату навчання.* Зважаючи на обставини та події сьогодення, такі як пандемія COVID-19 чи повномасштабне вторгнення країни-агресора, платформи для створення онлайн-курсів з математики, так як і інші цифрові навчальні ресурси, можуть сприяти у підтримці навчання на відстані, забезпечуючи неперервність освіти.

4. *Формування цифрових навичок.* Інтеграція цифрових платформ для навчання математики у навчальний процес також сприяє розвитку цифрових навичок учнів та вчителів, які є критично важливими в сучасному технологічному суспільстві.

5. *Підвищення рівня вмотивованості та залученості учнів.* Цифрові платформи з математики, де інформація разом із завданнями подається та оформлюється в ігровій формі, можуть сприяти залученості та мотивації учнів протягом уроків, покращуючи рівень зацікавленості та їхнє загальне ставлення до навчання.

6. *Професійний розвиток вчителів.* Цифрові платформи не лише з математики, а з інших предметів також, можуть слугувати інструментами професійного розвитку вчителів, оскільки при цьому з'являється можливість постійного вдосконалення своїх навчальних стратегій та педагогічних навичок (Сірський, 2023).

Основна педагогічна цінність платформ полягає у сприянні розвитку математичної компетентності, тобто здатності учнів до абстрактного мислення, логічного обґрунтування, математичного моделювання та застосування математичних знань у практичних ситуаціях.

S. Hwang разом з колегами дослідили тенденції використання цифрових технологій у математичній освіті та виявили, що ключовими напрямками їх впливу є розвиток візуалізації математичних понять, підтримка формульованого оцінювання та персоналізація навчання (Hwang, Flavin, & Lee, 2023). Отже, мету використання навчальної платформи необхідно визначати з урахуванням цих дидактичних функцій: не лише як засіб подання інформації, а як інструмент, що забезпечує інтерактивне дослідження понять, зворотний зв'язок у реальному часі та адаптацію освітнього процесу до рівня учня.

Суттєву роль у формуванні змісту навчання відіграють можливості платформ щодо інтерактивної візуалізації, моделювання й аналітичного відображення математичних об'єктів. В. Chechan у квазіекспериментальному дослідженні продемонстрував, що використання платформи Desmos у процесі вивчення функцій сприяє значному покращенню розуміння концепції функції, особливо за умови активної взаємодії учнів із графічними моделями та обговорення результатів під керівництвом учителя (Chechan, Ampadu, & Pears, 2023). Таким чином, при формуванні змісту навчання важливо враховувати специфічні можливості платформ: динамічну побудову графіків, маніпулювання параметрами, аналіз змін тощо.

Не менш важливими є технічні та організаційні чинники, що визначають завдання впровадження платформ. Л. Г. Гусак дослідив практику використання платформи Moodle у закладах вищої освіти України й встановив, що за відсутності належної педагогічної підтримки навчальні платформи часто виконують роль пасивного сховища матеріалів, а не інтерактивного середовища навчання (Гусак, 2021). Отже, серед ключових завдань використання платформ — створення методичних сценаріїв уроків, шаблонів інтерактивних завдань і системи формульованого оцінювання, яка б активізувала навчальну діяльність учнів.

Зміна ролі вчителя у цифровому навчальному середовищі також потребує переосмислення цілей і методів навчання. J. Engelbrecht відзначає, що цифрові платформи радикально змінюють навчальний простір, поєднуючи можливості традиційного та онлайн-навчання, а також розширюють дидактичний інструментарій викладача, орієнтуючи його на створення умов для самостійного пошуку і відкриття (Engelbrecht, 2024). Це вимагає від учителя розроблення чітких алгоритмів дій, інтеграції різних форм комунікації (синхронної та асинхронної) і забезпечення ефективного супроводу навчальної діяльності учнів.

Нижче наведена таблиця, так звана карта відповідності «мета – функції цифрової навчальної платформи», яка допомагає узгодити освітні цілі з конкретними цифровими інструментами та сценаріями їхнього використання. Таблиця містить п'ять полів: освітня мета, функції платформи, конкретні інструменти/платформи, приклади завдань/сценаріїв та критерії успішності. Відповідність складена з урахуванням сучасних досліджень та практичного досвіду впровадження GeoGebra, Desmos та LMS (Moodle, Canvas тощо).

Таблиця. Карта відповідності «мета – функції цифрової навчальної платформи»

Освітня мета	Функції платформи	Конкретні інструменти/платформи	Приклади завдань/сценаріїв	Критерії успішності
Формування концептуального розуміння (глибоке розуміння понять)	Динамічна візуалізація, multiple representations, інтерактивні демонстрації	GeoGebra, Desmos, інтерактивні модулі LMS	Завдання: дослідити параметри квадратичної функції, інтерпретувати зміни графіка при зміні коефіцієнтів; лабораторні роботи з геометрії в GeoGebra	Учень правильно пояснює вплив параметрів; завдання з відкритою відповіддю -> $\geq 70\%$ робіт на рівні «аналітичне пояснення»
Розвиток процедурної майстерності (виконавські навички)	Автоматична перевірка, тренувальні вправи, крокові підказки	Moodle (тестові питання, плагіни), Khan Academy-подібні платформи	Завдання: автоматизовані вправи на обчислення, адаптивні вправи з поступовим ускладненням	Швидкість і точність виконання; зниження кількості помилок на 30% в серії вправ
Моделльне мислення та застосування (математичне моделювання)	Побудова моделей, симуляції, робота з даними, параметричні моделі	GeoGebra, Desmos, Python/Notebooks (для старших класів)	Завдання: створити модель росту популяції, математично описати процес і зробити прогноз; проектні роботи	Якість моделі; аргументація вибору параметрів; застосування моделі до практичної ситуації
Комунікація математичних ідей та аргументація	Спільні робочі простори, коментування, презентації,	Desmos Activity Builder, спільні документи, форуми LMS	Завдання: групова робота з презентацією рішення,	Наявність логічного пояснення, peer-review

	можливість запису кроків рішення		peer-review, пояснювальні відео/скрінкасти	позитивні відгуки $\geq 70\%$
Формувальне оцінювання та персоналізація	Миттєвий зворотний зв'язок, адаптивність, аналітика навчання	Moodle, Canvas, системи з адаптивними алгоритмами	Завдання: серії тестів з адаптивним рівнем складності, індивідуальні траєкторії навчання	Покращення показників у межах індивідуальних траєкторій; зростання engagement
Мотивація та залучення учнів	Гейміфікація, інтерактивні вправи, візуальні інтерфейси	Quizizz, Kahoot!, Desmos activities	Завдання: інтерактивні змагання, квести, змагання між командами	Підвищення участі в класі; кількість активних відповідей у синхронних сесіях
Розвиток цифрової грамотності та співпраці	Інструменти для спільної роботи, версійність, інтеграція різних форматів	LMS, Google Workspace / Microsoft 365, репозиторії	Завдання: співпраця над проектом, документування процесу, репозиторії для коду/робіт	Якість співпраці, дотримання етикету, версійність документу

Висновки. Останнім часом в Україні спостерігається зростання кількості ініціатив, спрямованих на розвиток онлайн-освіти. Ці інновації, хоча і потребують значних інвестицій, можуть стати важливим фактором модернізації системи освіти в Україні (Сірський Л., 2023).

Узагальнення результатів аналізу досліджень дозволяє виокремити чотири групи ключових факторів, які визначають мету, зміст і завдання використання навчальних платформ у процесі навчання математики:

Педагогічно-дидактичні — орієнтація на розвиток математичної компетентності, дослідницьку діяльність;

Змістові — інтеграція динамічних візуалізацій, відкритих задач, міжпредметних зв'язків;

Техніко-організаційні — забезпечення доступності, стабільності роботи та підтримки користувачів;

Методичні — підготовка педагогів, створення сценаріїв уроків і системи інтерактивного оцінювання.

Таким чином, навчальні платформи у навчанні математики стають не лише засобом організації навчання, а потужним інструментом формування дослідницької, візуально-аналітичної та когнітивної компетентності учнів.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Близнюк, Т. (2021). *Цифрові інструменти для онлайн і офлайн навчання: навчально-методичний посібник*. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника.
- Chechan, B. (2023). Effect of using Desmos on high school students' understanding and learning of functions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. <https://www.ejmste.com/download/effect-of-using-desmos-on-high-school-students-understanding-and-learning-of-functions-13540.pdf>
- Друшляк, М. (2021). Теорія і практика формування візуально-інформаційної культури майбутніх учителів математики та інформатики у закладах вищої освіти. *Освіта. Інноватика. Практика*, 9(2), 15–22. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol9i2-002>
- Engelbrecht, J., & Borba, M. C. (2024). Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 56, 281–292. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01530-2>
- Гусак, Л. П., & Радзіховська, Л. (2021). Використання системи управління навчанням Moodle в процесі дистанційного навчання вищої та прикладної математики. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота*, (1), 104–107.
- Hwang, S., Flavin, M., & Lee, J. (2023). Exploring research trends of technology use in mathematics education: A scoping review. *Education and Information Technologies*, 28(1), 1023–1045. <https://doi.org/10.1007/s10639-022-11528-9>
- Matias, O., Mykhailenko, L., Dmitrenko, N., Kateryniuk, H., & Kalashnikov, I. (2021b). The use of ICT tools in teaching mathematical modeling to students. In *Proceedings of the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology (AET 2021)* (pp. 675–687). <https://doi.org/10.5220/0012066900003431>
- Matias, O., Panasenko, O., & Horiashyn, A. (2023). Learning platforms in the training of future mathematics teachers: Analysis of foreign experience. *ScienceRise: Pedagogical Education*, 4(55), 9–14. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2023.284676>
- Матяш, О. І., Михайленко, Л. Ф., & Воевода, А. Л. (2021a). Актуальні аспекти міжнародних досліджень використання інформаційних технологій навчання в галузі математичної освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (60). <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2021-60-81-90>
- Матяш, О., & Риндюк, В. (2023). Навчання математики з використанням цифрових навчальних платформ: аналіз закордонного досвіду. *Фізико-математична освіта*, 38(3), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-006>
- Матяш, О., & Риндюк, В. (2025). Використання цифрових навчальних платформ в математичній освіті: досвід Данії. *Наукові інновації та передові технології (Серія «Педагогіка»)*, 2(42), 1503–1514. <http://perspectives.pp.ua/index.php/nauka/article/view/19931/19908>
- Риндюк, В. (2024). Навчання математики з використанням цифрових навчальних платформ: аналіз вітчизняного досвіду. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, (1).
- Сірський, Л. (2023). Вплив платформ для онлайн-курсів на навчання в школах. *Osvita.ua*. <https://osvita.ua/news/89291/>
- Стецюк, Л., & Костоглодова, О. (2021). Використання комп'ютерних технологій на уроках фізико-математичного циклу як дієвий інструмент учителя на шляху змін в освітньому просторі. У О. О. Буряк (Уклад.), *Цифрові інструменти для організації змішаного навчання в шкільній природничо-математичній освіті: науково-методичний посібник* (с. 122). Видавничий дім "Бук-Друк".
- Сударева, Г. (2020). Упровадження STEM-освіти в умовах нової української школи. У Г. Л. Єфремової (Ред.), *Інноваційні технології в сучасному освітньому просторі* (с. 156). Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка.

References

- Blyzniuk, T. (2021). *Tsyfrovi instrumenty dlia onlain i oflain navchannia: navchalno-metodychnyi posibnyk* [in Ukrainian] (*Digital tools for online and offline learning: A teaching-methodical manual*). Prykarpatskyi National University named after Vasyl Stefanyk.

- Chechan, B. (2023). Effect of using Desmos on high school students' understanding and learning of functions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. <https://www.ejmste.com/download/effect-of-using-desmos-on-high-school-students-understanding-and-learning-of-functions-13540.pdf>
- Drushliak, M. (2021). *Teoriia i praktyka formuvannia vizualno-informatsiinoi kultury maibutnikh uchyteliv matematyky ta informatyky u zakladakh vyshchoi osvity* [in Ukrainian] (*Theory and practice of forming visual-information culture of future mathematics and informatics teachers in higher education institutions*). *Osvita. Innovatyka. Praktyka*, 9(2), 15–22. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol9i2-002>
- Engelbrecht, J., & Borba, M. C. (2024). Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 56, 281–292. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01530-2>
- Husak, L. P., & Radzikhovska, L. (2021). *Vykorystannia systemy upravlinnia navchanniam Moodle v protsesi dystantsiinoho navchannia vyshchoi ta prykladnoi matematyky* [in Ukrainian] (*Using the Moodle learning management system in distance teaching of higher and applied mathematics*). *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Serii: Pedahohika. Sotsialna robota*, (1), 104–107.
- Hwang, S., Flavin, M., & Lee, J. (2023). Exploring research trends of technology use in mathematics education: A scoping review. *Education and Information Technologies*, 28(1), 1023–1045. <https://doi.org/10.1007/s10639-022-11528-9>
- Matiash, O., Mykhailenko, L., Dmitrenko, N., Kateryniuk, H., & Kalashnikov, I. (2021b). The use of ICT tools in teaching mathematical modeling to students. In *Proceedings of the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology (AET 2021)* (pp. 675–687). <https://doi.org/10.5220/0012066900003431>
- Matiash, O., Panasenko, O., & Horiashyn, A. (2023). Learning platforms in the training of future mathematics teachers: Analysis of foreign experience. *ScienceRise: Pedagogical Education*, 4(55), 9–14. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2023.284676>
- Matiash, O. I., Mykhailenko, L. F., & Voevoda, A. L. (2021a). *Aktualni aspekty mizhnarodnykh doslidzen vykorystannia informatsiinykh tekhnolohii navchannia v haluzi matematychnoi osvity* [in Ukrainian] (*Current aspects of international research on the use of information technologies in mathematics education*). *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia v pidhotovtsi fakhivtsiv*, (60). <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2021-60-81-90>
- Matiash, O., & Ryndiuk, V. (2023). *Navchannia matematyky z vykorystanniam tsyfrovyykh navchalnykh platform: analiz zakordonnoho dosvidu* [in Ukrainian] (*Teaching mathematics using digital learning platforms: Analysis of foreign experience*). *Fyzyko-matematychna osvita*, 38(3), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-006>
- Matiash, O., & Ryndiuk, V. (2025). *Vykorystannia tsyfrovyykh navchalnykh platform v matematychnii osviti: dosvid Daniil* [in Ukrainian] (*Use of digital learning platforms in mathematics education: Danish experience*). *Naukovi innovatsii ta peredovi tekhnolohii (Serii "Pedahohika")*, 2(42), 1503–1514. <http://perspectives.pp.ua/index.php/nauka/article/view/19931/19908>
- Ryndiuk, V. (2024). *Navchannia matematyky z vykorystanniam tsyfrovyykh navchalnykh platform: analiz vitchyznianoho dosvidu* [in Ukrainian] (*Teaching mathematics using digital learning platforms: Analysis of national experience*). *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, (1).
- Sirs'kyi, L. (2023). *Vplyv platform dlia onlain-kursiv na navchannia v shkolakh* [in Ukrainian] (*Impact of online-course platforms on school learning*). *Osvita.ua*. <https://osvita.ua/news/89291/>
- Stetsiuk, L., & Kostoglodova, O. (2021). *Vykorystannia komp'iuternykh tekhnolohii na urokakh fyzyko-matematychnoho tsyklu yak diievyi instrument vchytelia na shliakhu zmin v osvitnomu prostori* [in Ukrainian] (*Use of computer technologies in physics-mathematics classes as an effective tool for teachers amid educational change*). In O. O. Buriak (Ed.), *Tsyfrovi instrumenty dlia orhanizatsii zmishanoho navchannia v shkilnii pryrodnycho-matematychnii osviti* (p. 122). Vydavnychiy dim "Buk-Druk".
- Sudareva, H. (2020). *Uprovadzhennia STEM-osvity v umovakh novoi ukrainskoi shkoly* [in Ukrainian] (*Implementation of STEM education under the conditions of the New Ukrainian School*). In H. L. Yefremova (Ed.), *Innovatsiini tekhnolohii v suchasnomu osvitnomu prostori* (p. 156). SumDPU imeni A. S. Makarenka.

Отримано / Received 16.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 17.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

УДК 378.016:[373.5.091.26/.27:51]

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-112-122

Формування готовності майбутніх учителів математики до моніторингу, діагностики й оцінювання результатів навчання

Любов Михайленко¹, Іван Хутченко²

1. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м.Вінниця, Україна

E-mail: mikhailenkolf@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5051-5561>

2. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м.Вінниця, Україна

E-mail: chytor96@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9022-6996>

Анотація.

У статті висвітлено проблему підготовки майбутніх учителів математики до здійснення моніторингу, діагностики та оцінювання результатів навчання учнів у контексті реалізації реформ Нової української школи. На основі аналізу нормативно-правових документів (Законів України «Про освіту», «Про повну загальну середню освіту», Державного стандарту базової середньої освіти, Державного стандарту профільної середньої освіти, професійного стандарту «Вчитель закладу загальної середньої освіти») та сучасних досліджень у галузі методики навчання математики обґрунтовано необхідність цілеспрямованого формування у магістрантів оцінювально-аналітичної та діагностувальної компетентностей. Зазначено, що ці компетентності забезпечують здатність майбутнього вчителя здійснювати педагогічну діагностику, аналізувати результати навчання, проводити моніторинг якості математичної освіти та приймати педагогічно обґрунтовані рішення на основі освітніх даних. Представлено мету, завдання й зміст навчальної дисципліни «Моніторинг, діагностика та оцінювання навчання з математики», розробленої в межах магістерської підготовки майбутніх учителів. Визначено структуру курсу, що поєднує теоретичні основи оцінювання, методики педагогічної діагностики та практику проведення моніторингових досліджень із використанням цифрових інструментів. Показано, що реалізація змісту дисципліни сприяє розвитку в майбутніх учителів аналітичного, рефлексивного й прогностичного мислення, формує здатність до здійснення об'єктивного, етичного та інклюзивного оцінювання, а також підвищує готовність до впровадження формувального оцінювання в освітній практиці.

Ключові слова: оцінювання навчальних досягнень, педагогічна діагностика, моніторинг якості освіти, професійна підготовка вчителя, оцінювально-аналітична компетентність.

UDC: 378.016:[373.5.091.26/.27:51]

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-112-122

Formation of readiness of future mathematics teachers for monitoring, diagnostics, and assessment of learning outcomes

Liubov Mykhailenko¹, Ivan Khutchenko²

1. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: mikhailenkolf@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5051-5561>

2. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: chytor96@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9022-6996>

Abstract.

The article highlights the problem of preparing future mathematics teachers for monitoring, diagnostics, and assessment of students' learning outcomes in the context of the New Ukrainian School reform. Based on the analysis of normative and legal documents (the Laws of Ukraine "On Education", "On Complete General Secondary Education", the State Standard of Basic Secondary Education, the State Standard of Specialized Secondary Education, and the Professional Standard "Teacher of a General Secondary Education Institution"), as well as current research in the field of mathematics education, the necessity of purposefully developing evaluative-analytical and diagnostic competencies in master's students is substantiated. These competencies ensure the future teacher's ability to carry out pedagogical diagnostics, analyze learning outcomes, conduct monitoring of the quality of mathematics education, and make pedagogically sound decisions based on educational data.

The article presents the purpose, objectives, and content of the academic course "Monitoring, Diagnostics, and Assessment of Mathematics Learning", developed within the framework of the master's program for future teachers. The structure of the course is defined as one that integrates the theoretical foundations of assessment, methods of pedagogical diagnostics, and the practice of conducting monitoring studies using digital tools. It is shown that the implementation of the course content promotes the development of analytical, reflective, and prognostic thinking in future teachers, fosters their ability to carry out objective, ethical, and inclusive assessment, and enhances their readiness to implement formative assessment in educational practice.

Keywords: assessment of learning achievements, pedagogical diagnostics, monitoring of education quality, teacher professional training, evaluative-analytical competence, future mathematics teachers.

Постановка проблеми. Сучасна підготовка майбутніх учителів математики перебуває на етапі трансформацій, зумовлених реформою Нової української школи у базовій та профільній освіті. Одним із ключових викликів є запровадження нової системи оцінювання результатів навчання. Зазначається, що «вимоги до обов'язкових результатів навчання, визначені в Державному стандарті базової середньої освіти, потребують зміни підходів до оцінювання (оцінювання не того, як учні опанували зміст певної теми навчальної програми, а оцінювання рівня досягнення учнями / ученицями тих обов'язкових результатів навчання, які визначено державним стандартом)» (МОН наполягає, що нове оцінювання «відповідає підходам НУШ», але погоджується, що треба спростити процедуру – відповідь на запит медіа «НУШ», б. д.). Таким чином, у шкільній практиці утверджується оцінювання, спрямоване на підтримку й розвиток, а не виключно на контроль. Це означає перехід від парадигми «що ти отримав/-ла?» до підходу «чого ти навчився/-лася?» (Міністерство освіти і науки України, б.р.).

Аналіз джерел та останніх досліджень. Нормативно-правові документи Міністерства освіти і науки України свідчать про потребу у формуванні в майбутніх учителів готовності до якісного моніторингу та оцінювання навчальних досягнень учнів. На законодавчому рівні це право гарантується Законом України «Про освіту», де визначено, що кожен здобувач має право на справедливе та об'єктивне оцінювання результатів навчання (Про освіту, 2025, ст. 53, п. 1). Ці положення конкретизуються у Законі України «Про повну загальну середню освіту», який визначає форми оцінювання (формувальне, поточне, підсумкове, державна підсумкова атестація, зовнішнє незалежне оцінювання) відповідно до вимог державних стандартів (Про повну загальну середню освіту, 2025, ст. 17).

На рівні Державного стандарту базової середньої освіти (Кабінет Міністрів України, 2020), та Державного стандарту профільної середньої освіти (Кабінет Міністрів України, 2024) описано систему оцінювання компетентностей здобутих на рівні базової та профільної середньої освіти та визначено орієнтири для оцінювання, на основі яких визначається рівень досягнення здобувачами освіти результатів навчання. Подальші рекомендації МОН (наказ № 1093 від 02.08.2024; лист № 1/4895-25 від 14.03.2025) деталізують критерії оцінювання та особливості застосування формувального, поточного й підсумкового оцінювання, а також способи фіксації результатів у документації.

Важливою є й вимога оновленого Професійного стандарту «Вчитель закладу загальної середньої освіти» (2024), де зазначено необхідність володіння діагностичними та моніторинговими інструментами, а також уміння аналізувати й коригувати навчальний процес на основі результатів оцінювання. Таким чином, сукупність положень законів, стандартів та методичних рекомендацій підкреслює важливість підготовки майбутніх учителів математики до грамотної організації процесу оцінювання, спрямованого не лише на перевірку знань, а й на відстеження динаміки розвитку компетентностей учнів.

Проблему підготовки майбутніх учителів математики до якісного моніторингу, діагностики та оцінювання навчальних досягнень учнів у своїх працях висвітлювали О.Матяш (2019), Л. Михайленко (2022), О. Онопрієнко (2021), С. Сковрцова (2025), Н. Тарасенкова (2023), Л. Черкаська (2013), Я. Чкана, І. Шищенко (2019), О. Шкільний (2015) та ін.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми.

Результати контент-аналізу освітньо-професійних програм підготовки майбутніх учителів математики свідчать, що проблематика педагогічної діагностики, моніторингу та оцінювання результатів навчання відображена неповно й несистемно: переважно ці питання інтегровані у зміст окремих тем методичних дисциплін, без виділення їх у самостійний об'єкт професійної підготовки.

Метою статті є обґрунтування змістового наповнення навчальної дисципліни «Моніторинг, діагностика та оцінювання навчання з математики» на основі аналізу нормативних документів та сучасних досліджень у галузі методики навчання математики.

Виклад основного матеріалу. У процесі дослідження важливо уточнити ключові поняття, що становлять термінологічну основу проблеми, адже саме їх зміст визначає логіку подальших теоретичних міркувань і практичних висновків.

Проблема готовності до професійної діяльності посідає одне з провідних місць у сучасній педагогічній науці, оскільки від рівня її сформованості залежить ефективність реалізації майбутнім учителем усіх видів професійних функцій. У науковій літературі поняття «готовність до педагогічної діяльності» розглядається як інтегральна особистісна характеристика, що поєднує мотиваційні, когнітивні, діяльнісні та рефлексивні компоненти (Староста, 2019). Оскільки готовність до оцінювальної діяльності є одним із проявів професійної готовності вчителя, доцільно звернутися до з'ясування сутності суміжних педагогічних понять, які визначають структуру цієї діяльності — оцінювання навчальних досягнень, освітньої діагностики, моніторингу якості освіти тощо. Їх розуміння дозволяє уточнити зміст, функції та механізми формування оцінювально-аналітичної компетентності майбутнього вчителя математики. У цьому контексті варто зазначити, що оцінювання навчальних досягнень трактується як процедура формування кількісної та якісної характеристики досягнутих у навчанні результатів. Діагностувальний складник контрольно-оцінювальної діяльності пов'язаний із виявленням здобутків в оволодінні змістом предмета чи курсу, якості результатів навчання — компетентностей (знань, умінь, цінностей, інших особистісних властивостей), які здобувач освіти набуває та здатен продемонструвати на певному етапі навчання (Онопрієнко, 2021). Як зазначає О. Я. Савченко, оцінювання передбачає установлення ступеня відповідності виконаних школярами навчальних завдань вимогам до рівня їх якості (Онопрієнко, 2021).

Поняття «освітня діагностика» тлумачиться як процес визначення результатів освітньої діяльності учнів і вчителя з метою виявлення, аналізу, оцінювання та корекції навчання

(Онопрієнко, 2021), а «моніторинг якості освіти», відповідно до статті 48 Закону України «Про освіту», — як система послідовних і систематичних заходів, спрямованих на виявлення та відстеження тенденцій у розвитку якості освіти, установлення відповідності фактичних результатів освітньої діяльності її заявленим цілям та визначення причин відхилень.

Підготовка майбутнього вчителя математики до здійснення якісного моніторингу, діагностики та оцінювання навчання математики вимагає розвитку відповідних професійних компетентностей. Серед них особливе місце посідають діагностувальна та оцінювально-аналітична компетентності, які забезпечують здатність учителя науково обґрунтовано збирати, інтерпретувати й використовувати інформацію про результати навчання учнів. Ці компетентності безпосередньо корелюють із вимогами професійного стандарту «Вчитель закладу загальної середньої освіти» та з компетентнісними критеріями незалежного оцінювання педагогічних працівників.

Діагностувальна компетентність учителя — це здатність здійснювати педагогічну діагностику, виявляти рівень сформованості знань, умінь і компетентностей учнів, аналізувати типові труднощі та причини помилок, визначати динаміку розвитку навчальних досягнень. Ця компетентність безпосередньо співвідноситься з компетентнісними критеріями незалежного оцінювання педагогічних працівників (*Знати*: види та форми діагностичних робіт для контролю динаміки процесу навчання учнів; *Уміти*: визначати мету педагогічної діагностики; визначати критерії та показники формувального оцінювання; інтерпретувати результати педагогічної діагностики; визначати труднощі в реалізації мети навчання, визначати шляхи подолання цих труднощів; інтерпретувати типові труднощі та помилки учнів; *Добирати*: методи і прийоми для визначення мети педагогічної діагностики, критеріїв і показників формувального оцінювання; форми діагностичних робіт для здійснення моніторингу результатів навчання учнів; методи педагогічної діагностики та педагогічного оцінювання; критерії оцінювання результатів навчання учнів, визначені в державному стандарті середньої освіти) (Міністерство освіти і науки України, 2025, 26 червня). Її сутність полягає не лише у вимірюванні результату, а передусім у визначенні динаміки розвитку учня та причин його успіхів чи труднощів. Структурними компонентами діагностувальної компетентності є: мотиваційно-ціннісний (усвідомлення значущості діагностики), когнітивний (знання теоретичних засад), операційно-технологічний (уміння застосовувати інструменти), аналітико-рефлексивний (уміння інтерпретувати результати та здійснювати корекцію навчання). У контексті навчання математики ця компетентність означає здатність учителя визначати рівень сформованості математичних понять, способів мислення, умінь і виявляти типові помилки та труднощі учнів. Практична реалізація діагностувальної компетентності виражається у вмінні: визначати мету педагогічної діагностики, добирати адекватні методи та інструменти (спостереження, діагностичні

роботи, опитування, тести), фіксувати й інтерпретувати результати навчання, здійснювати корекцію освітнього процесу на підставі отриманих даних.

Оцінювально-аналітична компетентність – це здатність учителя здійснювати системне оцінювання результатів навчання, аналізувати освітні дані, робити прогностичні висновки й ухвалювати педагогічно виважені рішення. Вона є надбудовою над діагностувальною компетентністю, оскільки охоплює не лише процес збору діагностичних даних, а й аналітику, інтерпретацію, прогноз і управління якістю навчання. Ця компетентність відповідає пунктам ГЗ.1. (Здатність здійснювати оцінювання результатів навчання здобувачів освіти), ГЗ.2 (здатність аналізувати результати навчання) і ГЗ.3 (здатність формувати спроможність до само- і взаємооцінювання) вимог Професійного стандарту вчителя (Міністерство освіти і науки України, 2024, 29 серпня). Структурно ця компетентність включає: ціннісно-смисловий (усвідомлення ролі оцінювання у розвитку учня), знаннєвий (знання підходів і методик оцінювання), аналітичний (уміння аналізувати результати), прогностичний (здатність передбачати тенденції) та рефлексивний (оцінювання власної діяльності) компоненти. Учитель, який володіє оцінювально-аналітичною компетентністю, здатний: аналізувати освітні результати учнів, узагальнювати дані діагностики, формувати педагогічні висновки, забезпечувати якісний зворотний зв'язок, прогнозувати подальший розвиток навчальних досягнень, а також залучати учнів до самооцінювання й рефлексії власного поступу.

Вимоги до оцінювальної діяльності педагога, закладені у незалежному оцінюванні вчителів математики, вимагають сформованості обох компетентностей. Зокрема, у частині «Оцінювання результатів навчання учнів» передбачено здатність: визначати критерії формувального оцінювання, добирати форми діагностичних робіт, інтерпретувати результати педагогічної діагностики, виявляти типові помилки та труднощі учнів, розробляти рекомендації щодо їх подолання.

Таким чином, діагностувальна компетентність відповідає за точність збору та фіксації інформації про результати навчання, тоді як оцінювально-аналітична — за її осмислення, узагальнення й використання для вдосконалення освітнього процесу.

Враховуючи зростання ролі оцінювально-аналітичної діяльності в професійній підготовці майбутніх учителів математики, постає потреба у створенні цілісної навчальної дисципліни, спрямованої на формування відповідних умінь і навичок. У цьому контексті до структури магістерської підготовки логічно інтегровано дисципліну «Моніторинг, діагностика та оцінювання навчання з математики», зміст якої забезпечує узгодження теоретичних і практичних аспектів оцінювання, педагогічної діагностики та освітнього моніторингу.

Мета вивчення цієї дисципліни узгоджується з положеннями Професійного стандарту вчителя закладу загальної середньої освіти (2024) та передбачає не лише ознайомлення здобувачів освіти з теоретичними засадами оцінювання, а й формування здатності здійснювати педагогічну діагностику, проводити моніторинг навчальних досягнень і

аналізувати результати навчання учнів. Метою вивчення навчальної дисципліни «Моніторинг, діагностика та оцінювання навчання з математики» є формування в майбутніх учителів математики оцінювально-аналітичної компетентності, здатності здійснювати моніторинг, педагогічну діагностику та оцінювання результатів навчання учнів відповідно до вимог професійного стандарту вчителя, а також розвиток рефлексивних умінь для підвищення якості власної педагогічної діяльності.

Реалізація зазначеної мети забезпечується системою навчальних завдань, спрямованих на поетапне формування професійної готовності магістрантів до оцінювально-аналітичної діяльності.

Основними завданнями курсу є:

- Ознайомити здобувачів вищої освіти з нормативно-правовою базою України та міжнародними підходами до оцінювання результатів навчання;
- Розкрити роль оцінювання у компетентнісному навчанні математики та розвитку учнів;
- Розвинути здатність проводити діагностику навчальних досягнень учнів і здійснювати аналіз їхніх освітніх потреб;
- Ознайомити з методами моніторингу якості математичної освіти на рівні класу, школи, громади та держави;
- Забезпечити розуміння етичних та інклюзивних принципів у процесі оцінювання;
- Сприяти розвитку рефлексивних та аналітичних навичок у майбутніх вчителів для вдосконалення власної педагогічної практики.

Зміст навчальної дисципліни побудовано з урахуванням логіки професійної діяльності вчителя та відображає взаємозв'язок трьох ключових компонентів — оцінювання, діагностики та моніторингу. Програму структуровано за двома основними розділами, що поєднують теоретичну й практичну підготовку здобувачів освіти.

У першому розділі розглядаються сутність і функції оцінювання в освітньому процесі, його роль у формуванні компетентностей учнів, методики формувального, поточного й підсумкового оцінювання, критерії та шкали, а також психолого-педагогічні основи самооцінювання і взаємооцінювання.

Другий розділ присвячено педагогічній діагностиці та моніторингу якості математичної освіти, зокрема аналізу освітніх результатів, статистичним методам обробки даних, візуалізації результатів і використанню цифрових інструментів для проведення моніторингових досліджень.

Особливу увагу приділено практико-орієнтованій підготовці, яка реалізується через систему практичних і лабораторних занять. Їх зміст спрямований на формування в майбутніх учителів умінь розробляти критерії оцінювання, добирати ефективні методики педагогічної

діагностики, аналізувати результати моніторингу й формувати педагогічно виважені висновки для вдосконалення освітнього процесу.

Таким чином, запропонована навчальна дисципліна забезпечує цілісну підготовку магістрів до здійснення оцінювально-аналітичної діяльності, сприяє підвищенню якості математичної освіти та розвитку готовності майбутніх педагогів до рефлексії, аналітики й самовдосконалення у професійній сфері.

Зміст програми навчальної дисципліни «Моніторинг, діагностика та оцінювання навчання з математики» структурно узгоджений із характеристиками діагностувальної та оцінювально-аналітичної компетентностей майбутнього вчителя математики. У межах курсу послідовно реалізуються всі компоненти цих компетентностей: мотиваційно-ціннісний (через вивчення етичних та інклюзивних аспектів оцінювання, принципів об'єктивності та академічної доброчесності), когнітивний (засвоєння теоретичних засад оцінювання, діагностики, моніторингу), операційно-технологічний (опанування методик, форм і засобів оцінювання, створення власних діагностичних інструментів), аналітико-рефлексивний (інтерпретація результатів навчання, аналіз освітніх даних, формування висновків і рекомендацій) та прогностичний (використання результатів моніторингу для планування подальшого навчання). Така узгодженість між теоретичним і практичним компонентами забезпечує системне формування готовності магістрантів до здійснення діагностувальної, оцінювальної й аналітичної діяльності, що відповідає сучасним вимогам Професійного стандарту вчителя математики та концепції компетентнісного підходу в освіті.

Висновки. У результаті проведеного дослідження з'ясовано, що питання моніторингу, діагностики та оцінювання навчальних досягнень учнів залишаються недостатньо представленими у змісті професійної підготовки майбутніх учителів математики. Аналіз нормативно-правових документів, державних стандартів і професійного стандарту вчителя засвідчив потребу у формуванні в майбутніх педагогів діагностувальної та оцінювально-аналітичної компетентностей як ключових складових їхньої професійної готовності.

Розроблена навчальна дисципліна «Моніторинг, діагностика та оцінювання навчання з математики» забезпечує реалізацію цієї потреби, оскільки поєднує теоретичну, аналітичну та практичну підготовку здобувачів освіти. Зміст курсу спрямований на розвиток здатності проводити педагогічну діагностику, аналізувати освітні результати, здійснювати моніторинг якості математичної освіти та використовувати цифрові інструменти для об'єктивного оцінювання.

Викладання цієї дисципліни сприятиме формуванню у майбутніх учителів математики рефлексивної позиції, готовності до аналітичного осмислення власної педагогічної діяльності та підвищенню якості математичної освіти в умовах реалізації реформ Нової української школи.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Кабінет Міністрів України. (2020, 30 вересня). Державний стандарт базової середньої освіти (Постанова № 898). <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-rovnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- Кабінет Міністрів України. (2024, 25 вересня). Державний стандарт профільної середньої освіти (Постанова № 851). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF>
- Матяш, О. І., & Тютюнник, Д. О. (2019). Проблема визначення критеріїв та показників математичних компетентностей, набутих учнями у процесі навчання геометрії. *Фізико-математична освіта*, (2 (20)), 89–93. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-020-2-014>
- Михайленко, Л. (2022). Сучасні підходи до впровадження формувального оцінювання на уроках математики. *Фізико-математична освіта*, 37(5), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-006>
- Міністерство освіти і науки України. (2024, 29 серпня). Про затвердження професійного стандарту «Вчитель закладу загальної середньої освіти» (Наказ № 1225). <https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennia-profesiinoho-standartu-vchytel-zakladu-zahalnoi-serednoi-osvity>
- Міністерство освіти і науки України. (2024, 9 серпня). Про затвердження Рекомендацій щодо оцінювання результатів навчання учнів закладів загальної середньої освіти (Наказ № 1093). <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v1093729-24#Text>
- Міністерство освіти і науки України. (2025, 14 березня). Про окремі питання оцінювання результатів навчання (Лист № 1/4895-25). <https://mon.gov.ua/npa/pro-okremi-pytannia-otsiniuvannia-rezultatativ-navchannia>
- Міністерство освіти і науки України. (2025, 26 червня). Про затвердження програм незалежного тестування фахових знань та вмінь учасників сертифікації (Наказ № 933). https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2025/06/nakaz-MON_933.pdf
- Міністерство освіти і науки України. (б. д.). Мон наполягає, що нове оцінювання “відповідає підходам НУШ”, але погоджується, що треба спростити процедуру – відповідь на запит медіа “НУШ”. *Нова українська школа | Веб-ресурс НУШ*. <https://nus.org.ua/2025/02/28/mon-napolyagaye-shho-nove-otsinyuvannya-vidpovidaye-pidhodam-nush-ale-pogodzhuyetsya-shho-treba-sprostyty-protseduru-vidpovid-na-zapyt-media-nush>
- Міністерство освіти і науки України. (б. р.). Оцінювання в НУШ: путівник для батьків. https://drive.google.com/file/d/1fBr4qSwglvjUBkustl_bZzxrhugiRjYv/view
- Онопrienko, О. В. (2021). *Нова українська школа: інноваційна система оцінювання результатів навчання учнів початкової школи : навч.-метод. посіб.* Харків: Ранок. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/729723/1/Інновац%20система%20оцінювання.pdf>
- Скворцова, С., & Гаєвець, Я. (2025). Організаційно-педагогічні умови підготовки майбутніх учителів до навчання учнів математики. *NewInception*, (1-2 (19-20)), 13–34. <https://doi.org/10.58407/NI.25.1-2.1>
- Староста, В. І. (2019). Готовність майбутніх учителів до педагогічної діяльності: сутність, структура. *Народна освіта. Електронне наукове фахове видання*, 3(39). https://www.narodnaosvita.kiev.ua/?page_id=5923

- Тарасенкова, Н. А. (2023). Засоби формувального оцінювання у навчанні математики. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 2(22), 142-150. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10457858>
- Черкаська, Л. (2013). Інформаційно-комунікаційні технології як засіб здійснення контролю й корекції результатів навчання учнів. Імідж сучасного педагога, (2), 21-24.
- Чкана, Я. О., & Шищенко, І. В. (2019). Контроль навчальних досягнень учнів у класах з гуманітарним профілем навчання. Фізико-математична освіта, (2 (20)), 154-159.
- Шкільний, О. В. (2015). Теоретико-методичні засади оцінювання навчальних досягнень з математики [Дисертація доктора наук, Державний реєстраційний номер 0515U000891]. https://uacademic.info/ua/document/0515U000891#google_vignette

References

- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2020, September 30). *Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity (Postanova No. 898) [State standard of basic secondary education]* [Ukrainian]. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standativ-povnoyi-zagalnoi-serednoi-osviti-i300920-898>
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2024, September 25). *Derzhavnyi standart profilnoi serednoi osvity (Postanova No. 851) [State standard of specialized secondary education]* [Ukrainian]. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF>
- Matyash, O. I., & Tyutyunnik, D. O. (2019). *Problema vyznachennia kryteriiv ta pokaznykiv matematichnykh kompetentnostei, nabutykh uchniamy u protsesi navchannia heometrii [The problem of defining criteria and indicators of mathematical competencies acquired by students in the process of learning geometry]* [Ukrainian]. *Fizyko-matematychna osvita [Physico-Mathematical Education]*, 2(20), 89-93. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-020-2-014>
- Mykhailenko, L. (2022). *Suchasni pidkhody do vprovadzhennia formuvalnoho otsiniuvannia na urokakh matematyky [Modern approaches to the implementation of formative assessment in mathematics lessons]* [Ukrainian]. *Fizyko-matematychna osvita [Physico-Mathematical Education]*, 37(5), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-006>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2024, August 29). *Pro zatverdzhennia profesiinoho standartu "Vchytel zakladu zahalnoi serednoi osvity" (Nakaz No. 1225) [On approval of the professional standard "Teacher of a general secondary education institution"]* [Ukrainian]. <https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennia-profesiinoho-standartu-vchytel-zakladu-zahalnoi-serednoi-osvity>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2024, August 9). *Pro zatverdzhennia rekomendatsii shchodo otsiniuvannia rezultativ navchannia uchniv zakladiv zahalnoi serednoi osvity (Nakaz No. 1093) [On approval of the Recommendations on the assessment of learning outcomes of students of general secondary education institutions]* [Ukrainian]. <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v1093729-24#Text>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2025, March 14). *Pro okremi pytannia otsiniuvannia rezultativ navchannia (Lyst No. 1/4895-25) [On certain issues of assessment of learning outcomes]* [Ukrainian]. <https://mon.gov.ua/npa/pro-okremi-pytannia-otsiniuvannia-rezultativ-navchannia>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2025, June 26). *Pro zatverdzhennia prohram nezalezhnogo testuvannia fakhovykh znan i vmin uchashnykh sertyfikatsii (Nakaz No. 933) [On approval of programs for independent testing of professional knowledge and skills of certification participants]* [Ukrainian]. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2025/06/nakaz-MON_933.pdf
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (n.d.). *MON napoliahaie, shcho nove otsiniuvannia "vidpovidaie pidkhodam NUSH", ale pohodzhuietsia, shcho treba sprostyty protseduru - vidpovid na zapyt media "NUSH" [MON emphasizes that the new assessment "corresponds to the approaches of the New Ukrainian School," but agrees that the procedure should be simplified - response to media inquiry "NUS"]* [Ukrainian]. Nova ukrainska shkola | NUS Web Resource.

<https://nus.org.ua/2025/02/28/mon-napolyagaye-shho-nove-otsinyuvannya-vidpovidaye-pidhodam-nush-ale-pogodzhuetsya-shho-treba-sprostyty-protseduru-vidpovid-na-zapyt-media-nush>

- Ministry of Education and Science of Ukraine. (n.d.). *Otsiniuvannia v NUSH: putivnyk dlia bativ* [Assessment in the New Ukrainian School: Guide for parents] [Ukrainian]. https://drive.google.com/file/d/1fBr4qSwg1vjUBkustl_bZzxrhugiRjYv/view
- Onopriienko, O. V. (2021). *Nova ukrainska shkola: innovatsiina systema otsiniuvannia rezultativ navchannia uchniv pochatkovoї shkoly: navch.-metod. posib* [New Ukrainian School: Innovative system of assessment of learning outcomes of primary school students: Educational-methodical manual] [Ukrainian]. Kharkiv: Ranok. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/729723/1/Інновац%20система%20оцінювання.pdf>
- Skvortsova, S., & Haiovets, Y. (2025). *Orhanizatsiino-pedahohichni umovy pidhotovky maibutnikh vchyteliv do navchannia uchniv matematyky* [Organizational and pedagogical conditions for preparing future teachers to teach mathematics students] [Ukrainian]. *NewInception*, 1-2(19-20), 13-34. <https://doi.org/10.58407/NI.25.1-2.1>
- Starosta, V. I. (2019). *Hotovnist maibutnikh vchyteliv do pedahohichnoi diialnosti: sutnist, struktura* [Readiness of future teachers for pedagogical activity: Essence, structure] [Ukrainian]. *Narodna Osvita. Electronic Scientific Professional Journal*, 3(39). https://www.narodnaosvita.kiev.ua/?page_id=5923
- Tarasenkova, N. A. (2023). *Zasoby formuvalnoho otsiniuvannia u navchanni matematyky* [Formative assessment tools in mathematics education] [Ukrainian]. *Aktualni pytannia pryrodnycho-matematychnoi osvity* [Actual Issues of Natural and Mathematical Education], 2(22), 142-150. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10457858>
- Cherkaska, L. (2013). *Informatsiino-komunikatsiini tekhnolohii yak zasib zdiisnennia kontroliu i korektsii rezultativ navchannia uchniv* [Information and communication technologies as a means of monitoring and correcting students' learning outcomes] [Ukrainian]. *Imidzh suchasnoho pedahoha* [Image of the Modern Teacher], 2, 21-24.
- Chkana, Y. O., & Shyshenko, I. V. (2019). *Kontrol navchalnykh dosiahnen uchniv u klasakh z humanitarnym profilem navchannia* [Monitoring of learning outcomes of students in classes with a humanitarian profile] [Ukrainian]. *Fizyko-matematychna osvita* [Physico-Mathematical Education], 2(20), 154-159.
- Shkolnyi, O. V. (2015). *Teoretyko-metodychni zasady otsiniuvannia navchalnykh dosiahnen z matematyky* [Theoretical and methodological foundations of assessment of learning outcomes in mathematics] [Doctor of Science dissertation, State Registration No. 0515U000891] [Ukrainian]. https://uacademic.info/ua/document/0515U000891#google_vignette

Отримано / Received 12.10.2025

Прийнято до друку / Accepted 14.11.2025

Опубліковано / Published 22.12.2025

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

**ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:
ТЕОРІЯ, ДОСВІД, ІННОВАЦІЇ**

2025, № 4

SCIENTIFIC JOURNAL

**DIDACTICS OF MATHEMATICS:
THEORY, EXPERIENCE, INNOVATIONS**

2025, No 4