

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ТЕОРІЯ, ДОСВІД, ІННОВАЦІЇ

Науковий журнал



2026, № 5

*Журнал видається у партнерстві з громадською організацією
«Міжнародна асоціація дослідників з дидактики математики»*

Вінниця - 2026

УДК 37.016:51(051)

В 48

Д

У журналі вміщені наукові статті з актуальних проблем теорії та методики навчання математики у закладах загальної середньої, професійно-технічної та вищої освіти, а також актуальних проблем методичної підготовки майбутніх учителів математики. Для науковців, викладачів, вчителів, аспірантів, студентів. Статті журналу подано в авторській редакції.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол № 20 від 28.07.2026).

Журнал включено до переліку наукових фахових видань України категорії «Б» за спеціальностями А4 Середня освіта ([Наказ МОН України № 928 від 11.06.2026р.](#)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор

Ольга Матяш, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Заступник головного редактора

Олександр Школьний, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

Відповідальний секретар

Любов Михайленко, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Члени редакційної колегії

Michael Kleine, Doctor of Philosophy, Professor für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany

Natalia Pavlova, доктор наук, професор, заступник декана МФІ, Шуменський університет імені Єпископа Константина Преславського, Болгарія

Arie Purma Kusuma, Assistant Professor of Mathematics Education STKIP Kusuma Negara, Jakarta, Indonesia

Юлія Ботузова, доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання, Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна

Дарина Васильєва, кандидат педагогічних наук, завідувач відділу математичної та інформатичної освіти, Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України, м. Київ

Аліна Воевода, кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету математики, фізики і комп'ютерних наук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Іван Ленчук, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії, Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир, Україна

Тетяна Махомета, кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету фізики, математики та інформатики, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань, Україна

Василь Швець, кандидат педагогічних наук, професор, професор кафедри методики навчання математики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

Технічний редактор: **Діана Тютюнник**, асистент кафедри алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Журнал зареєстровано Національною радою з питань телебачення і радіомовлення (Рішення № 1733 від 23.05.2024 року, Протокол № 16, ідентифікатор медіа: R30-04833)

Засновник і видавець: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Рік заснування: 2024. **Періодичність видання** – двічі на рік

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ТЕОРІЯ, ДОСВІД, ІННОВАЦІЇ. Журнал. Вінниця: ТВОРИ, 2026. №5 – 159 с.

Адреса редакції: 21100, м. Вінниця, вул. Острозького, 32, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

E-mail: didmath@vspu.edu.ua; <https://vspu.net/didmath>

ISSN 3041-2277;

e-ISSN 3041-2285;

DOI: 10.31652/3041-2277;

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-1-159;

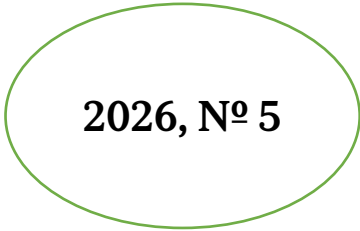
Ідентифікатор медіа: R30-04833

Обкладинка: картина «Малюючі руки» (1948) Моріца Корнеліса Ешера
© Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
VINNYTSIA MYKHAILO KOTSIUBYNSKYI STATE PEDAGOGICAL
UNIVERSITY

DIDACTICS OF MATHEMATICS: THEORY, EXPERIENCE, INNOVATIONS

Scientific Journal



2026, № 5

*Journal published in partnership with the public organization
"International Association of Researchers in Didactics of Mathematics"*

Vinnytsia – 2026

UDC 37.016:51(051)

B 48

The journal contains scientific articles on topical issues of the theory and methods of teaching mathematics in general secondary, vocational and higher education institutions, as well as topical issues of methodological training of future mathematics teachers. For scientists, teachers, teachers, graduate students, and students. The articles of the journal are presented in the author's edition.

Recommended for publication by the Academic Council of Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University (Minutes No. 20 of 28.07.2026).

The journal has been included in the list of Ukrainian scientific and professional publications in Category «B» under specialty A4: Secondary Education ([Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 928 dated June 11, 2026](#)).

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief

Olha Matiash, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Deputy Editor-in-Chief

Oleksandr Shkolnyi, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematics Teaching Methods, Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

Executive Secretary

Liubov Mykhailenko, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Members of the editorial board

Michael Kleine, Doctor of Philosophy, Professor für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany

Natalia Pavlova, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

Arie Purma Kusuma, Assistant Professor of Mathematics Education STKIP Kusuma Negara, Jakarta, Indonesia

Yuliia Botuzova, Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih, Ukraine

Daryna Vasylieva, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Mathematics and Informatics Education, Institute of Pedagogy, National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Alina Voevoda, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Physics and Computer Sciences, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Ivan Lenchuk, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Geometry, Ivan Franko Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine

Tetiana Makhometa, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Physics, Mathematics and Informatics, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, Ukraine

Vasyl Shvets, Candidate of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics Teaching Methods, Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

Technical editor: Diana Tiutiunnyk, Assistant of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

Registered by the National Council on Television and Radio Broadcasting (Decision No. 1733 of 23.05.2024, Minutes No. 16, Media ID: R30-04833)

Founder and publisher: Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University

Year of foundation: 2024.

The periodicity of the publication is twice a year.

DIDACTICS OF MATHEMATICS: THEORY, EXPERIENCE, INNOVATIONS. Scientific Journal. Vinnytsia: TVORY, 2026. No. 5 – 159 p.

Editorial address: 32, Ostrozkyi St., Vinnytsia, 21100, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

E-mail: didmath@vspu.edu.ua; <https://vspu.net/didmath>

ISSN 3041-2277

e-ISSN 3041-2285

DOI: 10.31652/3041-2277

DOI: 10.31652/3041-2277-2025-5-1-159

Media ID: R30-04833

Cover: the painting «Drawing Hands» (1948) by Maurits Cornelis Escher
© Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

Зміст

МЕТОДИЧНА НАУКА - ВЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ

Іван Ленчук, Олександр Мосіюк

Методичні аспекти навчання учнів 8(9)-х класів перетворенням фігур у планіметрії.... 7

Олександр Шкільний

Вивчення елементів стохастичності у 9 класі Нової української школи за авторським підручником інтегрованого курсу математики 24

Тетяна Годя

Мотиваційні задачі для вивчення теми «Функції» учнями ліцею 36

СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ У МЕТОДИЦІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Любов Михайленко, Іван Хутченко

Формувальне оцінювання як засіб особистісного розвитку школярів у процесі навчання математики 50

Роксолана Мілян

Робота з даними як засіб формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи: огляд американського досвіду 67

Діана Тютюнник

Математична освіта в Швейцарії: особливості навчання в школі та оцінювання досягнень учнів..... 79

Мирослава Кусій

Обґрунтування потенціалу математичної освіти для розвитку критичного та стратегічного мислення особистості 98

ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Юлія Бойко

Адаптивна технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики та її впровадження в шкільну практику..... 112

МЕТОДИЧНА ПІДГОТОВКА ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Ольга Матяш, Валентин Риндюк

Лабораторний практикум для підготовки майбутніх учителів математики до використання навчальних платформ.....124

Світлана Яценко

Методологічний потенціал історії математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики135

Аліна Воевода, Ігор Калашніков

Аналіз різних моделей підготовки учителів математики в закладах вищої освіти Ізраїлю146

Contents

METHODOLOGICAL SCIENCE TO A MATH TEACHER

Ivan Lenchuk, Oleksandr Mosiiuk

Methodological aspects of teaching 8(9) grade students transformation of figures in planimetry8

Oleksandr Shkolnyi

Studying elements of stochastics in 9th grade of new ukrainian school based on the author's textbook of the integrated course of mathematics 25

Tetiana Hoda

Motivational tasks for learning the topic «Functions» by lyceum students 37

MODERN TRENDS IN MATHEMATICS TEACHING METHODS

Liubov Mykhailenko, Ivan Khutchenko

Formative assessment as a means of students' personal development in the process of learning mathematics 51

Roksolana Milian

Data-Based Work and the Logical Component of Mathematical Competence: The American Experience..... 68

Diana Tiutiunnyk

Mathematics education in Switzerland: features of school instruction and assessment of student achievement 80

Myroslava Kusi

Justification of the Potential of Mathematics Education for the Development of Individuals' Critical and Strategic Thinking 99

DIGITAL TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS TEACHING

Yuliia Boiko

Adaptive technology for the review and systematization of the school mathematics course and its implementation into school practice 113

METHODOLOGICAL TRAINING OF MATH TEACHERS

Olha Matiash, Valentyn Ryndiuk

Laboratory Practicum for Preparing Future Mathematics Teachers to Use Learning Platforms125

Svitlana Yatsenko

Methodological potential of the history of mathematical concepts in the professional training of future mathematics teachers136

Alina Voevoda, Igor Kalashnikov

An analysis of various models for training mathematics teachers in Israeli higher education institutions147

УДК 373.5.016:514(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-7-23

Методичні аспекти навчання учнів 8(9)-х класів перетворенням фігур у планіметрії

Іван Ленчук¹, Олександр Мосіюк²

1. Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

E-mail: lench456@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

2. Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

E-mail: mosxandrwork@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3530-1359>

Анотація. Однією із найбільш важливих тем евклідової геометрії є тема «Перетворення фігур» на площині й у просторі. Вчителі математики та сучасні підручники для ЗЗСО з геометрії по різному представляють цей матеріал. Однак, щоб навчитися вміло користуватися перетвореннями, варто їх уявляти, розуміти в динаміці фактичних операцій по отриманню з однієї фігури іншої. У статті розглянуто паралельне перенесення фігур на вектор, поворот навколо точки на заданий кут, осьову симетрію, а також перетворення подібності, зокрема, гомотетію. Ми вважаємо, що паралельному перенесенню потрібно навчати після опрацювання векторів, адже перенесення на вектор чудово асоціюється з таким перетворенням фігур. Поворот навколо точки на заданий кут пропонуємо подавати в суто геометричному стилі, причому, центральну симетрію розглядати як частинний випадок повороту на кут 180° . Переконані, що учням слід продемонструвати різницю між уже згаданими перетвореннями та симетрією відносно прямої й обґрунтовано ввести поняття однакової (різної) орієнтації фігур після виконання цих перетворень. Що стосується перетворення подібності, то при його вивченні потрібно строго доводити всі без винятку властивості, а гомотетію подавати як частинний випадок подібності. Варто також, пославшись уже на відомі факти, довести теорему про можливий розклад перетворення подібності в добуток (композицію) гомотетії і руху, оскільки після її доведення буде цілком зрозуміло, що в якості властивостей подібності будуть лише ті з них, які є спільними для гомотетії і руху. Ми переконані також, що окрім цього не менш важливо у процесі знайомства учнів з описаними перетвореннями якісно демонструвати кожне з них із використанням сучасних цифрових технологій.

Ключові слова: навчання геометрії, гомотетія, осьова симетрія, паралельне перенесення, поворот, подібність, перетворення фігур.

UDC 373.5.016:514(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-7-23

Methodological aspects of teaching 8(9) grade students transformation of figures in planimetry

Ivan Lenchuk¹, Oleksandr Mosiuk²

1. Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine

E-mail: lench456@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

2. Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine

E-mail: mosxandrwork@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3530-1359>

Abstract. One of the most critical topics in Euclidean geometry is the theme of «Transformation of Figures». Mathematics teachers and modern general secondary education system textbooks present this material differently. However, to learn how to use transformation skillfully, it is necessary to visualize them and understand the dynamics of actual operations for obtaining one figure from another. The article discusses parallel translation of figures onto a vector, rotation around a point by a given angle, axial symmetry, and similarity transformations, especially homothety. We believe that the parallel translation should be taught after vectors have been studied, since translation to a vector is closely associated with such transformations of figures. We suggest presenting rotation around a point by a given angle in a purely geometric style, with central symmetry considered a special case of rotation by an angle of 180° . We believe that students should be shown the difference between the aforementioned transformations and symmetry with respect to a straight line, and that the concepts of identical (different) orientation of figures after these transformations should be introduced reasonably. When studying similarity transformations, it is necessary to rigorously prove all properties without exception and present homothety as a special case of similarity. It is also worth proving, based on already known facts, the theorem about the possible decomposition of similarity into a product (composition) of homothety and motion, since after its proof, it will be pretty clear that only those properties of similarity that are common to homothety and motion will be considered properties of similarity. We are also convinced that, in addition to this, it is equally important to introduce students to the described transformations to demonstrate each of them qualitatively using modern digital technologies.

Keywords: geometry teaching, homothety, axial symmetry, parallel translation, rotation, similarity, transformation of figures.

Постановка проблеми. Згідно із висловлюваннями Ф. Кляйна (нім. мат, 1849-1925), елементарна геометрія займається вивченням фігур та їхніх властивостей, що не змінюються при перетвореннях подібності, тобто таких фігур, котрі після виконання перетворень залишаються подібними. Отже, рухи і гомотетія, що є частинними випадками перетворення подібності, *мали б бути покладеними в основу розбудови геометрії, ними не можна нехтувати чи подавати будь-як учням.* Тим більше, що з допомогою перетворення подібності у прикладній геометрії розв'язують багато різних задач виробничого характеру (завдяки ІКТ): наприклад, у легкій промисловості технічне розмноження деталей швейних виробів використовують перетворення подібності (Ленчук та ін., 1977, с. 91-95; Ленчук та ін., с. 83-85).

У цілому ж, навчання геометрії переслідує кілька вельми важливих цілей: розвивати геометричну компетентність, власну логіку міркувань, уявлення і уяву, мислення площинними і просторовими образами; розуміння природного змісту будь-якої перетворювальної операції із даною фігурою; уміння якісно видозмінювати (пере/добудовувати) виконані рисунки; глибоко розуміти закономірності природи, мистецтва і архітектури; вміло розв'язувати різного характеру задачі образного, наочно-дійового та інтуїтивного різновиду; здобувати здібності до конструктивно-генетичної діяльності й т. ін., адже: «... геометрія – це не лише розділ математики, шкільний предмет, – це, передусім, *феномен загальнолюдської культури*» (Станжицький та ін., 2023, с. 5).

Аналіз джерел та останніх досліджень. Дивно, однак ми стверджуємо, що у класичному підручнику безсистемно викладено тему площинних рухів. Після вступу відразу розглянуто симетрію відносно точки, потім симетрію відносно прямої; потім – поворот, а на завершення подається паралельне перенесення і його властивості. Причому, останнє перетворення подається аналітично, шляхом введення прямокутної декартової системи координат. Жодних порівнянь окремо взятих рухів не спостерігається (Погорелов, 1998, с. 126-138).

Чомусь лише в наступному параграфі доладно описується тема «Вектори».

Подібність фігур дано ще в більш примітивному викладенні. Формулюється означення подібності. Гомотетію означено в односторонньому плані (для $k > 0$), векторним методом доведено теорему, що гомотетія є перетворенням подібності. Згадуються кілька властивостей подібності. Особлива увага приділяється ознакам подібності трикутників, зокрема, прямокутних. Описано деякі інші важливі факти стосовно кутів, уписаних в коло, та – пропорційність відрізків, хорд і січних кола (Погорелов, 1998, с. 156-167).

Більш коректно подано тему в іншому підручнику, в якому розпочинають виклад із паралельного перенесення, далі розглядають поворот і симетрію відносно точки, а потім симетрію відносно прямої. Проте для повноти викладу недостатньо властивостей кожного з перетворень (Бевз та ін., 2001, с. 99-127).

Згідно із новою (Модельною навчальною) програмою узагальнена теорема Фалеса, подібні трикутники, ознаки подібності трикутників, властивість медіани та бісектриси

трикутника, середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику вивчаються у 8-му класі, а переміщення (рух) та його властивості, симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення, рівність фігур, перетворення подібності – у 9-му (М. Бурда, Н. Тарасенкова, Д. Васильєва, МОН України, Модельна навчальна програма «Геометрія 7-9 класи» для ЗЗСО, наказ МОН України від 24.07.2023 № 883).

Підручників (у т. ч., електронних), написаних та офіційно виданих за новою програмою, є чимало. Їх можна знайти в мережі Internet, що варто вітати. Ми не будемо розглядати кожен з цих підручників, а зупинимося лише на двох із них – підручниках для 8-го і 9-го класів, авторами яких є М. Бурда, Н. Тарасенкова та (з інших підручників) А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір.

Отже, приступаємо до стислого аналізу підручників 8 класу.

Вводиться поняття й означення подібності двох трикутників та їхнього коефіцієнта подібності. Формулюють теорему Фалеса і доводять, що пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і паралельна третій стороні, відтинає від нього подібний трикутник. Доводять три ознаки подібності трикутників і дають застосування подібності трикутників до виведення властивостей медіан і бісектрис, а також середніх пропорційних у прямокутному трикутнику. Цікавою є рубрика «Дізнайтеся більше», в якій обґрунтовують деякі терміни, наводять історичні факти, доводять непрості теореми, розв'язують суть важливі задачі, подають серйозні геометричні факти (Бурда, Тарасенкова, 2021, §§10-14).

Теорему Фалеса доводять лише для частинного випадку, оскільки повне доведення виходить за межі шкільної програми. Далі розглядають властивості медіан і бісектрис трикутника, означають подібні трикутники та коефіцієнт подібності. Лемою доводять, що пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і паралельна третій стороні, відтинає від нього подібний трикутник. Доводять усі три ознаки подібності трикутників. Підручник уміщує важливі історичні факти, багато цікавих задач і якісні рисунки (Мерзляк та ін., 2025, §2).

Стислий аналіз підручників 9 класу.

Пояснюють, що таке перетворення і переміщення. Теоремою доводять, що при переміщенні точки, які лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення. Роблять висновок, що переміщення прямі переводить у прямі, промені – у промені, а відрізки – в рівні їм відрізки. Задачею доводять, що переміщення зберігає міру кута. В рубриці «Дізнайтеся більше» чітко розрізняють «відображення фігур» та «переміщення», що важливо. Традиційно розглядають спочатку симетрію відносно точки, а потім симетрію відносно прямої. Доводять, що обидві симетрії є переміщеннями, а тому мають усі властивості переміщення. Чимало якісно виконаних рисунків, які демонструють кожну із симетрій. Доладно вводиться означення повороту навколо точки, пояснюється як можна відтворити образ нарисованої фігури після повороту, пояснюють чому при повороті на кут 180° відносно точки O поворот стає центральною

симетрією. Як наслідок доводять, що поворот є переміщенням, а тому має всі його властивості. Паралельне перенесення подається чітко і грамотно на векторній основі. Доводять, що паралельне перенесення має всі властивості переміщення, а пряма переходить у паралельну їй пряму. У вже відомій рубриці доведено, що композиція двох осьових симетрій із паралельними осями, є паралельним перенесенням. Усі площинні переміщення (рухи) фігур супроводжуються відмінним набором задач і якісно виконаними рисунками. Не зрозуміло, чому не доведено, що центральна симетрія переводить усяку пряму в паралельну їй пряму.

Перетворення подібності розпочато зі зміни плану (і масштабу) зображення ділянки місцевості в 2,5 рази, чим наочно пояснюють, що таке подібність. Далі дають означення перетворення з коефіцієнтом подібності $k > 0$. Показують, що рух із коефіцієнтом $k = 1$ є окремим випадком перетворення подібності. Доводять властивість перетворення подібності: 1) точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій; 2) зберігається порядок взаємного розміщення точок на прямій. Як наслідок – прямі переводить у прямі, промені – у промені, а відрізки – у відрізки. Чомусь без доведення приймають, що дане перетворення переводить кут у рівний йому кут. Дають означення подібності фігур. Виходячи із властивостей, роблять висновок, що таке перетворення відрізки переводить у їм пропорційні відрізки. Доводять теорему, що відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Звідси висновок, що площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних елементів. Особливий випадок перетворення – гомотетію, із незрозумілих причин, винесено у рубрику «Дізнайтеся більше». Якісні рисунки і доладний підбір задач (Бурда, Тарасенкова, 2017, с. 142-173).

Першими двома прикладами, з допомогою центрального і паралельного проєкціювання, демонструють відображення однієї фігури на іншу. Третім прикладом вводять на векторній основі поняття паралельного перенесення. На прикладах означають перетворення однієї фігури (образу) в іншу (прообраз). Перетворення називають рухом (переміщенням), якщо зберігаються відстані між будь-якими двома його точками. Констатують (не доводячи), що в русі образом прямої є пряма, відрізка – відрізок, рівний даному, кута – кут, рівний даному і, отже, у випадку трикутника, – трикутник, що дорівнює даному. Дають означення двох рівних фігур. Доводять теорему, що паралельне перенесення є рухом. Подають задачу, в якій паралельне перенесення обґрунтовують у прямокутній системі координат, а також задачу, де будують кут, рівний даному куту. Дають означення осьової симетрії, наводять приклад із деякою фігурою. Доводять, користуючись координатним методом, що осьова симетрія є рухом. Означають поняття осьової симетрії для будь-якої фігури, наводять приклади фігур, що мають вісь симетрії. Розв'язують корисні задачі. Спочатку подають центральну симетрію, а потім поворот. Причому, знову ж таки, координатним методом доводять, що центральна симетрія є рухом, а для повороту – пропонують довести аналогічне твердження самостійно.

Елементарними рисунками вводять поняття гомотетії з центром у тоці O , демонструючи, що коефіцієнт k цього перетворення може бути додатнім числом, від'ємним, цілим і дробовим, підкреслюючи, що $k \neq 1$. Розглядають приклади. Векторним методом доводять теорему: При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B – довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 – їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k , то $A_1B_1 = |k| AB$. Наслідок формулюють для трикутника. Подають без доведення інші властивості: в гомотетії образом прямої є пряма; образом відрізка – відрізок; образом кута – кут, який рівний даному; образом трикутника є трикутник, подібний даному; образом кола є коло; площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k – коефіцієнт гомотетії. Пропонують це доведення на математичному гуртку. Прикладами означають подібність двох фігур, причому, подають це у вигляді композиції гомотетії та руху, що надто важливо. Наводять означення: Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень – гомотетії і руху. Зауважують, що при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів, що називають коефіцієнтом подібності. Окремо для трикутників доводять теорему: Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Далі, в теорії, розв'язують кілька цікавих задач, подають практичні завдання та вправи. Окремо додають цікаву рубрику «Застосування перетворень фігур при розв'язуванні задач» (Мерзляк, Полонський, Якір, 2021, с. 172-228).

Якщо аналізувати напрацювання українських науковців у сфері використання сучасних цифрових технологій до навчання учнів геометрії, то в останні роки увага педагогів-практиків більшою мірою зосереджена на застосуванні такого загальнодоступного програмного рішення як GeoGebra. Це й не дивно, адже як його локальне рішення (можна встановити на комп'ютер чи планшет), так і онлайн версія дозволяє якісно демонструвати конструктивну спрямованість геометричної науки. До прикладу, Зіновєєв І. В. та Манько Н. І.- В. наводять у власній роботі, розкриваючи підхід до навчання геометрії на основі системного використання 2D та 3D візуалізацій (Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., 2025). Також відповідний програмний інструмент активно залучається й у процесі підготовки майбутніх учителів математики (Дубовик В., Рудницький С., 2022; Титаренко Н., Муртазієв, Е., 2019). Звичайно це не повний перелік робіт з тематики застосування цифрових технологій у навчанні математики, але вони вказують на практичну значимість такого програмного продукту для математичної освіти в Україні.

Тим не менше варто розглянути й інший програмний продукт – вебсервіс Desmos. Так, Ду А. С. розглядає особливості використання сервісу на уроках математики, його переваги для демонстрації змін параметрів функцій у реальному часі та формування дослідницьких умінь учнів (Ду А. С., 2024). Систематичний огляд досліджень щодо застосування Desmos у математичній освіті запропонували (Mediana N. L., Dio R. V., 2025). Автори узагальнюють

результати десятків емпіричних робіт і показують, що використання Desmos позитивно впливає як на академічну успішність, математичне мислення, залученість учнів до освітнього процесу, так і на здатність до візуалізації абстрактних понять. Також важливо, що науковці розглядають приклади використання сервісу для навчання шкільної геометрії, й навіть окремих тем з аналітичної геометрії.

Підсумовуючи (коротко), варто зазначити, що було б надто важливо, щоб учні 8 і 9 класів насправді опановували курс геометрії не за одним, а за кількома підручниками, а конструктивні елементи демонструвалися б із виваженням застосування сучасних цифрових технологій.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Поки що в підручниках геометрії для ЗЗСО не вирішено питання чіткого, однозначного, зрозумілого учням представлення матеріалу «Перетворення геометричних фігур на площині».

Мета статті. Тому ми вважаємо, що фактичний матеріал підручника за темою «Перетворення фігур на площині» потрібно розповідати учням дещо по іншому. Не варто розпочинати викладення з фактичного матеріалу, а образно, щоб усвідомити тему в цілому, потрібно глибоко, всебічно зрозуміти природу кожного окремо взятого перетворення. Якраз у цьому й полягає мета нашої праці: *з'ясувати природу перетворень* та уточнити окремі аспекти їх подання.

Виклад основного матеріалу. У підручнику читаємо: «Якщо кожную точку даної фігури змістити яким-небудь чином, то дістанемо нову фігуру. Говорять, що ця фігура утворилась *перетворенням* даної» (Погорелов, 1998, с. 126). Відразу виникає запитання, то що ж ми переміщуємо, точки чи фігуру, коли говоримо про перетворення фігур? Є чимало й інших схожих запитань до текстів у даному підручнику: однак ніхто не буде сперечатися, що в навчанні геометрії *понад усе важливо розвинути в учня уявлення, розуміння природного змісту, динаміки будь-якої перетворювальної операції* з даною фігурою, адже саме геометрія призначена розвивати уявлення і уяву – як жоден з інших предметів.

Коли ведемо мову про паралельне перенесення або поворот навколо точки на даний кут, потрібно пам'ятати, що тут усі точки одночасно зсовуються в одному напрямі на зарання заданий вектор чи повертаються на кут – кутовий вектор відповідно, тобто переміщується вся фігура, що надто важливо для уявлення цих перетворень. До речі, центральну симетрію, що природно, варто завжди подавати частинним випадком повороту на кут 180° із доведенням лише однієї (єдиної) властивості про паралельність прямих (променів і відрізків).

Якщо ж ми говоримо про осьову симетрію, то не замислюємося глибоко над природою цього переміщення, означуючи лише конструкцію побудови окремих точок у даному перетворенні. Цитуємо: «Нехай q – фіксована пряма. Візьмемо довільну точку X і опустимо перпендикуляр AX на пряму q . На продовженні перпендикуляра за точку A відкладемо відрізок AX' , що дорівнює відрізку AX . Точка X' називається *симетричною точкою X відносно*

прямої q . Якщо точка X лежить на прямій q , то симетрична їй точка є сама точка X . Очевидно, що точка, симетрична точці X' , є точка X . Наступний абзац: «Перетворення фігури F у фігуру F' , при якому кожна її точка X переходить у точку X' , симетричну відносно даної прямої q , називається *перетворенням симетрії відносно прямої q* . При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно прямої q* (рис. 1)» (Погорелов, 1998, с. 130).

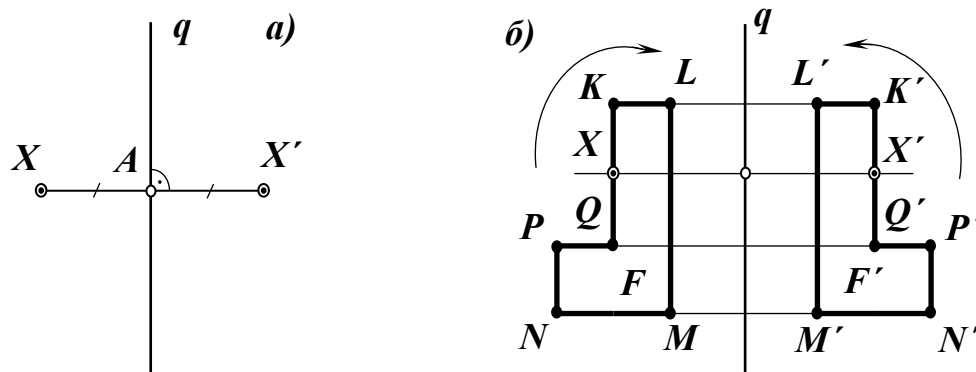


Рис. 1

Усе неначе добре, але схожу конструктивну операцію не можна називати переміщенням фігури F на площині, адже це не що інше, як переміщення окремих точок (зокрема, кардинальних точок фігури F) за чітко фіксованим правилом. Очевидно, що паралельне перенесення і поворот, з одного боку, а осьова симетрія, з іншого боку, мають несхожу природу. Якщо конкретно, то останнє перетворення фігури F у фігуру F' потрібно уявляти не площинним, а рухом у просторі (рис. 2). Уявіть собі, що вісь перетворення і фігура F лежить у площині дошки, а кожна її точка, виходячи із площини дошки і обертаючись по колу в площині, перпендикулярній осі, описує кут 180° і знову попадає на дошку. Отже, осьова симетрія є насправді *поворотом у просторі* на фіксований кут.

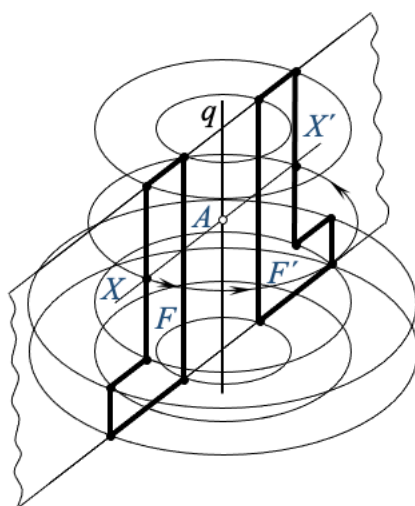


Рис. 2.

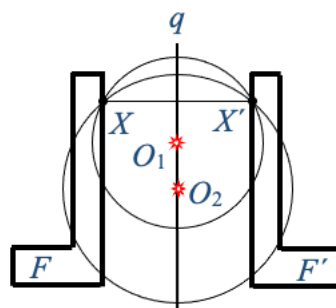


Рис. 3

Завдячуючи природі, розглядуване перетворення змінює орієнтацію фігур на площині, що суттєво для розуміння перетворень у цілому (рис. 1, б).

Цікаво, що конструктивно осьову симетрію можна також обґрунтовувати по іншому. Тобто точку X' можна назвати симетричною точці X , коли всяке коло з центром на осі q , яке вміщує точку X , проходить також і через точку X' . Це ще один варіант побудови симетричних точок у осьовій симетрії (рис. 3).

У підручнику для 9 класу М. Бурди і Н. Тарасенкової, як ми вже відмічали, показано, що композиція двох осьових симетрій відносно паралельних осей є паралельне перенесення. Паралельне перенесення здійснюється на відстань у 2 рази більшу ($2m$) за відстань між осями (m). Більш цікаво інше, що коли осі не паралельні, а перетинаються, в результаті двох послідовних симетрій відносно цих осей отримують (аналогічно) поворот навколо точки перетину осей на кут, що у 2 рази більший (2α) за кут (α) між осями, які задані (рис. 4, 5). Це просто доводиться на рисунках та дозволяє певною мірою реалізувати ідею комп'ютерної уніфікації рухів між настільки різними, на перший погляд, перетвореннями.

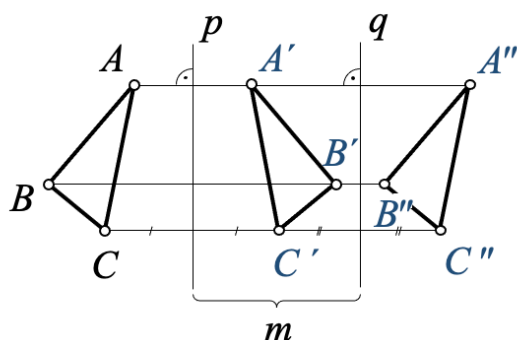


Рис. 4

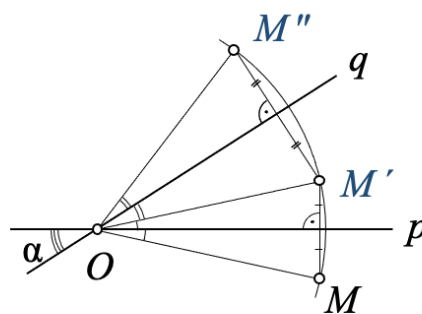


Рис. 5

Отже, робимо висновок, що перетворення паралельного перенесення та повороту навколо точки на даний кут можна побудовно (у графічній реалізації) подавати добутком двох осьових симетрій. Це ще більше споріднює паралельне перенесення та поворот навколо точки на даний кут із осьовою симетрією. Й цим пізнається природа обох перетворень. Іншими словами, можна трактувати паралельне перенесення як подвійне паралельне перенесення або ж – подвійний поворот у площині.

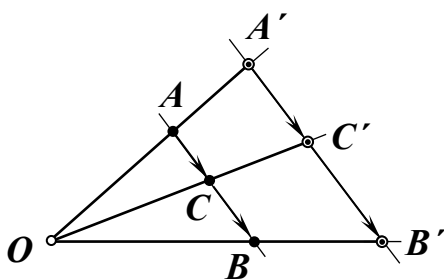


Рис. 6

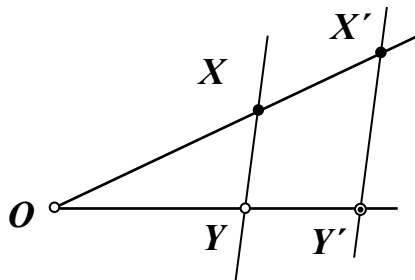


Рис. 7

Вивчаючи тему «Подібність геометричних фігур» потрібно в першу чергу продемонструвати, що рухи і гомотетія є частинними випадками подібності. Починати варто із означення подібності, дати також чітке, однозначне означення гомотетії, довести (векторним методом) властивості, зокрема те, що: гомотетія є перетворенням подібності та зберігає відношення відрізків на прямій (рис. 6). Із цих властивостей прямо слідує, що гомотетія переводить усяку пряму, котра не проходить через її центр, у пряму, паралельну заданій, а пряму, яка містить центр гомотетії, в цю саму пряму. Крім того, гомотетія переводить промінь у промінь, відрізок – у відрізок, а три точки, які не лежать на одній прямій, – у три точки, які теж не лежать на одній прямій.

Окрім того, з теорем також впливає геометричний (рисунковий) спосіб задавання гомотетії центром і парою відповідних точок цього перетворення (рис. 7). Нарешті, скориставшись уже доведеною вище властивістю, що гомотетія всяку пряму, якій не належить центр цього перетворення, переводить у пряму, паралельну заданій, та пригадавши властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, легко доводимо рисунком, що гомотетія зберігає градусну міру кута між прямими (рис. 8).

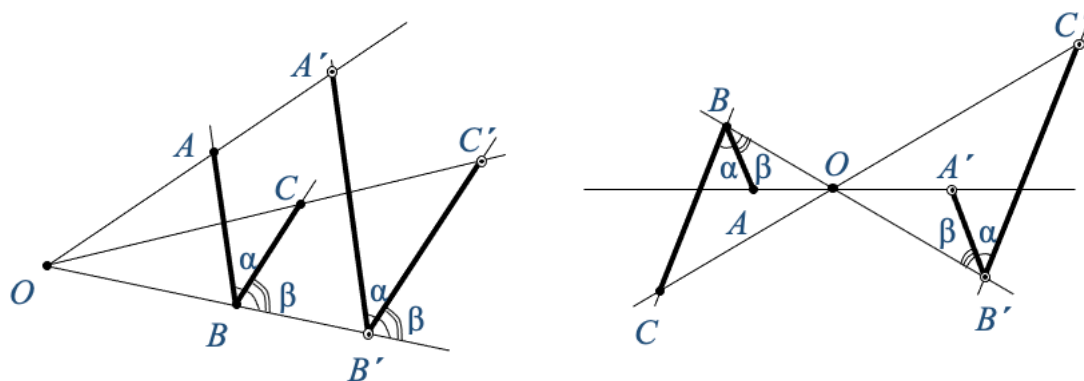


Рис. 8

Якщо деяка гомотетія з центром у точці O і коефіцієнтом гомотетії k переводить точку A в точку A' ($\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OA'}$), то очевидно, що гомотетія з цим самим центром O і коефіцієнтом гомотетії $\frac{1}{k}$ уже точку A' переведе в точку A . Тобто, h_0^k і $h_0^{1/k}$ – *суть два взаємно обернені перетворення*: $h_0^k(A) = A'$, $h_0^{1/k}(A') = A$. Їх же послідовне виконання переводить точку A саму в себе: $(h_0^{1/k} \cdot h_0^k)(A) = A$. Таке *тотожне* перетворення часто позначають ще й по іншому, а саме: $h_0^{1/k} \cdot h_0^k = 1$. Про це теж варто вести мову з учнями.

Наведені висновки дозволяють елементарними міркуваннями довести ще одну надто важливу *теорему*, котра має неабияке практичне застосування:

Нехай p – перетворення подібності з коефіцієнтом k , а h – гомотетія з цим самим коефіцієнтом k та з центром у будь-якій точці O . Тоді існує один і лише один рух r такий, що $p = r \cdot h$ (*)

Говорять так: усяке перетворення подібності можна розкласти в добуток гомотетії на рух. Або по іншому: перетворення подібності є композицією двох перетворень: гомотетії та руху.

Доведення. Введемо в розгляд таке перетворення: $r = p \cdot h_0^{1/k}$ (**). Воно, очевидно, є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k \cdot \frac{1}{k} = 1$. Але ж, винятково рух кваліфікується як перетворення подібності з коефіцієнтом рівним 1.

Отже, в рівності (**) r – рух. Із цієї ж рівності, що теж очевидно, одержуємо наступне: $r \cdot h_0^k = (p \cdot h_0^{1/k}) \cdot h_0^k$, або $r \cdot h_0^k = p \cdot (h_0^{1/k} \cdot h_0^k) = p$. Таким чином, існування руху r , який задовольняє умову (*), доведено.

Нехай тепер r_1 – довільний рух, що задовольняє рівність $p = r_1 \cdot h_0^k$. Звідси, діючи аналогічно, отримаємо $p \cdot h_0^{1/k} = r_1$. Урахувавши рівність (**), приходимо до висновку, що $r_1 = r$. Єдиність руху і теорему в цілому доведено.

Якраз ця теорема з невідгадливою і суровою логікою міркувань дозволяє зробити висновок, що перетворення подібності володіє властивостями, які є спільними для перетворень гомотетії і руху. Отже, істинно мають місце твердження: перетворення подібності переводить пряму у пряму, зберігає відношення відрізків на прямій, промінь переводить у промінь, відрізок – у відрізок, а три точки, які не лежать на одній прямій, – у три точки, що не лежать на одній прямій. При цьому перетворення подібності кут переводить у рівний йому кут (перпендикулярні прямі – в перпендикулярні прямі).

Якщо подібність представлена добутком гомотетії на рух ($p = r \cdot h$), а рух є паралельним перенесенням чи поворотом, то така подібність не змінює орієнтацію фігур на площині (з рисунка 9, а вочевидь випливає, що будь-яка гомотетія – додатна чи від’ємна – зберігає орієнтацію). Якщо ж у композиції перетворень рухом є симетрія відносно прямої, то цей різновид подібності змінює орієнтацію плоских фігур на протилежну: пара подібних трикутників ABC і $AB'C'$ на рисунку 9, а однаково орієнтовані, а на рисунку 9, б – протилежно. Це обґрунтовує роль у подібності (композиції перетворень) осової симетрії.

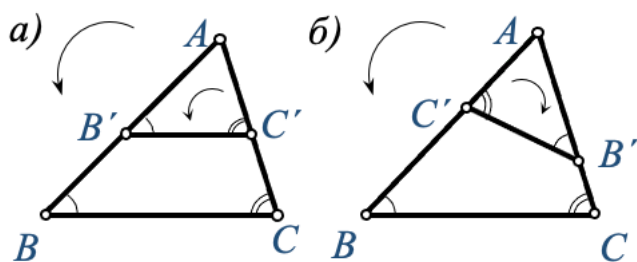


Рис. 9

Ще одним важливим аспектом, який однозначно буде сприяти засвоєнню фактів, пов'язаних з геометричними перетвореннями, є застосування на уроках математики інструментів динамічної геометрії. Безперечно, робота учнів та вчителя на дошці є важливим

елементом освітнього процесу, замінити який навіть в умовах цифровізації навчання досить складно, але існує ряд операцій, котрі відобразити без використання комп'ютерних технологій практично надто важко.

Сьогодні учням варто знати, що існує два програмні продукти, які доцільно і, головне зручно, як ми вже зазначали, використовувати в навчанні математики – GeoGebra та Desmos. Ключовою їх перевагою є наявність загальнодоступних вебверсій, що спрощує розгортання математичних комплексів на шкільних комп'ютерах або ж інтерактивних дошках шляхом встановлення (оновлення) до актуальних версій звичайного вебпереглядача. З позицій зручності та простоти освоєння для школярів 8 (9) класів, на наш, можливо суб'єктивний погляд, варто використовувати Desmos (див. «Офіційну сторінку Desmos»).

Ця центральна сторінка Desmos пропонує ряд спеціалізованих сервісів для побудови графіків функцій, числових розрахунків, операцій з матрицями, планіметричними та просторовими геометричними побудовами. Нам важливо у статті продемонструвати можливості конструктивних побудов на площині.

Робоче поле для виконання геометричних побудов онлайн реалізовано за допомогою досить невеликого набору інструментів, які, тим не менше, цілком дозволяють виконувати більшість геометричних побудов у планіметрії. Є можливість будувати точку (зокрема, відмічати точку на об'єкті лише підвести курсор миші до неї та здійснивши звичний «клік» лівою кнопкою), відкладати відрізки, задавати прямі (через дві точки проводити пряму, через дану точку – паралельно чи перпендикулярно до прямої), користуватися променями й векторами, будувати бісектрису кута; окреслювати кола та його дугу за трьома точками; позначати кути й будувати багатокутники тощо. Присутні також засоби для реалізації геометричних перетворень таких як: паралельне перенесення, поворот на заданий кут відносно вказаної точки, симетрію відносно прямої, гомотетію, а також перетворення подібності. Варто відмітити, що симетрія відносно даної точки в окремий інструмент не виділена, оскільки таке перетворення, як уже було показано вище, є частинним випадком повороту відносно точки на кут 180° . У лівій частині робочого простору екрану виділено поле, де користувач може вводити певні змінні величини, які потім використовувати, ілюструючи перетворення в динаміці – для зміни параметрів на рисунку.

Розглянемо, для прикладу, як можна продемонструвати факт, що поворот навколо точки є композицією з двох симетрій відносно прямих, які перетинаються.

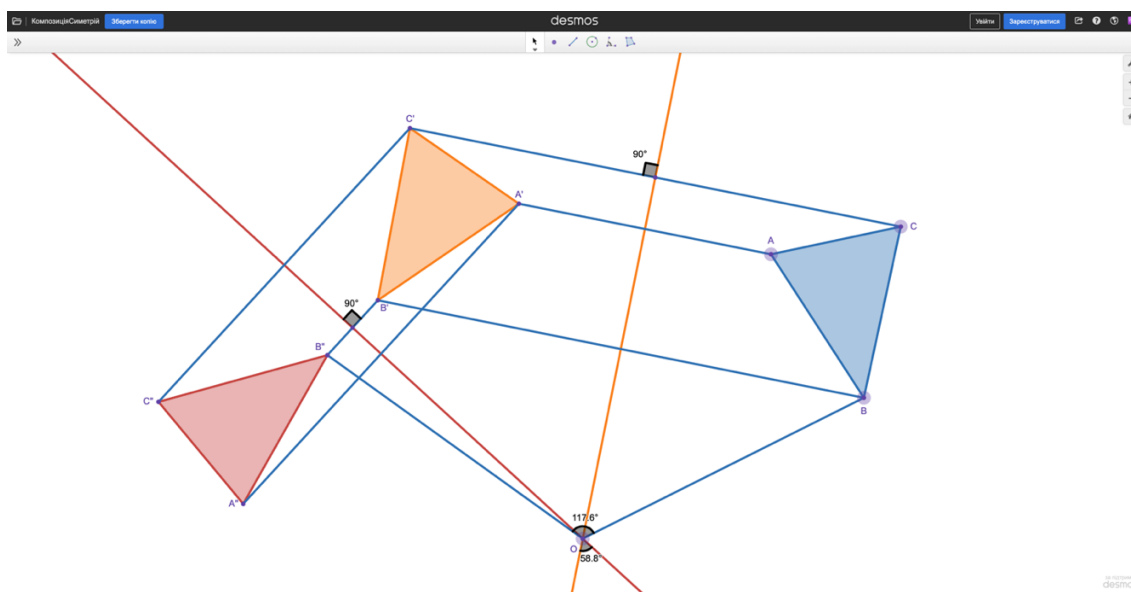


Рис. 10

Нехай на площині задано довільний трикутник ABC (на рисунку зображений синім кольором). Відобразимо його спочатку відносно помаранчевої прямої (матимемо помаранчевий трикутник $A'B'C'$), а потім результат відобразимо відносно червоної прямої (рис. 10). Як наслідок отримаємо трикутник $A''B''C''$ – на рисунку позначено червоним кольором. Червона та помаранчева прямі перетинаються в точці O . Якщо виміряти кут між осями симетрій і кут BOB'' , то побачимо цікаву закономірність: кут між осями симетрій буде у два рази меншим за кут BOB'' . Схожим чином доречно виміряти й кути AOA'' та $CO C''$. Однозначно їх значення будуть такими як у кута BOB'' , отже, можемо запропонувати учням зробити висновок, що трикутник $A''B''C''$ також можна утворити поворотом ABC на кут, що у двічі більший за кут між осями симетрії.

Покажемо цю операцію у динаміці. Для цього введемо у спеціальному полі, ліворуч від основної робочої області змінну A , яка набиратиме значень від 0 до 180° з кроком $0,01$. Виконаємо операцію повороту трикутника ABC на колі точки O на кут, що визначається введеною змінною (за замовчуванням змінній було надано значення 13°). Результуючий образ (зелений трикутник без позначених вершин) є результатом повороту вихідного трикутника на 13° проти годинникової стрілки – вважатимемо його «динамічною тінню» фігури ABC (рис. 11).

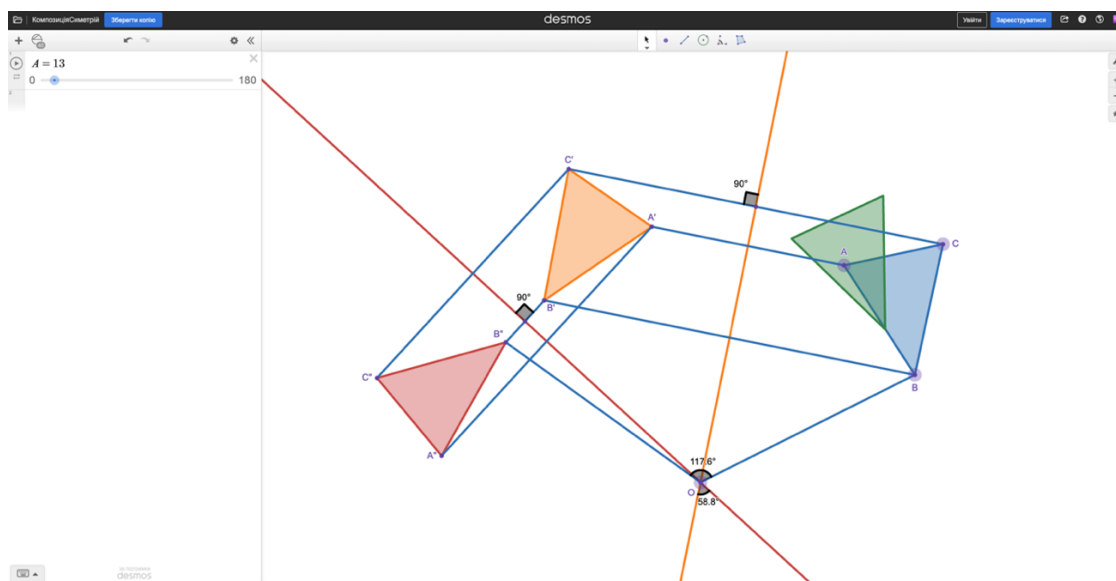


Рис. 11

Тепер змінюватимемо значення введеної змінної на проміжку від 0 до 180° . Зі збільшенням її значення новоутворений зелений трикутник здійснюватиме обертання навколо точки O і при значенні $117,6^\circ$ зелений трикутник буде повністю збігатися з червоним трикутником $A''B''C''$, що буде ще одним наочним підтвердженням розглядуваного геометричного факту, який необхідно з учнями на дошці строго довести (рис. 12).

Отже, шляхом інтерактивних експериментів було розглянуто та наочно продемонстровано важливе геометричне твердження, яке при класичному введенні не є очевидним для багатьох учнів. Аналогічним чином варто подавати та розглядати й інші перетворення на площині, демонструючи школярам, що геометрія є захоплюючою і динамічною наукою, в якій кожен може віднайти багато важливих й корисних для себе цікавинок.

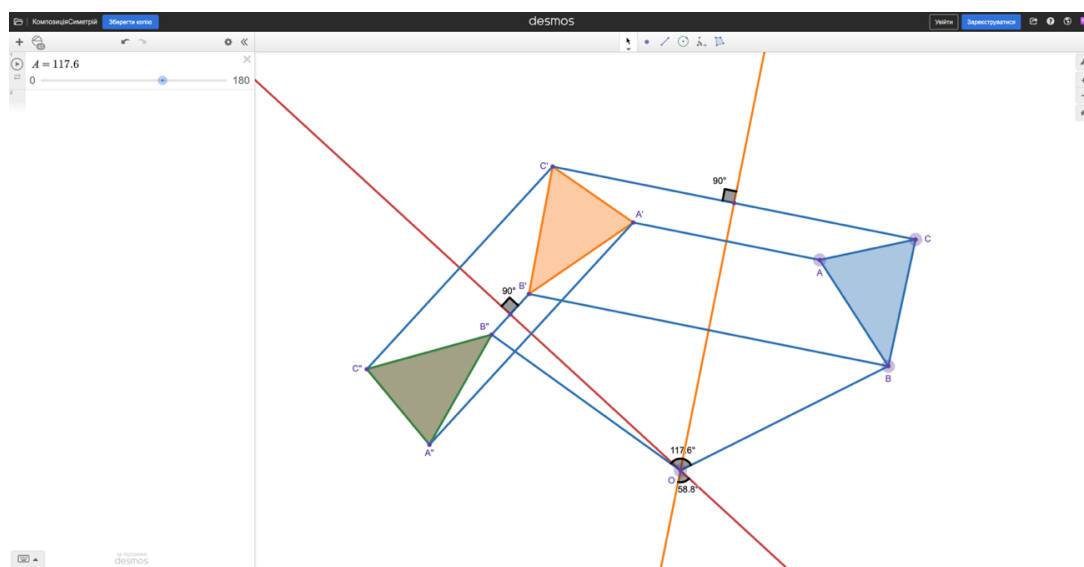


Рис. 12

Особливо ефективним такі геометричні експерименти виглядають на екрані проєктора або ж інтерактивної дошки. При цьому варто віддати перевагу саме інтерактивній дошці, оскільки в цьому випадку школярі самі матимуть змогу брати участь у виведенні геометричних фактів.

Висновки. Деталізовані за змістом методичні корективи в навчанні тем «Рух» і «Подібність фігур» мають на увазі їх неабияку собівартість у курсі геометрії, на чому ми вже робили наголос. Не секрет, що майбутні вчителі, а отже й учні, не завжди чітко розуміють призначення і суть цих перетворень, «плавають» у теоретичному обґрунтуванні властивостей, слабо володіють практичними навичками використання останніх у пошуку розв'язань не лише задач на побудову (що в конструктивній геометрії надважливо), але й задач на доведення та обчислення. Неспроста знані вітчизняні методисти ще в 90-х роках минулого століття «били на сполох», говорячи (приблизно) так: Незважаючи на те, що геометричні перетворення вводяться у 8 і 9 класах, у планіметрії вони не виступають як апарат доведення теорем і розв'язування задач. Шкода, але така думка визнаних українських педагогів поки що в основній школі проігнорована, мовчазно знехтувана.

Ідея перетворень є однією із провідних у сучасних наукових дослідженнях учених не лише у сфері геометрії. З їх допомогою успішно доводять складні твердження в різних розділах, які виходять далеко за межі геометрії ЗЗСО. Перетворення, до того ж, мають прикладний характер. Дякуючи геометричним перетворенням і сучасним комп'ютерним технологіям кінематографісти бентежать уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані. Перетворення покладено в основу правильної побудувати художниками композиції картин, а хімікам, приміром, допомагають досліджувати структуру кристалів.

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Ще в Епоху Відродження з'явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, зокрема роботи видатних художників Леонардо да Вінчі (1452-1519) і Альбрехта Дюрера (1471-1528). Розробником математичних основ теорії проєктивних перетворень (теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг (1593-1662).

Завдяки теорії перспективи вдалося досягнути достатньої наочності зображень, однак технічний прогрес вимагав точного відтворення об'єктів із дотриманням розмірів. Багато талановитих учених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначної відповідності (ізоморфізму) між оригіналами просторових фігур та їх бінарними зображеннями на площині. Серед них був, зокрема, французький математик Мішель Шаль (1793-1880), який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (теорема Шаля: «Будь-який рух площини, що зберігає орієнтацію, тобто не перевертає фігуру, є або поворотом (включаючи

тотожне перетворення та центральну симетрію), або паралельним перенесенням. Будь-який рух, що змінює орієнтацію, є осовою симетрією або ковзною симетрією» (див. Вікіпедію)).

У наукових пошуках свій власний метод у галузі зображень і геометричних перетворень запропонував французький геометр Гаспар Монж (1746-1818), створивши новий розділ геометрії – нарисну геометрію, що набула статусу *граматики креслення*, яке у свою чергу визнано «мовою техніки».

Пізніше, на основі розподілу геометричних перетворень на групи, було виділено ще декілька розділів геометрії – афінна, проєктивна та інші. Здобутки науковців у розробці й вивченні перетворень склали фундаментальну основу розвитку багатьох галузей сучасної *прикладної геометрії*.

Коли ми маємо на увазі студентів фізико-математичного факультету, то на допомогу їм у майбутньому, все ж таки, вельми потрібно написати змістовний посібник, у якому в усіх деталях викладалася б тема «Перетворення фігур на площині та у просторі».

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. (2001). *Геометрія*: підруч. для 7-9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. «Вежа».
- Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. (2016). *Геометрія*: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. УОВЦ «Оріон».
- Бурда М., Тарасенкова Н., Васильєва Д., МОН України, *Модельна навчальна програма «Геометрія 7-9 класи» для ЗЗСО*, наказ МОН України від 24.07.2023, № 883.
- Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. (2017). *Геометрія*: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. УОВЦ «Оріон».
- Дубовик В., Рудницький С. (2022). Візуалізація навчального матеріалу в процесі підготовки майбутніх учителів математики засобами середовища geogebra. *Фізико-математична освіта*. 34 (2), С. 33-37. DOI: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-005>.
- Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В. (2025). Створення засобами GeoGebra інтерактивних візуалізацій до геометричних задач у ході підготовки до НМТ. *Педагогічна Академія: наукові записки*. 21. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16807346>.
- Ленчук І. Г., Павленко Ю. С., Павлов А. В. (1977). Про один із алгоритмів технічного розмноження деталей швейних виробів. *Відомості вузів, сер. «Технологія легкої промисловості»*. Київ, №3. 91-95.
- Ленчук І. Г., Павлов А. В., Павленко Ю. С. (1979). Про подібність кривих 2-го порядку в інженерному варіанті задавання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ, «Будівельник», вип. 28. 83-85.
- Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2021). *Геометрія*: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія.
- Мерзляк А.Г., Якір М.С. (2025). *Геометрія*: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія. Офіційна сторінка вебсервісу Desmos. URL: <https://www.desmos.com/?lang=uk>.
- Погорелов О. В. (1998). *Геометрія (Планіметрія)*: підруч. для 7-9 кл. сер. школи, Київ: Освіта.
- Станжицький О. М., Собчук В. В., Капустян О. В., Федоренко Ю. В., Цань В. Б. (2023). *Метод. вказ. та завд. для самост. роботи з дисципл. «Методика навчання математики»*, ч. IV: «Методика вивчення геометрії» для студ. спеціальн. 014.04 Середня освіта (Математика) механікоматематичного факультету.

- Титаренко Н., Муртазієв Е. (2019). Застосування Geogebra на уроках геометрії. *Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору*, 84(II), С. 279-292. DOI: <https://doi.org/10.38014/osvita.2019.84.25>.
- Dy A. C. (2024). Implementation of DESMOS as a Teaching Tool in Graphing Functions in the New Normal. *Journal of Research and Investigation in Education*. 2(2), P. 59-64. DOI: <https://doi.org/10.37034/residu.v2i2.175>.
- Mediana N. L., Dio R. V. (2025). Systematic Review on the Efficacy of Desmos Integration in Mathematics Education: Unveiling Impacts on Learning Outcomes and Pedagogical Strategies. *International Journal of Future Engineering Innovations*. 2(4). P. 104-115. DOI: <https://doi.org/10.54660/IJFEI.2025.2.4.104-115>.

References

- Bevz, H. P., Bevz, V. H., & Vladimirova, N. H. (2001). *Heometriia: pidruchnyk dlia 7-9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grades 7-9 of secondary schools]. Kyiv: Vezha.
- Burda, M., Tarasenkova, N., & Vasyliieva, D. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Heometriia. 7-9 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Model curriculum "Geometry. Grades 7-9" for general secondary education institutions]. Ministry of Education and Science of Ukraine. Order No. 883 dated July 24, 2023.
- Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2016). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 8 of secondary schools]. Kyiv: Orion.
- Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2017). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 9 of secondary schools]. Kyiv: Orion.
- Dubovyk, V., & Rudnytskyi, S. (2022). Vizualizatsiia navchalnoho materialu v protsesi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky zasobamy seredovyshcha GeoGebra [Visualization of educational material in the training of future mathematics teachers using the GeoGebra environment]. *Fyzyko-matematychna osvita*, 34(2), 33-37. DOI: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-005>
- Zinovieiev, I. V., & Manko, N. I.-V. (2025). Stvorennia zasobamy GeoGebra interaktyvnykh vizualizatsii do heometrychnykh zadach u khodi pidhotovky do NMT [Creation of interactive visualizations for geometry problems using GeoGebra in preparation for the National Multi-subject Test]. *Pedahohichna Akademiia: naukovy zapysky*, 21. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16807346>
- Lenchuk, I. H., Pavlenko, Yu. S., & Pavlov, A. V. (1977). Pro odyin iz alhorytmiv tekhnichnoho rozmnozhennia detalei shveinykh vyrobiv [On an algorithm for technical reproduction of garment pattern components]. *Vidomosti vyshchykh navchalnykh zakladiv. Seriia: Tekhnolohiia lehkoï promyslovosti*, 3, 91-95.
- Lenchuk, I. H., Pavlov, A. V., & Pavlenko, Yu. S. (1979). Pro podobnist kryvykh druhoho poriadku v inzhenernomu varianti zadavannia [On the similarity of second-order curves in the engineering representation]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 28, 83-85.
- Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 9 of secondary schools]. Kharkiv: Himnaziia.
- Merzliak, A. H., & Yakir, M. S. (2025). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv* [Geometry: Textbook for grade 8 of secondary schools]. Kharkiv: Himnaziia.
- Desmos. (n.d.). *Desmos official website*. Retrieved from <https://www.desmos.com/?lang=uk>
- Pohorielov, O. V. (1998). *Heometriia (Planimetriia): pidruchnyk dlia 7-9 klasiv serednoi shkoly* [Geometry (Planimetry): Textbook for grades 7-9]. Kyiv: Osvita.
- Stanzhytskyi, O. M., Sobchuk, V. V., Kapustian, O. V., Fedorenko, Yu. V., & Tsan, V. B. (2023). *Metodychni vkazivky ta zavdannia dlia samostiinoï roboty z dystsypliny "Metodyka navchannia matematyky". Chastyna IV: "Metodyka vyvchennia heometrii"* [Methodological guidelines and assignments for independent work in the discipline "Methods of Teaching Mathematics". Part IV: "Methods of Teaching Geometry"].
- Tytarenko, N., & Murtaziiev, E. (2019). Zastosuvannia GeoGebra na urokakh heometrii [Application of GeoGebra in geometry lessons]. *Vyshcha osvita Ukrainy u konteksti intehtratsii do yevropeiskoho osvitnoho prostoru*, 84(II), 279-292. DOI: <https://doi.org/10.38014/osvita.2019.84.25>
- Dy, A. C. (2024). Implementation of DESMOS as a teaching tool in graphing functions in the new normal. *Journal of Research and Investigation in Education*, 2(2), 59-64. DOI: <https://doi.org/10.37034/residu.v2i2.175>
- Mediana, N. L., & Dio, R. V. (2025). Systematic review on the efficacy of Desmos integration in mathematics education: Unveiling impacts on learning outcomes and pedagogical strategies. *International Journal of Future Engineering Innovations*, 2(4), 104-115. DOI: <https://doi.org/10.54660/IJFEI.2025.2.4.104-115>

Отримано / Received 29.06.2026

Прийнято до друку / Accepted 10.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 373.5.016:51:371.671(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-24-35

Вивчення елементів стохастики у 9 класі Нової української школи за авторським підручником інтегрованого курсу математики

Олександр Школьний

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

Анотація. Реформа освіти Нова українська школа (НУШ) спрямована на формування в дітей компетентностей, які сприятимуть подальшому їх навчанню, а також їх самореалізації в майбутній професійній діяльності. Процес навчання в НУШ організовано так: за затвердженими Державними стандартами освіти створено модельні навчальні програми з усіх освітніх галузей, зокрема, з математики, а за цими модельним програмами створюються підручники та інші засоби навчання.

Метою статті є висвітлення методичних особливостей вивчення елементів стохастики у 9 класі НУШ за авторськими методичними матеріалами. За цими матеріалами системне вивчення елементів стохастики розпочинається в 7 класі розділом «Статистичні ймовірності». У ньому розглядаються основні етапи статистичного дослідження, а також класичний і статистичний підходи до обчислення ймовірностей випадкових подій. У 9 класі розглядаються види статистичних показників та способи їх обчислення, а також вивчається геометричний підхід до обчислення ймовірностей випадкових подій.

У цій роботі ми описуємо авторську методику вивчення елементів стохастики у 9 класі НУШ, яка передбачає вивчення підрозділів «Статистичні показники та їх види. Абсолютні та відносні показники», «Середні показники. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення», «Геометричний підхід до обчислення ймовірностей. Використання формул площ многокутників для обчислення ймовірностей».

Апробація авторських матеріалів показує, що діти позитивно сприймають вивчення елементів стохастики і добре використовують їх у своїй навчальній діяльності. Хоча цей матеріал є новим для курсу математики 7-9 класів і методика його вивчення потребує подальших досліджень, ми переконані в доцільності та перспективності обраного підходу і будемо й надалі користуватися ним у процесі навчання математики в НУШ.

Ключові слова: Нова українська школа, компетентнісний підхід до навчання, інтегрований курс математики, елементи стохастики, методичні особливості, інноваційні методи навчання.

UDC 373.5.016:51:371.671(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-24-35

Studying elements of stochastics in 9th grade of new ukrainian school based on the author's textbook of the integrated course of mathematics

Oleksandr Shkolnyi

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

E-mail: o.v.shkolnyi@udu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

Abstract. The New Ukrainian School (NUS) education reform is aimed at developing competencies in children that will contribute to their further education, as well as their self-realization in future professional activities. The learning process at NUS is organized as follows: model educational programs have been created in all educational fields according to the approved State Education Standards, and textbooks and other teaching aids are created based on these model programs.

The purpose of the article is to highlight the methodological features of studying the elements of stochastics in the 9th grade of the NUS using the author's methodological aids. According to these aids, the systematic study of the elements of stochastics begins in the 7th grade with the section «Statistical probabilities». There we consider the stages of statistical research, classical and statistical approaches to calculating the probabilities of random events. In the 9th grade, types of statistical indicators and methods of their calculation and geometric approach to calculating the probabilities of random events are considered.

In this work we describe the author's methodology of studying the elements of stochastics in the 9th grade of NUS, which involves the study of the subsections «Statistical indicators and their types», «Average indicators. Variance and standard deviation», «Geometric approach to the calculation of probabilities. Using polygon area formulas to calculate probabilities».

Approbation of the author's aids shows that children positively perceive the study of stochastic elements and use them well in their educational activities. Although this topic is new for the 7-9 grades and the methodology for studying it requires further research, we are convinced of the feasibility and prospects of the chosen approach and will continue to use it in the process of teaching mathematics at NUS.

Keywords: New Ukrainian School, competency-based approach to learning, integrated course of mathematics, elements of stochastics, methodological features, innovative teaching methods.

Постановка проблеми. Аналіз джерел та останніх досліджень. Починаючи з 2018 року, в Україні діє реформа освіти «Нова українська школа» (НУШ). Ідея цієї реформи зародилася на фоні невідповідності суспільного запиту щодо української освітньої системи та результатів її функціонування. Цю невідповідність особливо чітко відображають результати державної підсумкової атестації (ДПА) учнів та учениць 9 і 11 класів, зовнішнього незалежного оцінювання якості знань (ЗНО) вступників до закладів вищої освіти (ЗВО), а також результати міжнародного порівняльного дослідження PISA (див., наприклад, Бахрушин, 2019; Вакуленко та ін., 2021; Мазорчук та ін., 2019; НУШ, 2024; УЦОЯО, 2021).

Як ми вже зазначали в статтях (Шкільний, 2024а) і (Шкільний, 2025), основною ідеєю Нової української школи є орієнтація учнівства на успішну інтеграцію в суспільство після закінчення школи, професійну реалізованість та особисте задоволення від власної особистої та суспільної діяльності. Тому природно, що теоретичною основою реформи НУШ є компетентнісний підхід, який спрямовує весь процес навчання в школі не на формальне здобуття учнями знань, умінь і навичок у тій чи іншій предметній області, а на формування в них таких характеристик особистості, котрі дозволять у майбутньому забезпечити їм успішну самореалізацію в дорослому світі.

З метою реалізації цієї концепції були створені Державні стандарти початкової, базової середньої та профільної середньої освіти (КМУ України 2018, КМУ України 2020, МОН України 2024), а також модельні навчальні програми для кожної з 9 освітніх галузей, визначених у концепції НУШ. Перелік модельних навчальних програм для математичної освітньої галузі на рівні початкової та базової середньої освіти наведено в (МОН України, 2024). На базі модельних навчальних програм у межах своєї академічної свободи вчителі повинні розробити і впровадити власні навчальні програми, створити календарно-тематичне планування та інші дидактичні матеріали для здійснення освітньої діяльності. Однак, основним засобом навчання в українській школі навіть у сучасних умовах залишається підручник. Зараз налічується більше 10 підручників з математики різних авторських колективів на рівні початкової та базової середньої освіти (ІМЗО, 2024).

Авторський колектив Марія Васишин, Андрій Милянник, Микола Працьовитий, Юлія Простакова і Олександр Шкільний запропонував модельні навчальні програми з математики для 5-6 та 7-9 класів (Васишин та ін., 2021; Васишин та ін., 2023), які вирізняються серед інших інноваційними підходами до формування змісту навчального матеріалу та способів його опанування. Ці програми орієнтовані на європейські та світові освітні тенденції останніх десятиліть. Зокрема, в них суттєво посилено стохастичну лінію, а також пропонується вивчати в 7-9 класах просторові геометричні фігури паралельно з плоскими, розглядаються основи фінансової грамотності тощо. Більш детально особливості згаданих модельних програм описано в (Shkolnyi, 2023).

За модельною навчальною програмою (Василишин та ін., 2023) авторський колектив у складі Олександр Шкільний, Євген Нелін, Андрій Милиник і Юлія Простакова підготували серію підручників інтегрованого курсу «Математика» для 7, 8 і 9 класів. У підручнику (Шкільний та ін. 2024) з метою вже згаданого посилення стохастичної лінії вивчається розділ «Статистичні ймовірності», в якому на простих прикладах із повсякденного життя закладаються основи розуміння суті статистичного дослідження та ймовірнісної природи явищ і процесів оточуючої дійсності. Авторську методику вивчення стохастики за згаданим підручником детально висвітлено в (Шкільний, 2024b).

У посібниках, що видані як частини підручника інтегрованого курсу математики для 9 класу (Шкільний та ін., 2025a) і (Шкільний та ін., 2025b), продовжується вивчення матеріалу, що стосується стохастичної лінії. Зокрема, вивчаються розділ «Система статистичних показників» і параграф «Геометричний підхід до обчислення ймовірностей. Використання формул площ многокутників для обчислення ймовірностей». У них стохастична лінія курсу математики 5-9 класів НУШ дістає своє логічне продовження, яке розпочалося ще в 5-6 класах і продовжилося на глибшому теоретичному рівні в 7 класі. Там само підводяться й певні підсумки щодо компетентностей, що стосуються стохастики та її застосувань, які передбачалося сформулювати в учнів та учениць на рівні базової середньої освіти.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Наразі нам не відомі відмінні від авторських методичні рекомендації щодо вивчення елементів стохастики в 7-9 класах НУШ. Зокрема, це пояснюється тим, що відповідний матеріал є авторською інновацією і вивчається виключно за модельною навчальною програмою (Василишин та ін., 2023). Однак, ці методичні рекомендації будуть корисні також і фахівцям, які працюють за іншими модельними програмами для 7-9 класів НУШ, бо елементи стохастики розглядаються там як додатковий матеріал з метою пропедевтики її подальшого вивчення на рівні профільної середньої освіти.

Метою статті є висвітлення методичних особливостей вивчення елементів стохастики в інтегрованому курсі «Математика» для 9 класу НУШ. Ми зосередимо свою увагу на тому, на що саме варто звернути увагу вчителів та вчительок, які прагнуть усвідомленого формування в учнів та учениць НУШ знань, умінь і навичок (компетентностей), пов'язаних з опануванням ними відповідного навчального матеріалу.

Виклад основного матеріалу. Згідно з програмою (Василишин та ін., 2021), пропедевтика вивчення стохастики здійснювалася ще в 5-6 класах, де вивчалися теми «Робота з даними» та «Ймовірність випадкової події». Ці теми передбачали розгляд початкових відомостей стосовно способів отримання даних з різних джерел інформації і подання їх у вигляді статистичних таблиць і діаграм, а також формування уявлення про випадкові події та способи обчислення їх ймовірностей. Принципово важливим для цієї пропедевтики є вміння учнів та

учениць розрізняти поняття «дані» та «інформація» і обчислювати ймовірності випадкових подій за класичним підходом.

Програма (Василишин та ін., 2023) передбачає продовження вивчення елементів стохастики на більш абстрактному рівні. У 7 класі з розглядаються розділ «Статистичні ймовірності», який містить два параграфи: «Статистичне дослідження та його етапи» і «Статистичний підхід до обчислення ймовірностей». Тут розглядаються етапи статистичного дослідження (статистичне спостереження, статистичне зведення, розрахунок системи статистичних показників, виявлення закономірностей і ухвалення рішень), а також обчислення ймовірностей випадкових подій за класичним підходом (повторення матеріалу 5-6 класів) і за статистичним підходом (Шкільний, 2024b).

У 9 класі вивчається розділ «Система статистичних показників», який містить відомості, що стосуються поняття статистичного показника, видів статистичних показників (абсолютні, відносні та середні) і способів їх обчислення та застосування у задачах практичного змісту, а також понять дисперсії та середнього квадратичного відхилення та їх застосувань (див. посібник Шкільний та ін., 2025a). Також у 9 класі у розділі «Площі поверхонь многогранників і тіл обертання. Геометричні ймовірності» завершується розгляд трьох основних підходів до обчислення ймовірностей випадкових подій – класичного, статистичного і геометричного. Тут здійснюється повторення матеріалу, що стосується поняття випадкової події та класичного і статистичного підходів до обчислення ймовірностей випадкових подій, а також вивчається геометричний підхід до обчислення ймовірностей, під час реалізації якого суттєвим є використання формул знаходження площ многокутників (див. посібник Шкільний та ін., 2025b). Розглянемо детальніше методичні особливості вивчення елементів стохастики в 9 класі НУШ за авторськими матеріалами.

Розділ «Система статистичних показників» посібника (Шкільний та ін., 2025a) містить два параграфи: «Статистичні показники та їх види. Абсолютні та відносні показники» і «Середні показники. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення».

У параграфі «Статистичні показники та їх види. Абсолютні та відносні показники» розглядається поняття статистичного показника, наводиться типологія статистичних показників, а також детально вивчаються абсолютні та відносні показники. Мотивацією до вивчення цього матеріалу також виступають практичні задачі, одну з яких обговорюють Петрик і Тетянка (герої посібника, учень та учениця 9 класу) на початку параграфа. Ця задача стосується зв'язку між різними видами відносних статистичних показників, який буде пізніше розглянутий у теоретичному матеріалі (Шкільний та ін., 2025a): «Фірма запланувала збільшити обсяг продажів будівельних сумішей у наступному місяці на 20% порівняно з поточним. Однак, фактично обсяг продажів був збільшений на 30%. На скільки відсотків перевиконано план?» Її цілком можна використати на початку уроку як мотиваційну задачу проблемного методу навчання.

Із курсу математики 7 класу учні знають, що «статистичне дослідження зазвичай відбувається в 4 етапи: отримання статистичних даних (статистичне спостереження); подання даних у зручному вигляді (статистичне зведення); розрахунок системи доречних статистичних показників; виявлення закономірностей, прогнозування й ухвалення рішень» (Шкільний та ін., 2024). Із цих етапів учні знають, як проводити статистичне спостереження (наприклад, за допомогою опитування чи анкетування), як подавати їх у зручному вигляді (це можуть бути варіаційні ряди або діаграми), а також як розраховувати окремі статистичні показники (розмах, середнє арифметичне значення, моду і медіану).

Потім у параграфі вводиться поняття статистичного показника: «Статистичний показник – це не лише число або кількісна характеристика якогось явища чи процесу, він також відображає якісну суть явища в конкретних умовах місця і часу» (Шкільний та ін., 2025а). Далі всі статистичні показники поділяють абсолютні, відносні та середні. Середні показники будуть вивчатися в наступному параграфі, а означення абсолютного та відносного показника є наступними (Шкільний та ін., 2025а): «Абсолютні показники – це статистичні показники, які характеризують явища навколишнього світу як такі, без відношення до інших явищ. Зазвичай вони є іменованими числами, тобто мають певні одиниці вимірювання (штуки, особи, гривні, кілометри, кілограми тощо). Відносні показники – це показники, які виражають кількісні співвідношення між явищами навколишнього світу і отримуються як результат ділення (частки) двох інших статистичних показників».

Далі наводяться конкретні приклади абсолютних та відносних показників. Для відносних показників наводяться приклади їх розрахунку. Серед відносних показників виокремлюють такі види: показники порівняння; показники структури; показники інтенсивності; показники динаміки; показники планового завдання; показники виконання плану. Потім у параграфі наводяться означення усіх видів відносних показників, а також для кожного з них наводиться конкретний приклад його розрахунку. Особливо цікавим та корисним у застосуваннях є зв'язок між показниками динаміки (ПД), показниками планового завдання (ППЗ) і показниками виконання плану (ПВП), який виражається формулою $ПД = ППЗ \cdot ПВП$. Для засвоєння відповідного матеріалу вчителям слід розглянути достатню кількість прикладів обчислення відносних показників різних видів. Додатково цьому сприятиме й відповідне навчальне відео, подане наприкінці параграфа.

Рубрика «Цікавинки від дідуся Тараса» до цього параграфа містить додаткові відомості, що стосуються рядів динаміки та їх числових характеристик – абсолютних приростів, темпів зростання та темпів приросту. Цей матеріал можна розглянути на заняттях математичного гуртка.

Параграф «Середні показники. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення» присвячений середнім показникам і показникам варіації. Мотивацією до вивчення цього матеріалу також є практичні завдання з повсякденного життя. Зокрема, в діалозі Тетянки й Петрика

розглянуто ситуацію, коли очевидно, що середнє значення певної ознаки не може бути середнім арифметичним її індивідуальних значень: «Якщо зарплата працівника в грудні порівняно з листопадом збільшилася на 10%, а у січні порівняно з груднем збільшилася ще на 20%, то на скільки відсотків щомісяця в середньому збільшувалася зарплата даного працівника протягом цих двох місяців?» (Шкільний та ін., 2025а). Тому виникає потреба у більш загальному розгляді поняття середнього показника.

Теоретичний матеріал параграфа починається з таких міркувань: «В усіх випадках, коли з'являється потреба охарактеризувати одним числом усю множину значень певної ознаки, величини або явища, користуються його середнім значенням. При цьому кожне індивідуальне значення ознаки ніби замінюється на середнє, але таким чином, щоб загальний обсяг ознаки, величини або явища залишався незмінним. Це правило називають визначальною властивістю середнього значення і більш лаконічно його можна сформулювати таким чином. Визначальна властивість середнього значення. Середнім значенням певної ознаки називають таке її значення, при заміні на котре кожного індивідуального значення цієї ознаки загальний її обсяг не зміниться» (Шкільний та ін., 2025а).

Визначальна властивість середнього значення $\bar{x}$ деякої ознаки X показує, що для його визначення слід добре розуміти, яким чином обчислюється загальний обсяг ознаки. Це поняття є неозначуваним, але воно легко моделюється на конкретних прикладах. Далі розглядаються саме такі приклади, які приводять до поняття середнього арифметичного (загальний обсяг ознаки є сумою її індивідуальних значень), середнього геометричного (загальний обсяг ознаки є добутком її індивідуальних значень) і середнього гармонійного (загальний обсяг ознаки є оберненою величиною до суми її обернених індивідуальних значень). При цьому виводяться відповідні формули для обчислення різних видів середніх значень для конкретних прикладів, а також у загальному випадку.

Зауважимо, що в 9 класі учнів та учениці можуть обчислити середнє гармонійне лише для випадку ознаки з двома значеннями, оскільки не знайомі поки з поняттям кореня n -го степеня. Зрозуміло, що на заняттях математичного гуртка для здібних учнів можна розглянути й більш загальний випадок. Поняття середнього квадратичного значення також розглядається на конкретному прикладі та в загальному випадку в навчальному відео, яке є обов'язковим для опрацювання всіма учнями та ученицями.

Другій частині матеріалу параграфа відповідає наступна практична задача: «Нехай середньомісячна температура на першому курорті в червні, липні й серпні становить 22, 26 і 24 градуси відповідно, а на другому курорті – 21, 24 і 27 градусів відповідно. Знайдемо середнє відхилення значень температури на кожному з курортів від своїх середніх значень» (Шкільний та ін., 2025а). Цю задачу також обговорюють на початку параграфа Тетянка й Петрик. Тут для здійснення вибору недостатньо знайти два середніх арифметичних

значення, бо вони будуть однакові. Слід якимось чином врахувати відхилення індивідуальних значень ознаки від середнього значення. При цьому зрозуміло, що середнє арифметичне відхилення в обох випадках дорівнює нулю, а отже, потрібно вводити окрему числову характеристику, яка би характеризувала величину цих відхилень, не враховуючи їх знаки.

Наведемо відповідні міркування з посібника (Шкільний та ін., 2025a): «Для усереднення відхилень від свого середнього значення ознаки X використовують середнє квадратичне відхилення, яке зазвичай позначають літерою σ (сигма) і обчислюють за формулою: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$ ». Далі ця формула застосовується до розв'язування згаданої задачі і виявляється, що на першому курорті температура зосереджена навколо свого середнього значення більш «кучно», тому краще поїхати саме на цей курорт.

Якщо потрібно лише порівняти дві ознаки, що мають однакові середні арифметичні значення, можна використати іншу числову характеристику – дисперсію. Вона обчислюється за формулою: $D(X) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$, яка є трохи простішою за формулу середнього квадратичного відхилення. Також важливо наголосити, що дисперсія вимірюється у одиницях, що є квадратом одиниці вимірювання початкової ознаки, на відміну від середнього квадратичного відхилення, яке вимірюється в тих самих одиницях, що й початкова ознака.

Рубрика «Цікавинки від дідуса Тараса» до цього параграфа містить продовження матеріалу, що стосується рядів динаміки. Зокрема, тут показано, як знайти середній темп зростання і середній темп приросту для конкретного ряду динаміки. Нагадуємо, що цей матеріал не є обов'язковим для вивчення, ми радимо його розглядати лише з математично здібними школярами на заняттях математичного гуртка.

Матеріал параграфа «Геометричний підхід до обчислення ймовірностей. Використання формул площ многокутників для обчислення ймовірностей», що природно стосується геометричного підходу до обчислення ймовірностей випадкових подій. Мотивацією до вивчення цього матеріалу є життєві ситуації, у яких потрібно знайти або оцінити ймовірність події, для якої класичний і статистичний підходи не можуть бути застосовані. Зокрема, у мотиваційному діалозі Петрика й Тетянки наводиться приклад такої ситуації: «Я домовилася з подружкою з паралельного класу зустрітися біля їдальні на перерві між уроками. Але ніхто з нас двох точно не знав, коли прийде. Тому ми домовилися, що та з нас, хто прийде першою, чекатиме іншу не більше 5 хвилин і якщо не дочекається, то йде, а зустріч переносимо на наступну перерву. Тривалість перерви 15 хвилин. Мені здавалося, що ймовірність того, що ми зустрінемось невелика: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Але на мій подив ми все-таки зустрілися. І я задумалася, що може я помилилася в своїх розрахунках і ця ймовірність була не така вже й мала?» (Шкільний та ін., 2025b). Нескладно помітити, що ця задача, по суті, є відомою задачею про

зустріч у класичній її постановці (час очікування складає третину всього періоду можливої зустрічі).

Для засвоєння матеріалу параграфа варто згадати означення основних понять теорії ймовірностей: випадковий експеримент, випадкова подія, неможлива подія, достовірна подія. При цьому варто наголосити, що неможлива і достовірна події – це часткові випадки випадкової події. Далі наводиться опис поняття ймовірності (не означення!): «Ймовірністю випадкової події A називають дійсне число $P(A) \in [0; 1]$, яке характеризує ступінь можливості її здійснення» (Шкільний та ін., 2025b). Для знаходження ймовірності випадкової події (дійсного числа) існують різні підходи. Учні та учениці вже знайомі з двома з них (класичним і статистичним) із курсу математики 7 класу. Варто повторити з ними відповідні відомості та розглянути достатню кількість прикладів для кожного з підходів. Цьому сприятиме як текст підручника, так і навчальне відео, яке є обов'язковим для опрацювання.

Якщо серед усіх наслідків випадкового експерименту можна виокремити нескінченну множину елементарних подій, яка задає певну фігуру на прямій або на площині, то ймовірності випадкових подій можна обчислити за геометричним підходом. За ним імовірність випадкової події A можна обчислити за формулою $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, де $m(\Omega)$ – довжина або площа геометричної фігури, яку задає множина всіх елементарних подій, а $m(A)$ – довжина або площа геометричної фігури, яку задає множина всіх елементарних подій випадкової події A . У тексті підручника наведено приклади обчислень імовірностей випадкових подій як для випадку, коли $m(A) = l(A)$ (тобто використовується довжина), так і для випадку, коли $m(A) = S(A)$ (тобто використовується площа). Закріпити ці приклади допоможе навчальне відео, яке слід опрацювати всім учням та ученицям.

Рубрика «Цікавинки від дідуся Тараса» для цього параграфа містить відомості про використання геометричного підходу до обчислення ймовірностей у випадку, коли множину всіх елементарних подій можна зобразити у вигляді геометричного тіла. У цьому випадку формула для знаходження ймовірності випадкової події є наступною: $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$, де $V(\Omega)$ – об'єм геометричної фігури, яка відповідає множині всіх елементарних подій, а $V(A)$ – об'єм геометричної фігури, яка відповідає випадковій події A . Також тут наведено конкретну практичну задачу, де ілюструється застосування цієї формули.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Наведена в статті методика завершує формування в учнів 5-9 класів НУШ компетентностей, пов'язаних з опануванням матеріалу, що стосується комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики, а також їх численних практичних застосувань, як у математиці, так і в інших науках та повсякденному житті.

Ми вважаємо, що учні та учениці мають знати поняття статистичного дослідження і його етапи, а також розуміти суть кожного з цих етапів. Для етапу статистичного спостереження важливо розуміти, що отримана в його результатів вибірка даних має бути

репрезентативною; для етапу статистичного зведення важливо, щоб таблиця даних була правильно оформлена, а відповідні діаграми для унаочнення підібрані правильно, залежно від досліджуваної ознаки; для етапу розрахунку системи статистичних показників важливо, щоб вони були доречними і адекватно описували властивості вибірки та всієї досліджуваної сукупності; для етапу виявлення закономірностей і ухвалення рішень важливо вміти використовувати як діаграми, так і статистичні показники, щоб підсумкове рішення було виваженим і обґрунтованим.

Щодо ймовірнісних уявлень, учням та ученицям важливо добре розуміти суть понять «випадкова подія» і «ймовірність випадкової події», а також знати і вміти застосовувати всі три основні підходи до обчислення ймовірностей випадкових подій (класичний, статистичний і геометричний), залежно від стохастичного експерименту, внаслідок якого відбуваються випадкові події. При цьому для класичного і геометричного підходів принциповою є рівноможливість найпростіших наслідків випадкового експерименту – елементарних подій. Комбінаторні правила додавання і множення, які мають і самостійну цінність, також зручно використовувати для обчислення ймовірностей випадкових подій за класичним підходом.

Пілотування та апробація модельної програми (Василишин та ін., 2023) і посібників (Школьний та ін., 2025a) і (Школьний та ін., 2025b) протягом 2025-2026 навчального року в закладах загальної середньої освіти України свідчить, що учні та учениці цілком позитивно сприймають пропонування спосіб вивчення елементів стохастики і належним чином використовують відповідні сформовані компетентності у своїй навчальній діяльності, причому не лише під час вивчення математики. Разом із тим зауважимо, що ретельне дослідження ефективності способу опанування матеріалу, що стосується стохастики, учнями та ученицями 9 класу НУШ іще попереду, оскільки згадана програма і посібник використовувались у навчальному процесі лише один навчальний рік. Проте ми переконані в доцільності та перспективності описаного підходу і будемо й надалі користуватися ним для формування ключових компетентностей учнів у контексті реформи «Нова українська школа».

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Бахрушин, В. (2019) Математика у PISA-2018: Результати і висновки. Нова українська школа. <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>.
- Вакуленко, Т., Горох, В., Раков, С., Терещенко, В. (2021) PISA-2022: Рамковий документ з математики. http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf

- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Школьний, О.В. (2021) Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/830/83023/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1.pdf
- Василишин, М.С., Милянник, А.І., Працьовитий, М.В., Простакова, Ю.С., Школьний, О.В. (2023) Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9-kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf
- ІМЗО (2024) Електронні версії підручників. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikiv/>
- КМУ України (2018) Державний стандарт початкової освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-p#Text>
- КМУ України (2020) Державний стандарт базової середньої освіти. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- КМУ України (2023). Державний стандарт профільної середньої освіти. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-p#Text>
- Мазорчук, М., Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., Горох, В. (2019). Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- МОН України (2024) Математика. Модельні програми для 5-6 класів і 7-9 класів НУШ. <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/>
- НУШ (2024) Офіційний сайт проекту «Нова Українська школа». <https://nus.org.ua>
- УЦОЯО (2021) Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf
- Школьний, О. (2024). Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 20-28. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-20-28>
- Школьний О.В. (2024) Методичні особливості вивчення елементів стохастичності в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. 2(24), 53-60.
- Школьний, О. (2025). Вивчення геометричних перетворень у 9 класі НУШ за авторським підручником інтегрованого курсу математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 4, 7-19. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-7-19>
- Школьний, О.В., Нелін, Є.П., Милянник, А.І., Простакова, Ю.С. (2024) Математика: підручник інтегрованого курсу для 7 класу закладів загальної середньої освіти (у 2 частинах). Харків. Ранок.
- Школьний, О.В., Нелін, Є.П., Милянник, А.І., Простакова, Ю.С. (2025) Математика: посібник як частина підручника інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Частина 2. Харків. Ранок.
- Школьний, О.В., Нелін, Є.П., Милянник, А.І., Простакова, Ю.С. (2025) Математика: посібник як частина підручника інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Частина 3. Харків. Ранок.
- Shkolnyi, O. (2023) New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In "Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău". Chișinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.

References

- Bakhrushyn, V. (2019) Matematyja u PISA-2018: rezultaty i vysnovky [Mathematics in PISA-2018: results and conclusions]. Retrieved from <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/> [in Ukrainian]
- Vakulenko, T., Gorokh, V., Rakov, S., Tereshchenko, V. (2021) PISA-2022: Ramkovyi dokument z matematyky [PISA-2022: Mathematics Framework Document]. Retrieved from http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf [in Ukrainian]
- Vasylyshyn, M., Mylianyk, A., Pratsiovytyi, M., Prostakova, Yu., Shkolnyi, O. (2021) Modelna navchalna programa "Matematyka. 5-6 klasiv" dlia zakladiv zahalnoi serednioyi osvity [Model educational program "Mathematics. Grades 7-9" for secondary education institutions]. Retrieved from https://osvita.ua/doc/files/news/831/83147/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1_1.pdf [in Ukrainian]

- Vasylyshyn, M., Mylianyk, A., Pratsiovytyi, M., Prostakova, Yu., Shkolnyi, O. (2023) Modelna navchalna programa "Matematyka. 7-9 klasy" dla zakladiv zahalnoi serednioyi osvity [Model educational program "Mathematics. Grades 7-9" for secondary education institutions]. Retrieved from https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf [in Ukrainian]
- Institute of Modernizing of the Content of Education (IMCE) (2024) Elektronni versiyi pidruchnykiv [Electronic versions of textbooks]. Retrieved from <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnykiv/> [in Ukrainian]
- Cabinet of Minister of Ukraine (CMU) (2018) Derzhavnyi standart pochatkovoyi osvity. [State standard of primary education.] Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-п#Text>. [in Ukrainian]
- Cabinet of Minister of Ukraine (CMU) (2020) Derzhavnyi standart bazovoyi serednioyi osvity. [State standard of basic secondary education.] Retrieved from <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>. [in Ukrainian]
- Cabinet of Minister of Ukraine (CMU) (2024) Derzhavnyi standart profilnoyi serednioyi osvity. [State standard of profiled secondary education.] Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-п#Text> [in Ukrainian]
- Mazorchuk, M. et. al. (2019). Nacionalnyi zvit za rezultatamy PISA-2018 [National news on the results PISA-2018]. Retrieved from https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf [in Ukrainian]
- MES of Ukraine (2024) Matematika. Modelni program dla 5-6 I 7-9 klasiv NUSh [Mathematics. Model programs for grades 5-6 and grades 7-9 of the NUS]. Retrieved from <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/> [in Ukrainian]
- New Ukrainian School (NUS) (2024) Official site of the project "New Ukrainian School": <https://nus.org.ua>
- Ukrainian Center of Education Quality Assessment (UCEQA) (2021) Oficiyniy zvit pro provedennia v 2021 roci ZNO rexlutativ navchannia zdobutyh na osnovi povnoyi zahalnoyi osvity [Official report on the 2021 EIA of learning outcomes achieved on the basis of complete general secondary education]. Retrieved from https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O. (2024) Metodichni osoblyvosti vyvchennia lohichnyh osnov matematyky v integrovanomu kursy "Matematyka" dla ucniv 7 klasu NUSh [Methodological features of studying the logical foundations of mathematics in the integrated course "Mathematics" for 7th grade students of the NUS]. *Didactics of Mathematics: theory experience, innovation*, 2, 20-28. [in Ukrainian] <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-20-28>
- Shkolnyi, O. (2024) Metodichni osoblyvosti vyvchennia elementiv stokhastyky v integrovanomu kursy "Matematyka" dla ucniv 7 klasu NUSh. [Methodological features of studying elements of stochastics in the integrated course "Mathematics" for 7th grade students of the NUS] *Topical issues of natural science and mathematics education*. 2(24), 53-60.
- Shkolnyi, O. (2025) Vyvchennia geometrychnykh peretvoren u 9 klasi NUSh za avtorskym pidruchnykom intehrovanoho kursu matematyky [Studying geometric transformations in the 9th grade of the NUSh according to the author's textbook of the integrated mathematics course]. *Didactics of Mathematics: theory experience, innovation*, 4, 7-19. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-7-19>
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., Prostakova, Yu. (2024) Matematika: pidruchnyk intehrovanoho kursu dla 7 klasu zakladiv zahalnoyi serednioyi osvity (u 2 chastynah) [Mathematics: integrated course textbook for grade 7 of general secondary education institutions (in 2 parts)]. Kharkiv. Ranok. [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., Prostakova, Yu. (2025) Matematika: posibnyk yak chastyna pidruchnyka integrovanoho kursu dla 9 klasu. Chastyna 2. [Mathematics: manual as a part of integrated course textbook for the 9th grade. Part 2]. Kharkiv. Ranok. [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., Prostakova, Yu. (2025) Matematika: posibnyk yak chastyna pidruchnyka integrovanoho kursu dla 9 klasu. Chastyna 3. [Mathematics: manual as a part of integrated course textbook for the 9th grade. Part 3]. Kharkiv. Ranok. [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O. (2023) New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In "Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău". Chișinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.

Отримано / Received 02.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 08.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 37.016:51:373.5

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-36-49

Мотиваційні задачі для вивчення теми «Функції» учнями ліцею

Тетяна Годя

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

E-mail: t.yu.hoda@npu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7595-363X>

Анотація. У сучасній математичній освіті існує розрив між абстрактністю математичних понять та їхнім практичним застосуванням у реальному житті в межах реалізації реформи Нової української школи (НУШ). У зв'язку з цим актуальною педагогічною проблемою є розробка та впровадження системи мотиваційних задач, які б демонстрували практичну цінність теми «Функції», сприяли формуванню в учнів ключових освітніх компетентностей. У статті досліджено методичні аспекти формування мотивації та пізнавального інтересу учнів ліцею під час вивчення змістової лінії «Функції» в шкільному курсі математики.

Метою статті є розробка та демонстрація прикладів мотиваційних задач життєвого й прикладного характеру, які доцільно використовувати для вивчення теми «Функції» учнями ліцею. Ми пропонуємо систему компетентнісних задач із розгорнутими методичними коментарями для дослідження властивостей степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій. Використовуючи методи математичного та комп'ютерного моделювання проблемних ситуацій, ми інтегруємо реальні життєві й професійні кейси із таких сучасних галузей, як хвильова інженерія, індустрія розваг (GameDev), фінансова грамотність та ІТ-підприємництво. Продемонстровано використання проблемних ситуацій, зокрема на прикладі когнітивного дисонансу між шкільними формулами складних відсотків та алгоритмами реальних банківських калькуляторів, а також застосування графічних калькуляторів (GeoGebra, Desmos тощо) для мінімізації рутинних обчислень та зміщення акценту на глибинний аналіз математичних моделей. Використання таких мотиваційних задач на початку вивчення теми знімає страх перед вивченням змістової лінії «Функції». Практичне значення розроблених матеріалів полягає у можливості їх безпосереднього використання вчителями математики для підвищення пізнавального інтересу та розвитку критичного мислення учнів ліцеїв.

Ключові слова: Нова українська школа, сучасні технології навчання математики, компетентнісний підхід до навчання; прикладне спрямування шкільного курсу математики, функції та їх графіки.

UDC 37.016:51:373.5

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-36-49

Motivational tasks for learning the topic «Functions» by lyceum students

Tetiana Hoda

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

E-mail: t.yu.hoda@npu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7595-363X>

Abstract. In modern mathematics education, there is a gap between the abstract nature of mathematical concepts and their practical application in real life within the framework of implementing the New Ukrainian School (NUS) reform. In this regard, a pressing pedagogical issue is the development and implementation of a system of motivational tasks that would demonstrate the practical value of the topic «Functions» and contribute to the formation of students' key educational competences. The article investigates the methodological aspects of developing motivation and cognitive interest among lyceum students while studying the «Functions» content line in the school mathematics course.

The purpose of the article is to design and demonstrate examples of real-world and applied motivational tasks suitable for studying the topic «Functions» by lyceum students. We propose a system of competence-based tasks accompanied by detailed methodological comments for exploring the properties of power, trigonometric, exponential, and logarithmic functions. Using the methods of mathematical and computer modeling of problem-based situations, we integrate real-life and professional cases from contemporary fields such as wave engineering, the entertainment industry (GameDev), financial literacy, and IT entrepreneurship. The use of problem-based situations is demonstrated, specifically through the cognitive dissonance between school formulas for compound interest and the algorithms of real-world banking calculators, as well as the application of graphing calculators (such as GeoGebra, Desmos, etc.) to minimize routine calculations and shift the focus toward the deep analysis of mathematical models. Introducing such motivational tasks at the beginning of a topic eliminates the fear of studying the 'Functions' content line. The practical significance of the developed materials lies in the possibility of their direct use by mathematics teachers to enhance cognitive interest and foster critical thinking in lyceum students.

Keywords: New Ukrainian School, modern technologies of teaching mathematics, competency-based approach to learning, applied orientation of the school mathematics course, functions and their graphs.

Постановка проблеми. Аналіз джерел та останніх досліджень. Математична освіта в Україні знаходиться на етапі переходу від формального засвоєння знань до формування ключових компетентностей учнів, зокрема їхньої здатності застосовувати математичні інструменти математичний апарат для розв'язання прикладних задач. Тема «Функції» є однією з фундаментальних і водночас складних тем для сприйняття учнями в шкільному курсі математики. Традиційний підхід до вивчення функцій розширюється і доповнюється сучасними засобами навчання, актуальними темами завдань, задачами які виникають у зв'язку із розвитком технологій та появою нових професій.

При вивченні функцій у ліцеях виникає потреба встановити зв'язок між абстрактними поняттями теми «Функції» та їх застосуванням (у фізиці, економіці, біології тощо). У зв'язку з цим актуальною педагогічною проблемою є розробка та впровадження системи мотиваційних задач, які б демонстрували практичну цінність теми «Функції», сприяли формуванню в учнів ключових освітніх компетентностей.

Проблематика мотиваційних задач не є новою для шкільної освіти. Як зазначено в дослідженні Н. Черненко (Черненко, 2002) навчання математики через прикладні, практичні задачі, вправи – один із шляхів удосконалення процесу навчання, активізації пізнавальної діяльності учнів, що посилює світоглядні аспекти навчання. Проблема мотивації навчальної діяльності також займалися О. Лавринюк, В. Кириченко (Лавринюк & Кириченко, 2023), С. Кошута (Кошута, 2022), В. Манько (Манько, 2013). Дослідження проведене О. Столярчук (Столярчук, 2022) показує, що основною мотивацією до навчання є професійний ріст та особистісний розвиток. Також не втрачає актуальності спілкування з однолітками, а винагорода від дорослих, вплив батьків та вчителів грає найменшу роль. Спираючись на вище зазначені дослідження, ми вбачаємо розв'язання проблеми низької мотивації учнів до вивчення теми «Функції» у використанні мотиваційних задач під час вивчення даної теми.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Не зважаючи на проведені дослідження, питання розробки мотиваційних задач для теми «Функції» у ліцеях залишається недостатньо розкритою. Мотиваційні задачі мають бути актуальними та динамічними, відповідати інтересам учнів і враховувати їхні вікові особливості.

Метою статті є розробка та демонстрація прикладів мотиваційних задач життєвого й прикладного характеру, які доцільно використовувати для вивчення теми «Функції» учнями ліцею.

Виклад основного матеріалу. Вивчення теми «Функції» у ліцеї містить низку спільних компонентів: організаційні форми та моделі навчання; спільний інструментарій (засоби навчання); методичні прийоми та підходи; оцінювання та рефлексія; побудова індивідуальної траєкторії. Цілісний підхід та єдина система вивчення дозволяє учням не просто запам'ятовувати формули, а розвивати навички самостійності, цифрової грамотності та критичного мислення незалежно від конкретної математичної теми.

Проте окрім спільних рис вивчення степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій різняться специфікою їх застосування до розв'язування прикладних задач. Відповідно до вимог Державного стандарту (КМУ, 2024) щодо формування математичної компетентності, такі прикладні та компетентнісні задачі доцільно впроваджувати на етапі мотивації навчальної діяльності (для створення проблемних ситуацій та стимулювання інтересу, як зазначає О. Пометун (Пометун, 2007)) або на етапі закріплення знань (для відпрацювання практичних навичок за методикою Н. Тарасенкової (Тарасенкова, 2016)). Наведемо приклади задач, розв'язання та методичні коментарі для степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій, які доцільно буде використовувати на етапі мотивації навчальної діяльності.

Степенева функція

Задача. Потужність сигналу Wi-Fi залежить від відстані до роутера й описується степеневою функцією $I(d) = k \cdot d^{-2}$ де I – інтенсивність (Вт/м²), d – відстань у м, k – потужність джерела у Вт. Обчисліть, як зміниться інтенсивність сигналу для користувача, якщо він відійде від роутера: а) у 2 рази далі; б) у 3 рази далі.

Розв'язання.

d_1 – початкова відстань; d_2 – нова відстань; $I_1(d_1) = k \cdot d_1^{-2}$; $I_2(d_2) = k \cdot d_2^{-2}$

$$\text{а) } d_2 = 2 \cdot d_1; I_2(d_2) = k \cdot d_2^{-2} = \frac{k}{d_2^2} = \frac{k}{(2 \cdot d_1)^2} = \frac{k}{4 \cdot d_1^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k}{d_1^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot I_1$$

$$\text{б) } d_2 = 3 \cdot d_1; I_2(d_2) = k \cdot d_2^{-2} = \frac{k}{d_2^2} = \frac{k}{(3 \cdot d_1)^2} = \frac{k}{9 \cdot d_1^2} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{k}{d_1^2}\right) = \frac{1}{9} \cdot I_1$$

Методичний коментар:

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість абстрактних моделей учням пропонується реальний кейс із їхнього щоденного життя (якість бездротового інтернету залежно від розташування в помешканні). Актуальність полягає у розв'язанні проблеми відірваності шкільної теорії від практики: задача наочно демонструє, як суто математичні властивості степеня з від'ємним показником керують сучасними технологіями, з якими підлітки взаємодіють щохвилини.

2. Достатній теоретичний рівень. Задача базується на фундаментальному законі класичної фізики та хвильової інженерії – «Законі обернених квадратів». У зміст інтегровано об'єктивні наукові факти (тривимірне сферичне поширення електромагнітних хвиль у просторі) та технічні реалії роботи побутової електроніки. Математичний апарат задачі вимагає від учнів застосування властивостей степеневі функції з від'ємним парним показником, зокрема тотожності $f(x) = k \cdot x^{-2} = \frac{k}{x^2}$, що забезпечує глибоке засвоєння теми «Степенева функція» в 10 класі.

3. Дослідницький характер. Завдання вимагає від учнів елементів дослідження. Замість прямого обчислення за готовим шаблоном, учні мають проаналізувати побутову гіпотезу

(«якщо відстань більша втричі, то сигнал слабший втричі») та спростувати її за допомогою математичного моделювання. Процес розв'язання передбачає роботу з функціональною залежністю.

4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі логічно пов'язує фізичні й технічні величини (інтенсивність хвилі, відстань до джерела) із математичним поняттям аргументу та функції. Завдяки сильному когнітивному дисонансу (учні підсвідомо очікували погіршення сигналу лише в 3 рази, а математично отримали – в 9 разів), задача гарантує довготривале запам'ятовування властивостей функції $y = x^{-2}$ та форми її графіка. Задачу рекомендується використовувати на етапі мотивації (для створення проблемної ситуації під час введення функцій з від'ємними показниками).

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 10 класу, розділ «Степенева функція». Зміст завдання органічно базується на раніше засвоєних учнями знаннях: властивості степеня з цілим від'ємним показником; поняття функції, аргументу, залежної змінної та коефіцієнта пропорційності.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано літературною українською мовою з дотриманням сучасних лінгвістичних норм педагогічного стилю. Використано стандартизовану наукову термінологію та міжнародну систему одиниць (СІ) для позначення відстаней (м) та інтенсивності випромінювання ($\text{Вт}/\text{м}^2$). Математичні вирази, формули та варіанти відповідей оформлені за допомогою чіткого символічного запису, що полегшує візуальне сприйняття матеріалу.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Робота над задачею забезпечує формування ключових і предметних компетентностей відповідно до Державного стандарту профільної середньої освіти:

- Математична компетентність: формує вміння розробляти, аналізувати та інтерпретувати математичні моделі реальних процесів; оперувати степеневими виразами для швидких усних розрахунків; досліджувати поведінку функції при зміні аргументу.
- Цифрова компетентність: допомагає учням зрозуміти фізико-математичні принципи роботи бездротових мереж (Wi-Fi, мобільний зв'язок), що сприяє усвідомленому та грамотному налаштуванню домашнього цифрового середовища (наприклад, правильного вибору місця для роутера в квартирі).
- Компетентність у галузі природничих наук, техніки і технологій: реалізує глибокий міжпредметний зв'язок із фізикою (тема «Електромагнітні хвилі», геометричне поширення енергії у вигляді сфери) та знайомить із поняттям константи джерела випромінювання.

- Уміння навчатися впродовж життя: розвиває критичне мислення, логіку, здатність аналізувати побутові життєві ситуації за допомогою точних наукових інструментів та піддавати сумніву хибні інтуїтивні висновки.

Тригонометричні функції

Задача. Уявіть, що ви – розробники комп’ютерних ігор (наприклад, симулятора парку розваг) або інженери з безпеки. У вашому парку запускають нове гігантське колесо огляду. Кабінка з пасажиром починає рух з найнижчої точки (платформи), яка піднята над землею на 2 м. Найвища точка, якої досягають відвідувачі на вершині колеса, становить 50 м. Повне коло колесо здійснює рівно за 4 хвилини. Через 1 хвилину після старту на атракціоні раптово вимкнулося світло й колесо зупинилося. Потрібно терміново викликати рятувальників із висувною драбиною. На яку саме висоту в метрах має висуватися драбина? Як це швидко прорахувати, якщо ми знаємо лише час зупинки – 1 хвилину? Чи можна описати рух кабінки вгору і вниз однією універсальною математичною формулою, щоб оператор атракціону завжди бачив точну висоту пасажирів на своєму моніторі в реальному часі?

Розв’язання

Для розв’язання задачі будуюмо модель у GeoGebra (рис.1).

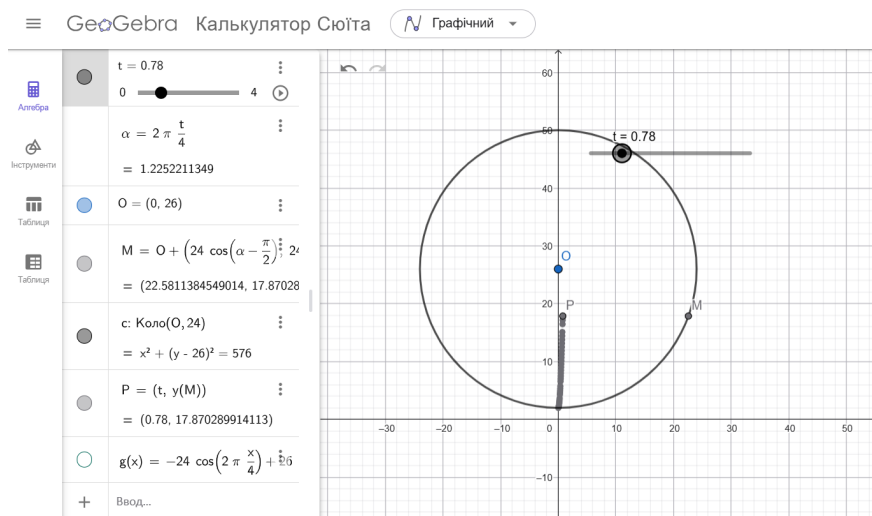


Рисунок 1. Модель колеса огляду

Після моделювання задачі учні мають отримати відповідь 26 м.

Примітка: Для правильного позиціонування об’єкта в системі координат учні мають вирахувати радіус (R) та центр колеса (M): найнижча точка – 2 м, найвища – 50 м, отже діаметр становить $50 - 2 = 48$ м. Радіус колеса: $R = 24$ м. Центр колеса M по осі Oy піднятий на висоту: $2 + 24 = 26$ м. Вводиться точка центра: $M = (0, 26)$. Будується коло за центром і радіусом: $c = \text{Circle}(M, 24)$. Оскільки рух починається з найнижчої точки (2 м) і йде вгору, позицію кабінки (точки P) залежно від часу t найзручніше задати через параметричне рівняння або функцію косинуса. Період коливань становить 4 хвилини, тому кутова швидкість – $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Для

формування зв'язку між рухом по колу та графіком синуса, у GeoGebra будується універсальна функція висоти $h(t)$ та залежна динамічна точка графіка: $G = (t, y(P))$. Якщо увімкнути для точки G функцію «Залишати слід» (Trace On), то під час обертання колеса на екрані паралельно вимальовуватиметься ідеальна косинусоїда.

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована нами задача безпосередньо відповідає сучасним потребам організації навчально-виховної роботи у старшій школі відповідно до реформи НУШ. Тематика індустрії розваг, геймдеву (GameDev / розробки комп'ютерних ігор) та екстремальних атракціонів є максимально близькою, динамічною та зрозумілою сучасному поколінню учнів. Практична значущість полягає в тому, що задача руйнує стереотип про «відірваність» тригонометрії від реального життя. Вона наочно демонструє, що проектування безпекових систем атракціонів та створення ігрових симуляцій підпорядковується чітким математичним закономірностям – періодичним тригонометричним функціям.

2. Достатній теоретичний рівень. Тему розкрито на сучасному рівні розвитку наукових знань про прикладну інженерію та комп'ютерне моделювання фізичних процесів. У змісті матеріалу використано об'єктивні факти:

- Кінематика колового руху: Взаємозв'язок між лінійним переміщенням точки по колу та її проекцією на вертикальну вісь (висоту над землею).
- Конструктивні параметри як параметри функції: Наявність мінімальної та максимальної висоти над землею (2 м і 50 м), що безпосередньо визначають амплітуду косинусоїди та вертикальне зміщення її графіка.
- Математичний апарат задачі повністю коректний: Учні оперують поняттями періоду циклу ($T = 4$ хв), циклічної частоти, екстремумів функції та досліджують поведінку періодичної залежності на конкретному часовому проміжку ($t = 1$ хв).

3. Дослідницький характер. Задача має яскраво виражений дослідницький характер, оскільки стає для учнів інтелектуальним викликом на етапі мотивації. Поставлене проблемне запитання про порятунок людей змушує школярів аналізувати динаміку руху. Учні стикаються з математичним парадоксом: висота кабінки залежить від часу нелінійно (за чверть часу оберту кабінка пройшла не чверть усього шляху, а піднялася до рівня центра осі колеса – 26 м). Це спонукає учнів до критичного мислення, висування гіпотез та усвідомлення того, що прості лінійні чи квадратичні функції не здатні описати циклічний процес, вимагаючи пошуку абсолютно нового математичного інструменту.

4. Зміст та практичне застосування. Матеріал викладено послідовно, емоційно, що ідеально для перших хвилин уроку. Очікується, що завдяки створенню проблемної ситуації (екстрена зупинка атракціону), рівень залученості учнів та їхній пізнавальний інтерес до вивчення властивостей тригонометричних функцій зросте. Задачу необхідно використовувати на етапі мотивації та актуалізації опорних знань під час вивчення теми

«Тригонометричні функції», або як стартовий кейс на інтегрованих уроках (Математика + Фізика / Інформатика).

5. Відповідність навчальним програмам. Зміст задачі повністю відповідає чинній навчальній програмі з алгебри та початків аналізу для 10 класу (рівень стандарту та профільний рівень), розділ «Тригонометричні функції». Сюжет побудовано як місток від геометрії до математичного аналізу, спираючись на раніше набуті знання: означення синуса і косинуса гострого кута в прямокутному трикутнику; поняття декартових координат точки на одиничному колі; співвідношення між часом, швидкістю та періодом повторення процесів.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано літературною українською мовою з дотриманням наукової та технічної термінології. Структура задачі розроблена з урахуванням її миттєвої інтеграції в сучасне цифрове середовище GeoGebra або Desmos. Візуалізація «розгортання» обертового кола у хвилю синусоїди в GeoGebra забезпечує високий естетичний, технологічний та наочний рівень початку уроку.

7. Компетентності, які розвиває ця задача:

- Математична компетентність: вміння перекладати реальну життєву ситуацію мовою математичних символів; інтуїтивне розуміння періодичності, амплітуди та зміщення графіка функції до їхнього формального вивчення.
- Компетентність у галузі природничих наук, техніки і технологій (STEM-орієнтація): розуміння інженерних принципів безпеки та технічних розрахунків механізмів; моделювання фізичного руху за допомогою математичного апарату.
- Інформаційно-комунікаційна компетентність: формування наочно-образного мислення через роботу з динамічними графопобудовниками; розуміння алгоритмів, за якими розробники комп'ютерних ігор створюють траєкторії об'єктів у віртуальному просторі.
- Громадянські та соціальні компетентності: усвідомлення важливості точних інженерних розрахунків для забезпечення безпеки життя та здоров'я людей у публічних просторах.
- Уміння навчатися впродовж життя: формування стійкої внутрішньої мотивації до навчання; здатність бачити математичні закони в оточуючому середовищі (від годинників до парків розваг).

Показникова функція

Задача. Анна має 100 000 грн і хоче розмістити їх на депозит під n % річних строком на один рік. Використайте депозитний калькулятор будь-якого банку та дослідіть, як змінюється кінцева сума вкладу залежно від способу нарахування відсотків. Порівняйте результати для таких умов: без капіталізації відсотків та зі щомісячною капіталізацією відсотків. Який депозит є вигіднішим? Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною?

Розв'язання

Відкриваємо депозитний калькулятор, обираємо потрібні нам дані для розрахунку двох різних стратегій. Відсотки по депозиту в різних банках можуть відрізнятися.

Наприклад, у ПриватБанку на 1 рік відсоткова ставка 13%. Депозит «Стандарт строковий» пропонує 2 варіанти:

1. На карту (проценти можна витратити одразу): кінцева сума – 112 999.99 грн (рис. 2).

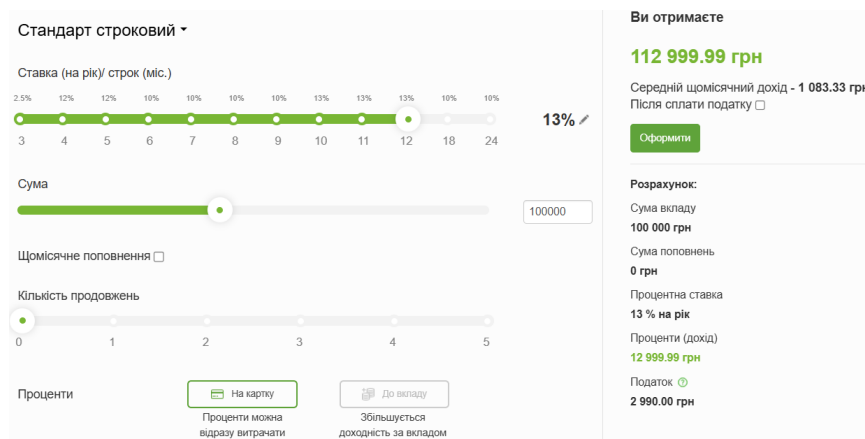


Рисунок 2. Розрахунок депозиту (проценти можна відразу витратити)

2. До вкладу (збільшується доходність за вкладом): кінцева сума – 113 613.32 грн (рис. 3).

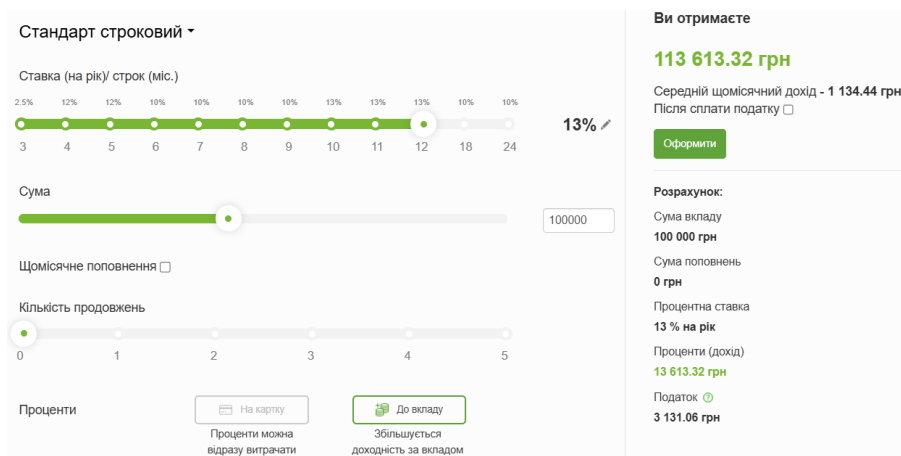


Рисунок 2. Розрахунок депозиту (збільшується доходність за вкладом)

Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною?

На карту: $100\,000 + 100\,000 \cdot 0,13 = 113\,000$.

До вкладу: $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{12} = 113\,803,25$

За однакової відсоткової ставки депозит із капіталізацією завжди принесе більше грошей, тому що база нарахування постійно зростає.

Примітка. Рекомендуємо вказати учням на відмінності розрахунків між депозитним калькулятором та за формулами. Відмінність трапляється через дискретність часу та податок на прибуток.

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам профільної математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість абстрактних теоретичних розрахунків учням пропонується реальний кейс із повсякденного фінансового життя (вибір вигідного банківського вкладу та оптимізація власних заощаджень). Актуальність полягає у розв'язанні проблеми відірваності шкільної теорії від практики: задача наочно демонструє, як суто математичні властивості показникової функції безпосередньо впливають на добробут родини, розвивають фінансову культуру та критичне мислення майбутніх вкладників.

2. Достатній теоретичний рівень. Задача базується на економічних поняттях простих та складних відсотках (капіталізації), які мають відображення в реальному банківському секторі України. Математичний апарат задачі вимагає від учнів розуміння різниці між двома математичними моделями: лінійною (де приріст є постійним, оскільки відсотки нараховуються на початкову суму) та показниковою (де приріст є прогресивним, оскільки відсотки нараховуються на вже збільшену суму). Інтеграція діючих умов комерційних банків (на прикладі ставки 13% у ПриватБанку) забезпечує високу наукову та прикладну точність матеріалу.

3. Дослідницький характер. Завдання має яскраво виражений дослідницький, пошуковий характер. Замість роботи за жорстким текстовим алгоритмом, учні самостійно використовують відкриті цифрові джерела (онлайн-калькулятори), експериментують із налаштуваннями інтерфейсу, аналізують отримані дані та шукають відповідь на проблемне питання: «Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною?». Процес розв'язання вимагає від здобувачів освіти висунення гіпотези, її емпіричної перевірки за допомогою ІКТ та формулювання самостійного узагальнювального висновку про переваги капіталізації.

4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі логічно пов'язує фінансові інструменти (деPOSITNІ програми, банківська ставка, капіталізація) з математичними поняттями функції, аргументу та швидкості зростання графіків. Завдяки виникненню очевидного математичного дисонансу (номінальна ставка в обох випадках однакова – 13%, але фінансовий результат різний), задача гарантує довготривале розуміння суті «складного відсотка» та механізму його нарахування. Матеріал рекомендується використовувати на етапі мотивації вивчення показникової функції (як класичну проблемну ситуацію), під час уроків-практикумів із фінансової математики, або як індивідуальний домашній міні проєкт.

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 10–11 класів, розділи «Показникова функція» та «Прикладні задачі на відсоткові розрахунки». Зміст завдання органічно базується на раніше засвоєних учнями знаннях: поняття відсотка від числа та знаходження числа за його відсотком; формула складних відсотків.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі та її розв'язання сформульовані

сучасною літературною українською мовою з дотриманням норм економічної та педагогічної термінології. Використано чіткі назви реальних банківських продуктів («Стандарт строковий»), що підсилює довіру до завдання. Числові дані округлені за правилами банківського обліку (до сотих, тобто до копійок), що демонструє учням культуру оформлення реальних фінансових документів.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Робота над задачею забезпечує формування ключових і предметних компетентностей відповідно до Державного стандарту профільної середньої освіти:

- Математична компетентність: формує вміння інтерпретувати графічні та числові результати, отримані за допомогою математичного моделювання; порівнювати лінійні та показникові моделі; робити точні розрахунки на основі реальних даних.
- Цифрова компетентність: розвиває навички впевненого використання вебдодатків, онлайн-симуляторів та фінансових калькуляторів для розв'язання повсякденних життєвих задач.
- Підприємливість та фінансова грамотність: є ключовим елементом цієї задачі; вчить підлітків свідомо оцінювати фінансові ризики та вигоди, розуміти капіталізацію як інструмент захисту грошей від інфляції, аналізувати умови банківських угод для оптимізації власного або сімейного бюджету.
- Уміння навчатися впродовж життя: формує критичне мислення, здатність піддавати сумніву поверхові твердження (що однакова ставка завжди дає однаковий дохід) та самостійно шукати істину через практичне дослідження.

Логарифмічна функція

Задача. Ви відкрили власний IT-стартап і поклали перший прибуток у розмірі 10 000 грн на депозит. Банк пропонує 10% річних у гривні. За скільки місяців сума на вашому рахунку: а) подвоїться; б) збільшиться в x разів?

Розв'язання:

а) $A = A_0 \times \left(1 + \frac{p}{12}\right)^m$, A_0 – початкова сума вкладу; A – кінцева сума; p – річна ставка у вигляді десяткового дробу; m – кількість місяців, яку нам потрібно знайти.

$$2A_0 = A \times \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^m$$

$$2 = (1 + 0,008)^m$$

$$2 = (1,008)^m$$

$$m = \log_{1,008} 2 \approx 87 \text{ місяців}$$

б) Міркуючи аналогічно отримаємо значення

$$m = \log_{1,008} x$$

Відповідь: а) 87 місяців; б) $\log_{1,008} x$ місяців.

Примітка: в результаті учні отримують формулу залежності кількості місяців (m) від того, у скільки разів збільшується сума (x):

$$m(x) = \log_{1,008} x$$

Якщо ми замінімо $m(x)$ на y , то отримаємо класичну логарифмічну функцію:

$$y = \log_a x, \quad \text{де } a = 1,008$$

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам профільної математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість сухого означення нової математичної функції учням пропонується життєвий кейс із близької їм сфери (розвиток ІТ-стартапу та планування капіталу). Актуальність полягає у створенні штучного інтересу до вивчення нової теми: задача наочно демонструє, що логарифм – це не вигадана абстракція, а конкретний інструмент, який виник із практичної потреби дізнатися точний час (термін), коли капітал досягне бажаного фінансового результату.

2. Достатній теоретичний рівень. Задача побудована на логічному переході від прикладної фінансової моделі (складних відсотків із щомісячною капіталізацією) до вивчення логарифмічної функції. Математичний апарат задачі вимагає від учнів вміння розв'язувати показникові рівняння. Перша частина завдання спирається на означення логарифма як операції, оберненої до піднесення до степеня для обчислення конкретного часу подвоєння капіталу. Друга частина підводить учнів до розуміння логарифмічної функції як математичної моделі.

3. Дослідницький характер. Завдання має яскраво виражений евристичний характер, оскільки побудоване на методі створення проблемної ситуації. Коли учні вміють застосовувати формулу складних відсотків, у них виникає ситуація успіху. Проте зустріч із формулою

$m(x) = \log_{1,008} x$, викликає у них когнітивний дисонанс.

4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі органічно поєднує фінансову термінологію (початковий капітал, прибуток, депозит, швидкість росту) із суто алгебраїчними поняттями. У процесі розв'язання учні усвідомлюють, що логарифмічна функція є інструментом зворотного прогнозування – вона шукає «час», коли відомий «результат». Матеріал рекомендується використовувати як «гачок» (мотиваційний блиц) на перших хвилинах уроку під час вивчення теми «Логарифмічна функція» у 11 класі.

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 11 класу. Зміст завдання базується на міжпредметних зв'язках та забезпечує наступність навчання: вміння застосовувати показникові функції з основою $a > 1$ та означення логарифма, як показника степеня.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі та її аналітичне розв'язання сформульовані сучасною літературною українською мовою з дотриманням педагогічних і лінгвістичних норм. Покроковий запис переходу від показникового рівняння до логарифмічного виразу і далі до логарифмічної функції оформлено математично коректно. Використання знака наближеного дорівнює ($\approx$) при округленні результату до сотих виховує в учнів графічну та обчислювальну культуру.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Розв'язання задачі гарантує всебічний розвиток ключових компетентностей відповідно до Державного стандарту:

- Математична компетентність: розвиває вміння будувати та досліджувати математичні моделі реальних процесів, переходити від однієї функціональної моделі (показникової) до іншої (логарифмічної), виконувати наближені обчислення.
- Підприємливість та фінансова грамотність: допомагає учням зрозуміти часову вартість грошей, логіку накопичення капіталу, важливість математичного планування та прогнозування в бізнесі й стартап-культурі.
- Уміння навчатися впродовж життя: формує здатність аналізувати нестандартні ситуації, помічати межі своїх поточних знань та свідомо приймати нові математичні інструменти для розширення цих меж.

Висновки і перспективи подальших досліджень. У статті обґрунтовано методичну проблему використання мотиваційних задач при вивченні теми «Функції» учнями ліцею та наведено приклади мотиваційних задач з методичними коментарями для вивчення степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій. Наведені задачі враховують вікові особливості старшокласників та відповідають засадам НУШ. В подальших дослідженнях проблематика мотиваційних задач може бути розширеною і доповненою задачами для закріплення знань і вмінь, створенні практичних кейсів. Дані задачі можна доповнювати сучасними засобами навчання, що дозволить зменшити розрив між абстрактністю математичних понять та життям.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи. Автор заявляє, що під час написання цієї статті штучний інтелект був використаний для редагування (виправлення орфографії, пунктуації) та частково для перекладу англійською мовою.

Список використаних джерел

Кабінет Міністрів України. (2024). Державний стандарт профільної середньої освіти (Постанова № 851 від 25 липня 2024 р.).

- Кошута, С. В. (2022). Мотивація пізнавального інтересу учнів при вивченні теми: «Степенева функція та її властивості» під час дистанційного навчання. *Наукові записки молодих учених*, (10). <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1951>
- Лавринюк, О., & Кириченко, В. (2023). Мотивація до навчальної діяльності: аналіз сучасних теорій. *Журнал соціальної та практичної психології*, (1), 34–39. <https://doi.org/10.32782/psy-2023-1-6>
- Манько, В. (2013). Роль мотивації в підвищенні навчальних досягнень учнів. *Завучу. Усе для роботи*, (9–10), 34–37.
- Пометун, О. (2007). *Енциклопедія інтерактивного навчання*. Репозиторій ЛДУФК. <https://repository.ldufk.edu.ua/items/e2000c32-02ef-4328-8b55-94ef327ded2f>
- Столярчук, О. А. (2022). Навчання та психоемоційний стан українських підлітків в умовах війни в Україні. *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Психологія*, (1), 115–120. <https://doi.org/10.32782/psy-visnyk/2022.1.22>
- Тарасенкова, Н. А. (2016). Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект. *Математика в рідній школі*, 11(179), 26–30.
- Черненко, Н. А. (2002). Мотиваційна функція задач у навчанні математики. В І. О. Теплицький (Відп. ред.), *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць: В 3-х томах: Т. 1: Теорія та методика навчання математики* (с. 407–411). Видавничий відділ НацМетАУ.

References

- Chernenko, N. A. (2002). Motyvatsiina funktsiia zadach u navchanni matematyky [Motivational function of problems in teaching mathematics]. In I. O. Teplytskyi (Ed.), *Teoriia ta metodyka navchannia matematyky, fizyky, informatyky: zbirnyk naukovykh prats: V 3-kh tomakh: T. 1: Teoriia ta metodyka navchannia matematyky* (pp. 407–411). Publishing Department of NMetAU.
- Lavryniuk, O., & Kyrychenko, V. (2023). Motyvatsiia do navchalnoi diialnosti: analiz suchasnykh teorii [Motivation for learning activity: Analysis of modern theories]. *Zhurnal sotsialnoi ta praktychnoi psykholohii*, (1), 34–39. <https://doi.org/10.32782/psy-2023-1-6>
- Koshuta, S. V. (2022). Motyvatsiia piznavalnoho interesu uchniv pry vyvchenni temy: «Stepeneva funktsiia ta ii vlastyvoli» pid chas dystantsiinoho navchannia [Motivation of students' cognitive interest when studying the topic: "Power function and its properties" during distance learning]. *Naukovi zapysky molodykh uchenykh*, (10). <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1951>
- Manko, V. (2013). Rol motyvatsii v pidvyshchenni navchalnykh dosiahnen uchniv [The role of motivation in increasing students' educational achievements]. *Zavuchu. Use dlia roboty*, (9–10), 34–37.
- Pometun, O. (2007). *Entsyklopediya interaktyvnoho navchannia* [Encyclopedia of interactive learning]. LDUFK Repository. <https://repository.ldufk.edu.ua/items/e2000c32-02ef-4328-8b55-94ef327ded2f>
- Taraskenkova, N. A. (2016). Kompetentnisnyi pidkhid u navchanni matematyky: teoretychnyi aspekt [Competence-based approach in teaching mathematics: Theoretical aspect]. *Matematyka v Ridnii Shkoli*, 11(179), 26–30.
- Stoliarchuk, O. A. (2022). Navchannia ta psykhoemotsiinyi stan ukraïnskykh pidlitkiv v umovakh viiny v Ukraini [Education and psycho-emotional state of Ukrainian adolescents during the war in Ukraine]. *Naukovyi Visnyk Uzhhorodskoho Natsionalnoho Universytetu. Serii: Psykholohiia*, (1), 115–120. <https://doi.org/10.32782/psy-visnyk/2022.1.22>
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2024). *Derzhavnyi standart profilnoi serednoi osvity* [State standard of upper secondary education] (Resolution No. 851 of July 25, 2024).

Отримано / Received 14.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 21.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 37.091.26:51]:37.015.3

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-50-66

Формувальне оцінювання як засіб особистісного розвитку школярів у процесі навчання математики

Любов Михайленко¹, Іван Хутченко²

1. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

E-mail: mikhailenkolf@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5051-5561>

2. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

E-mail: chytor96@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9022-6996>

Анотація. *Мета роботи* полягає у визначенні педагогічних орієнтирів щодо використання інструментів формувального оцінювання для підтримки особистісного розвитку учнівства у процесі навчання математики.

Дослідження ґрунтується на аналізі, узагальненні та систематизації сучасних наукових праць із проблеми формувального оцінювання, опублікованих переважно в матеріалах конгресів Європейського товариства досліджень у галузі математичної освіти (ERME), а також на порівняльному аналізі психолого-педагогічних підходів до особистісного розвитку учнів у процесі навчання математики.

У статті здійснено комплексний аналіз потенціалу кожної зі складових моделі формувального оцінювання Р. Black і D. Wiliam щодо особистісного розвитку учнів у процесі навчання математики. Визначено психолого-педагогічні механізми їх впливу, систематизовано інструменти реалізації та охарактеризовано особливості їх застосування з урахуванням вікових можливостей здобувачів освіти. Обґрунтовано взаємозв'язок між окремими складовими моделі та розвитком внутрішньої мотивації, навчальної автономії, критичного мислення, рефлексивності, комунікативної компетентності, здатності до співпраці, самоефективності й саморегуляції.

Формувальне оцінювання доцільно розглядати як цілісну педагогічну систему, що забезпечує поступовий перехід від зовнішнього керування навчальною діяльністю до самостійного її регулювання учнівством. Особистісний потенціал цієї системи реалізується за умови комплексного впровадження всіх складових моделі Р. Black і D. Wiliam. Практичне значення дослідження полягає у визначенні педагогічних орієнтирів щодо добору та використання інструментів формувального оцінювання для підтримки особистісного розвитку учнів у процесі навчання математики.

Ключові слова: навчання математики; особистісний розвиток; формувальне оцінювання.

UDC: 37.091.26:51]:37.015.3

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-50-66

Formative assessment as a means of students' personal development in the process of learning mathematics

Liubov Mykhailenko¹, Ivan Khutchenko²

1. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

E-mail: mikhailenkolf@gmail.comORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5051-5561>

2. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

E-mail: chytor96@gmail.comORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9022-6996>

Abstract. The purpose of the study is to identify pedagogical guidelines for the use of formative assessment tools to support students' personal development in mathematics education.

The study is based on the analysis, synthesis, and systematization of contemporary scholarly publications on formative assessment, primarily those published in the proceedings of the Congresses of the European Society for Research in Mathematics Education (ERME), as well as on a comparative analysis of psychological and pedagogical approaches to students' personal development in mathematics education.

The paper provides a comprehensive analysis of the potential of each component of the formative assessment model proposed by R. Black and D. Wiliam for fostering students' personal development in mathematics education. The psychological and pedagogical mechanisms underlying their influence are identified, the implementation tools are systematized, and the specific features of their application are characterized with due consideration of learners' age-related characteristics. The study substantiates the relationship between the individual components of the model and the development of intrinsic motivation, learning autonomy, critical thinking, reflectivity, communicative competence, collaboration skills, self-efficacy, and self-regulation.

Formative assessment should be regarded as an integral pedagogical system that facilitates a gradual transition from external regulation of learning activities to students' self-regulation. The personal development potential of this system is realized through the comprehensive implementation of all components of the formative assessment model developed by R. Black and D. Wiliam. The practical significance of the study lies in identifying pedagogical guidelines for selecting and using formative assessment tools to support students' personal development in mathematics education.

Keywords: mathematics education; personal development; formative assessment.

Постановка проблеми. У контексті реалізацій ідей Нової української школи формувальне оцінювання дедалі частіше розглядається не лише як педагогічний інструмент відстеження навчальних досягнень, а й як важливий засіб підтримки особистісного зростання учнівства. Водночас, потенціал формувального оцінювання у формуванні особистісних якостей школярів у процесі навчання математики залишається недостатньо висвітленим у вітчизняних наукових джерелах і не завжди повною мірою реалізується в освітній практиці. Особливого значення ця проблема набуває під час навчання математики, оскільки математична діяльність передбачає аналіз, обґрунтування, перевірку результатів, рефлексію власних дій та прийняття рішень. За умови належної організації формувальне оцінювання здатне сприяти не лише засвоєнню математичних знань і способів діяльності, а й розвитку самостійності, відповідальності за результати навчання, рефлексивності, наполегливості та впевненості у власних інтелектуальних можливостях, що є важливими складниками особистісного зростання учнів.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Перехід сучасної освіти до компетентнісної моделі навчання, орієнтованої на розвиток особистості здобувача освіти та забезпечення його активної участі в навчальному процесі зумовив посилення наукового інтересу до формувального оцінювання як одного із ключових напрямів сучасних педагогічних досліджень. У працях зарубіжних науковців (Maskos et al., 2025) формувальне оцінювання розглядається як безперервний процес отримання й використання інформації про навчальний поступ учнів для коригування освітнього процесу, розвитку їхньої навчальної автономії, мотивації та здатності до самооцінювання. У систематичному огляді К. Maskos із співавторами (2025) проаналізували результати досліджень 2015–2023 років щодо впливу формувального оцінювання на когнітивні та некогнітивні результати навчання з математики. Дослідники встановили, що формувальне оцінювання позитивно впливає й на некогнітивні характеристики учнів. Зокрема, позитивний вплив виявлено щодо підвищення математичної самооцінки, самоефективності, інтересу до навчання, усвідомленого й правильного вибору способів розв'язування математичних завдань, використання складніших стратегій розв'язування задач, а також зменшення рівня математичної тривожності. У колективній монографії «Learning through assessment: An approach towards Self-Directed Learning» (Mentz & Lubbe, Eds., 2021) формувальне оцінювання розглядається не лише як засіб моніторингу навчальних досягнень, а й як засіб особистісного розвитку учнів (розвитку самоефективності, впевненості, метапізнання та агентності) у процесі навчання математики. Особливу увагу приділено іпсативному оцінюванню, яке передбачає порівняння поточних результатів учня з його попередніми досягненнями. Такий підхід зміщує акцент із конкуренції між учнями на індивідуальний прогрес, підтримує мислення зростання, підвищує самооцінку та сприяє розвитку математичної самоефективності. Автори також наголошують, що систематичний і конструктивний зворотний зв'язок допомагає учням

усвідомлювати власний поступ, самостійно виправляти помилки та поступово переходити до більш незалежної навчальної діяльності. У дисертаційному дослідженні «Classroom Formative Assessment. A quest for a practice that enhances students' mathematics performance» (Van den Berg, 2018), формувальне оцінювання розглядається як важливий чинник особистісного розвитку учнів у процесі навчання математики. Marian van den Berg доводить, що ефективне використання зворотного зв'язку сприяє розвитку саморегуляції, навчальної автономії, самоефективності та рефлексивних умінь, оскільки передбачає активну участь учнів в аналізі власних досягнень і використанні отриманих рекомендацій для вдосконалення навчальної діяльності. У книзі «Learning progressions and online formative assessment national initiative. Literature review: formative assessment evidence and practice» колектив авторів систематизують результати багатьох досліджень і показують, які саме інструменти (рубрики, що містять чіткі критерії та описи рівнів виконання завдань, чек-листи, самооцінювання, зворотний зв'язок) забезпечують розвиток цих особистісних якостей школярів (Lane et al., 2019). Отже, у систематичних оглядах і емпіричних дослідженнях обґрунтовується, що використання якісного зворотного зв'язку, самооцінювання, взаємооцінювання, аналізу помилок, чітких критеріїв оцінювання та рефлексивних практик позитивно впливає на математичні досягнення учнів, розвиток їхнього математичного мислення, здатності до саморегульованого навчання та навчальної мотивації.

Аналіз українських наукових джерел засвідчує, що більшість досліджень зосереджена на реалізації формуального оцінювання в математичній освіті (Тарасенкова, 2023; Михайленко, 2022), на впливі формуального оцінювання на формування математичної компетентності (Букалов & Васильєва, 2025; Забранський, 2024; Тютюнник, 2025). Значно менше уваги приділено дослідженню формуального оцінювання як засобу реалізації розвивальної та виховної функцій оцінювання, визначених нормативними документами Міністерства освіти і науки України.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Відповідно до нормативних документів МОН України, оцінювання виконує низку взаємопов'язаних функцій, серед яких особливого значення в сучасній освіті набувають мотиваційно-стимулювальна, розвивальна та виховна. Саме вони забезпечують становлення особистості учня, розвиток його рефлексивності, самостійності, відповідальності та здатності до самовдосконалення. Разом із тим у методиці навчання математики ці аспекти формуального оцінювання ще не набули достатнього теоретичного обґрунтування та методичного забезпечення.

Мета статті – обґрунтувати потенціал формуального оцінювання як засобу особистісного розвитку учнів у процесі навчання математики.

Виклад основного матеріалу. У сучасній педагогіці та психології особистісний розвиток розглядається як процес якісних змін особистості, що охоплює розвиток її мотиваційної, когнітивної, рефлексивної, емоційно-вольової та ціннісної сфер та формування здатності до

саморегуляції, відповідальності, самостійності й самореалізації. У контексті нашого дослідження особистісний розвиток учнів у процесі навчання математики визначаємо як результат реалізації мотиваційно-стимулювальної, розвивальної та виховної функцій формувального оцінювання. Його проявами є позитивні зміни мотиваційної, рефлексивної, емоційно-вольової та ціннісної сфер особистості, розвиток навчальної самостійності, відповідальності, саморегуляції, самоефективності, критичного мислення, наполегливості та здатності усвідомлено керувати власною навчальною діяльністю завдяки систематичному використанню інструментів формувального оцінювання.

Аналіз матеріалів конгресів Європейського товариства досліджень в галузі математичної освіти CERME (<https://erme.site/cerme-proceedings-series/>) засвідчив, що значна частина сучасних досліджень формувального оцінювання ґрунтуються на моделі п'яти ключових стратегій, запропонованій Р. Black, D. Wiliam (2009). Саме ця модель широко використовується як концептуальна основа для аналізу практик впровадження формувального оцінювання у навчання математики: 1) пояснення, розуміння та поширення цілей навчання; 2) організація ефективних навчальних дискусій, запитань і завдань; 3) надання зворотного зв'язку, що сприяє подальшому просуванню учня в навчанні; 4) активація учнів як ресурсів один для одного; 5) активація учнів як суб'єктів власного навчання. У нашому дослідженні цю модель використано як основний аналітичний інструмент для визначення потенціалу кожної стратегії щодо формування окремих особистісних якостей.

Першою складовою моделі формувального оцінювання, запропонованою Р. Black, D. Wiliam, є пояснення, розуміння та поширення навчальних цілей і критеріїв успіху. Її сутність полягає в тому, що здобувачі освіти повинні чітко усвідомлювати, чого вони мають досягти в результаті навчання, які ознаки свідчитимуть про успішне виконання навчального завдання та за якими критеріями оцінюватиметься їхня діяльність. Тобто, суть полягає у відповіді на фундаментальне запитання кожного учня: «Чого я прагну?». Це процес, у якому вчитель і учнівський колектив приходять до спільного розуміння того, що саме має бути вивчено і як виглядає якісний результат (успіх). Стратегія спрямована на те, щоб зробити навчання прозорим і цілеспрямованим (Lemmo, 2023), тобто передбачає подолання «безцільного плавання» (без чітких цілей учні на уроках математики досить часто почуваються кораблем без маршруту, що пливе за вітром) (Kaplan-Can & Haser, 2023) та зміну фокусу із простого розв'язання вправ за алгоритмом (інструментальне розуміння) на розуміння зв'язків та причин чому цей метод працює (реляційне розуміння) (Morselli & Robotti, 2022).

Формулювання цілей може забезпечуватися використанням низки інструментів формувального оцінювання. Серед яких формулювання навчальних цілей зрозумілою для здобувачів мовою (Kaplan-Can & Haser, 2023), використання рубрик та визначення критеріїв успіху (Andrade & Brookhart, 2026), чек-листів, карток досягнень, постерів або схем

(наприклад, цикл моделювання), які наочно демонструють етапи роботи (Wake, 2010), прикладів якісно виконаних робіт (наприклад, MAP, ICCAMS, SMART), де цілі та діагностичні завдання вже інтегровані в структуру уроку (Tutuncu & Hodgen, 2022), а також спільне з учнями обговорення очікуваних результатів навчання. Особливе місце займають рубрики, які не лише визначають критерії оцінювання, а й описують різні рівні їх досягнення, допомагаючи їм співвіднести власний результат із очікуваним (Morselli & Robotti, 2022).

Застосування зазначених інструментів актуалізує низку психолого-педагогічних механізмів, що сприяють особистісному розвитку учнів. Передусім формується розуміння навчальної мети та критеріїв успіху, що сприяє розвитку *внутрішньої мотивації, відповідальності* за результати власної діяльності та *навчальної автономії*. Коли школярі чітко розуміють очікувані результати навчання, навчальна діяльність набуває для них особистісного сенсу. За таких умов вони перестають бути пасивними виконавцями вказівок педагога і стають активними суб'єктами, які свідомо планують свої дії для досягнення поставленої мети (Morselli & Robotti, 2022; Wake, 2010). Таким чином, поступово відбувається перехід від зовнішнього контролю з боку педагога до внутрішнього контролю, що є одним із ключових показників особистісної зрілості школярів (Kaplan-Cap & Haser, 2023). Це також асоціюється зі зниженням рівня математичної тривожності, підвищенням упевненості у власних можливостях, розвитком *самоефективності та впевненості* учнівства (Manzoni та ін., 2025). Якщо критерії оцінювання є зрозумілими, учні здатні оцінювати власний поступ, бачити конкретні досягнення та визначати наступні кроки для вдосконалення. Здатність відстежувати власний поступ створює умови для формування впевненості у можливості досягати кращих результатів завдяки власним зусиллям.

Особливості реалізації цієї складової формувального оцінювання залежать від віку школярів. У 5–6 класах доцільно використовувати прості, наочні критерії успіху, чек-листи, піктограми, «сходінки успіху» та короткі рубрики, які допомагають учням поступово опановувати навички самооцінювання. У 7–9 класах критерії можуть деталізуватися й охоплювати не лише правильність розв'язання, а й логічність міркувань, аргументацію, використання математичної мови та різноманітність способів розв'язання. У старшій школі учнів доцільно залучати до спільного розроблення критеріїв оцінювання, аналізу прикладів виконаних робіт та використання розгорнутих аналітичних рубрик, що сприяє розвитку навчальної автономії, рефлексії та відповідальності за власне навчання.

Друга складова моделі спрямована на організацію ефективних навчальних дискусій, запитань і завдань. Її сутність полягає у створенні таких навчальних ситуацій, де мислення учня стає «видимим» для вчителя, самого учня та його однокласників (Chen та ін., 2025). Це досягається через аналіз їхніх міркувань, способів розв'язання, аргументації та характеру допущених помилок (Mastahon та ін., 2023). У процесі навчання математики ця стратегія моделі формувального оцінювання має особливе значення, оскільки математичні знання

формується у процесі міркування, що дозволяє вчителю «побачити» хід думок дитини і вчасно скоригувати його (Kaplan-Can & Haser, 2023). Дискусії допомагають школярам переходити від простого виконання процедур «за зразком» до глибокого концептуального розуміння – як і чому це працює (Kaplan-Can & Haser, 2023; Morselli & Robotti, 2022). Організація обговорень є важливою для навчання математичним доведенням, де важливим є не лише результат, а й логічна структура аргументу (Morselli & Robotti, 2022).

Реалізації цієї складової моделі формувального оцінювання у процесі навчання математики забезпечується використанням комплексу інструментів формувального оцінювання, які можна об'єднати у кілька груп. Важливу роль відіграють запитання високого рівня, що стимулюють математичне міркування та аргументацію. До них належить: *range-finding questions*, що допомагають виявити попередні знання учнів; *hinge-point questions*, що дозволяють визначити готовність класу до переходу до наступного етапу навчання (Kaplan-Can & Haser, 2023); відкриті запитання «чому?», «як?», що спонукають не лише до отримання правильної відповіді, а й до пояснення способу міркування (Mastahon та ін., 2023). Другу групу інструментів становлять спеціально сконструйовані математичні завдання, спрямовані на виявлення глибини розуміння навчального матеріалу. До них належать завдання на генерування прикладів (*Example Eliciting Tasks*), у яких учні самостійно створюють математичні об'єкти із заданими властивостями (Barana & Marchisio, 2019), завдання з кількома способами розв'язання (*Multiple Solution Tasks*), що розвивають гнучкість математичного мислення (Levav-Waynberg & Leikin, 2009), а також *Silent Video Tasks*, під час виконання яких школярі коментують математичні процеси, представлені у відеофрагментах без звукового супроводу (Barana & Marchisio, 2019). До третьої групи інструментів віднесемо цифрові технології. Зокрема, SMART-тести дають змогу оперативно виявляти типові помилки під час вивчення конкретної теми, метод *Spot-and-show* передбачає колективний аналіз учнівських робіт шляхом їх демонстрації на екрані (Chen та ін., 2025), використання голосових повідомлень у цифрових середовищах (наприклад, *Mastering Math*) дозволяє фіксувати не лише кінцеву відповідь, а й пояснення логіки виконання завдання (Hankeln та ін., 2025). Платформа *Teacher Desmos* дозволяє створювати інтерактивні набори слайдів із завданнями, де вчитель може бачити процес розв'язання в реальному часі (Букалов & Васильєва, 2025), хмарні сервіси такі як *Google Docs*, *Sheets*, *Slides*, *Canva*, *Padlet* та *GeoGebra* доцільно використовувати для організації колективної роботи на уроці (Хутченко, 2024). Важливими засобами реалізації цієї стратегії є також педагогічні прийоми оперативного отримання зворотної інформації. Серед них ефективними є *Mini Whiteboards* (міні білі дошки), які дають можливість швидко оцінити відповіді всього класу, а також *Concept Cartoons* («концептуальні мультфільми»), що ініціюють навчальні дискусії, спонукають учнів аргументувати власну позицію, критично аналізувати різні точки зору та колективно будувати математичні пояснення.

Реалізація цієї складової моделі формувального оцінювання створює умови для розвитку низки особистісних якостей. Передусім удосконалюється *критичне та аналітичне мислення*, оскільки учні навчаються аналізувати власні та чужі математичні міркування, оцінювати обґрунтованість аргументів і робити висновки на основі доказів (Barana & Marchisio, 2019). Постійне залучення до математичних дискусій сприяє розвитку *комунікативної компетентності*, уміння чітко формулювати математичні судження, аргументовано відстоювати власну позицію та конструктивно сприймати альтернативні погляди (Morselli & Robotti, 2022). Водночас аналіз власних способів розв'язання та їх порівняння з іншими підходами розвиває *рефлексивність і здатність до саморегуляції* навчальної діяльності (Morselli & Robotti, 2022). Використання відкритих завдань, завдань на створення власних прикладів або пошук кількох способів розв'язання стимулює *креативність і гнучкість* математичного мислення (Barana & Marchisio, 2019). Крім того, можливість публічно представляти власні ідеї, отримувати конструктивний зворотний зв'язок і спостерігати власний поступ у навчанні сприяє розвитку *самоефективності, впевненості* у власних силах і позитивного ставлення до вивчення математики (Morselli & Robotti, 2022).

Особливості реалізації цієї складової визначаються віковими можливостями здобувачів освіти. У 5–6 класах доцільно використовувати візуальні моделі, маніпулятивні матеріали, Concept Cartoons, короткі усні пояснення та цифрові застосунки, що допомагають учням поступово переходити від наочно-образного до словесно-логічного обґрунтування математичних дій. У 7–9 класах основна увага переноситься на розвиток уміння аргументувати математичні твердження, аналізувати різні способи розв'язання задач, обговорювати властивості математичних об'єктів, а також будувати логічні доведення (Morselli & Robotti, 2022; Kaplan-Can & Haser, 2023). У старшій школі ефективним є використання складніших відкритих задач, організація дискусій, спрямованих на порівняння різних математичних моделей, узагальнення способів розв'язання й розширення простору можливих прикладів, що сприяє розвитку математичної самостійності та готовності до навчання впродовж життя (Barana & Marchisio, 2019).

Третьою складовою моделі формувального оцінювання є надання зворотного зв'язку, що сприяє подальшому просуванню учня в навчанні. Сучасні дослідження свідчать, що найбільшу ефективність має зворотний зв'язок, який є своєчасним, конкретним, зрозумілим, доброзичливим і зорієнтованим на процес виконання завдання, а не на особистість учня. Такий підхід дозволяє змістити акцент із констатації помилки на пошук шляхів її виправлення, сприяючи формуванню установки на розвиток (growth mindset) та переконанню, що успіх є результатом зусиль, а не вроджених здібностей. Його сутність полягає у наданні такої інформації, яка допомагає учням змінити власне мислення, способи діяльності або навчальну поведінку для досягнення визначених навчальних цілей (Kaplan-Can & Haser, 2023). На відміну від підсумкового оцінювання, зворотний зв'язок спрямований

на скорочення розриву між поточним рівнем розуміння навчального матеріалу та очікуваним результатом (Mastahon та ін., 2023). Ефективний зворотний зв'язок передбачає послідовне отримання відповідей на три взаємопов'язані запитання: «Куди я рухаюся?» (feed-up), «Як я просуваюся?» (feed-back) та «Яким має бути мій наступний крок?» (feed-forward) (Lemmo, 2023).

Реалізація цієї складової забезпечується використанням комплексу педагогічних і цифрових інструментів формуального оцінювання. Серед цифрових технологій ефективними є системи автоматизованого оцінювання SMART, які надають учителю інформацію про рівень засвоєння навчального матеріалу та типові помилки учнів (Stemmer et al., 2025). Системи Möbius і STACK забезпечують інтерактивний покроковий зворотний зв'язок, допомагаючи поступово виправити помилки та знайти правильний спосіб розв'язання (Barana & Marchisio, 2019). Використання цифрового середовища Mastering Math із можливістю запису голосових пояснень дозволяє педагогу аналізувати не лише кінцеву відповідь, а й логіку математичних міркувань учнівства (Hankeln та ін., 2025), миттєвий зворотний зв'язок в Google Docs дозволяє учителю коментувати записи школярів в реальному часі під час їх створення (Букалов & Васильєва, 2025). Важливими педагогічними прийомами є також усний формувальний зворотний зв'язок, що реалізується через систему навідних запитань і підказок замість повідомлення готової відповіді (Manzoni та ін., 2025), використання Exit tickets («вихідних квитків») для визначення труднощів наприкінці уроку (Andersson & Erixon, 2022), а також різноманітних форм візуалізації індивідуального поступу, які демонструють рівень сформованості окремих математичних умінь без зведення результатів лише до бальної оцінки (Lemmo, 2023).

У процесі навчання математики ця складова моделі має особливе значення, оскільки забезпечує своєчасне виявлення й корекцію математичних помилок та хибних уявлень. Зокрема, помилка розглядається не як ознака неуспішності, а як джерело інформації про особливості математичного мислення учнівства (Manzoni та ін., 2025). Аналіз допущених помилок дає змогу виявити типові труднощі під час вивчення конкретних тем, своєчасно скоригувати їх і запобігти формуванню стійких хибних уявлень (Stemmer et al., 2025; Barana & Marchisio, 2019). Водночас якісний зворотний зв'язок сприяє переходу від механічного застосування алгоритмів до реляційного розуміння математичних понять, коли учні усвідомлюють не лише спосіб виконання дії, а й причини, що лежать в її основі (Stemmer et al., 2025). Якісний зворотний зв'язок сприяє розвитку особистісних якостей, необхідних для самостійної діяльності. Передусім формується *самоефективність*, оскільки учні переконуються у власній здатності покращувати результати завдяки цілеспрямованим зусиллям (Manzoni та ін., 2025). Також розвиваються *навчальна автономія* та *суб'єктність*, що проявляються у здатності самостійно визначати наступні кроки власного навчання й приймати рішення щодо способів досягнення навчальних цілей (Dias & Santos, 2015). Постійне

осмислення власних досягнень і труднощів сприяє розвитку *рефлексивності*, а усвідомлення особистої *відповідальності* за навчальний поступ формує *відповідальне ставлення* до власної освітньої діяльності (Morselli & Robotti, 2022). Розвиток самоефективності, автономії та рефлексивності безпосередньо пов'язаний із посиленням внутрішньої навчальної мотивації. Коментарі педагогів, що підкреслюють індивідуальний прогрес, підтримують відчуття компетентності та успіху, допомагають учням усвідомити цінність власних досягнень і стимулюють бажання вдосконалювати результати. Водночас відсутність порівняння з іншими учнями створює психологічно безпечне освітнє середовище, у якому головним критерієм успіху стає особистий поступ.

Врахування вікових особливостей учнівства визначає специфіку реалізації цієї складової моделі формуального оцінювання. Зокрема, у 5–6 класах доцільно використовувати переважно усний зворотний зв'язок, використання наочних моделей, маніпулятивних матеріалів і візуальних засобів, що допомагають формувати базові математичні уявлення та числове чуття (Stemmer et al., 2025). У 7–9 класах варто увагу приділяти розвитку навичок саморегуляції, активніше використовувати цифрові діагностичні інструменти та письмовий формувальний зворотний зв'язок (Stemmer et al., 2025). У старшій школі доцільним є застосування інтерактивних цифрових систем оцінювання, які забезпечують індивідуалізований зворотний зв'язок, підтримують самостійне опрацювання помилок і сприяють розвитку навчальної автономії та готовності до навчання впродовж життя (Barana & Marchisio, 2019).

Четвертою складовою моделі формуального оцінювання є активація учнів як ресурсів один для одного. Її сутність полягає у створенні такого освітнього середовища, у якому учні перестають бути лише пасивними отримувачами знань від педагога і стають активними учасниками навчального процесу, здатними підтримувати навчання одне одного (Lemmo, 2023). Це передбачає організацію спільної діяльності, під час якої школярі обмінюються математичними ідеями, аналізують способи розв'язання, здійснюють взаємооцінювання та надають конструктивний зворотний зв'язок відповідно до визначених критеріїв успіху. Водночас обговорення різних підходів допомагає усвідомити, що математична задача нерідко має кілька правильних способів розв'язання, а аналіз помилок є важливим засобом поглиблення математичного розуміння (Chen та ін., 2025). Пояснюючи математичні поняття власними словами, школярі не лише допомагають іншим, а й самі глибше осмислюють зміст навчального матеріалу, опановуючи математичний дискурс і вдосконалюючи навички аргументації (Morselli & Robotti, 2022). Таким чином відповідальність за навчання частково переноситься від педагога до учнівської спільноти (Chen та ін., 2025; Andersson & Erixon, 2022).

Реалізація зазначеної стратегії забезпечується використанням комплексу педагогічних і цифрових інструментів формуального оцінювання. Одним із найефективніших

педагогічних прийомів є взаємооцінювання (Peer Assessment), під час якого учні аналізують роботи однокласників відповідно до заздалегідь визначених критеріїв успіху та надають конструктивні рекомендації щодо їх удосконалення (Wake, 2010). Поширеними є також робота в парах і малих групах над проблемними математичними задачами (Barana & Marchisio, 2019), а також використання методу «липких папірців», коли позитивні сторони роботи та рекомендації щодо її вдосконалення фіксуються за допомогою кольорових наліпок (Wake, 2010). Серед цифрових інструментів доцільно використовувати технологію Spot-and-show, що передбачає демонстрацію різних учнівських способів розв'язання для їх колективного аналізу (Chen та ін., 2025), Sherpa-at-work, у межах якої один із учнів демонструє процес розв'язання задачі в цифровому середовищі для всього класу (Chen та ін., 2025), а також асинхронні математичні дискусії на платформах типу Padlet, які розширюють можливості спільного обговорення за межами уроку.

Використання описаних інструментів створює умови для спільного конструювання знань, що ґрунтується на взаємодії та навчанні однолітків. Використання зрозумілої для школярів «мови однолітків» полегшує засвоєння складних математичних понять (Wake, 2010), а необхідність пояснювати власні міркування іншим сприяє їх глибшому осмисленню (Wake, 2010). Водночас поступово змінюється характер взаємовідносин у класі: традиційна модель «педагог – джерело знань» трансформується у співпрацю, де кожен учень можуть виступати як суб'єкти навчання і джерело корисної інформації для інших. Така взаємодія формує атмосферу довіри, відкритості до обговорення та психологічної безпеки, у якій школярі не бояться висловлювати власні припущення, ставити запитання та аналізувати помилки (Wake, 2010).

Застосування взаємооцінювання та навчальної співпраці забезпечує умови для розвитку низки особистісних якостей. Передусім формується *соціальна відповідальність*, оскільки учні усвідомлюють власний внесок у спільний результат навчальної діяльності (Chen та ін., 2025). Постійна взаємодія під час обговорення математичних задач сприяє розвитку *комунікативної компетентності*, уміння аргументовано висловлювати власну думку, уважно слухати співрозмовника та конструктивно вести навчальний діалог (Dias & Santos, 2015). Аналіз різних способів розв'язання задач розвиває *критичне мислення*, здатність оцінювати логічність математичних міркувань і порівнювати альтернативні підходи (Chen та ін., 2025). Спільне виконання навчальних завдань також сприяє формуванню емпатії, готовності до взаємодопомоги та продуктивної співпраці. Крім того, успішний досвід допомоги однокласникам підвищує *самоефективність і впевненість* учнів у власних математичних можливостях (Manzoni та ін., 2025).

Особливості реалізації цієї складової визначаються віковими можливостями здобувачів освіти. У 5–6 класах доцільно організовувати спільну роботу з використанням наочних моделей, маніпулятивних матеріалів і простих форм взаємооцінювання, що допомагають

формувати навички співпраці та конструктивного зворотного зв'язку (Wake, 2010). У 7–9 класах основна увага приділяється обговоренню логіки математичних міркувань, взаємному аналізу способів розв'язання задач і доведень, що сприяє подоланню математичної тривожності та розвитку аргументованого математичного мовлення (Morselli & Robotti, 2022). У старшій школі ефективним є використання складних групових дослідницьких завдань, у яких учасники виконують різні етапи розв'язання, спільно аналізують отримані результати, узагальнюють закономірності та колективно будують математичні висновки (Barana & Marchisio, 2019).

П'ятою складовою моделі формувального оцінювання є активація учнів як суб'єктів власного навчання. Сутність цієї стратегії полягає у поступовій передачі відповідальності за процес навчання від педагога до учня (Kaplan-Cap & Haser, 2023). У результаті школярі перестають бути пасивними виконавцями навчальних завдань і набувають здатності самостійно визначати навчальні цілі, контролювати власний поступ, оцінювати рівень сформованості знань і приймати рішення щодо подальших дій для досягнення запланованих результатів (Kaplan-Cap & Haser, 2023). Самостійне планування способів розв'язання, критичний аналіз отриманих результатів і вибір найбільш доцільної стратегії сприяють формуванню реляційного розуміння математичних понять (Morselli & Robotti, 2022), розвитку здатності оцінювати правильність власних міркувань і використовувати помилки як основу для подальшого вдосконалення способів діяльності (Morselli & Robotti, 2022).

Застосування інструментів, спрямованих на розвиток самооцінювання, рефлексії та самоконтролю забезпечує реалізацію цієї складової. До них належать рефлексивні завдання типу Looking back, які спонукають учнів аналізувати власні труднощі, досягнення та визначати напрями подальшого навчання (Morselli & Robotti, 2022). Ефективними є також рефлексивні щоденники (Learning logs), у яких школярі фіксують власний поступ, оцінюють ефективність використаних способів розв'язання та визначають індивідуальні освітні потреби (Barana & Marchisio, 2019). Важливу роль відіграють цифрові платформи самооцінювання (SMART, Möbius, STACK), що забезпечують оперативний автоматизований зворотний зв'язок і надають можливість самостійно коригувати власну діяльність у зручному темпі (Barana & Marchisio, 2019). Доцільним є також використання цифрових засобів моніторингу індивідуального прогресу, які дозволяють учням відстежувати динаміку розвитку окремих математичних умінь і планувати подальшу навчальну діяльність.

Реалізація цієї складової створює умови для розвитку особистісних якостей, що характеризують зрілу й самостійну особистість. Передусім формується *навчальна агентність*, яка проявляється у здатності самостійно керувати власною освітньою діяльністю та приймати відповідальні рішення щодо її організації. Також формується *соціальна відповідальність*, оскільки учні усвідомлюють власний внесок у спільний результат навчальної діяльності та відповідальність за успіх колективу та власне навчання (Chen та ін.,

2025). Колективна робота над математичною задачею сприяє вдосконаленню *комунікативної компетентності*, формуються уміння аргументовано висловлювати власну думку, уважно слухати співрозмовників і конструктивно вести навчальний діалог (Dias & Santos, 2015; Wake, 2010). Спільне виконання навчальних завдань також сприяє формуванню *емпатії*, готовності до взаємодопомоги та продуктивної співпраці. Аналіз різних способів розв'язання та оцінювання математичних міркувань однокласників розвивають *критичне мислення*, здатність зіставляти альтернативні підходи й обґрунтовано оцінювати їх ефективність (Chen та ін., 2025; Barana & Marchisio, 2019). Успішний досвід підтримки однокласників підвищує *самоефективність*, зміцнює впевненість у власних математичних можливостях і позитивне ставлення до власної навчальної діяльності (Manzoni та ін., 2025).

Особливості реалізації цієї складової визначаються рівнем сформованості навичок саморегуляції. У 5–6 класах доцільно використовувати прості засоби самоперевірки, візуалізації особистого поступу та цифрові застосунки, які допомагають поступово формувати навички самооцінювання (Wake, 2010). У 7–9 класах ефективним є систематичне використання рефлексивних звітів, самооцінювання способів розв'язання задач і аналізу власних навчальних стратегій (Morselli & Robotti, 2022). У старшій школі учнів доцільно залучати до самостійного планування освітньої діяльності, вибору оптимальних способів навчання, поглибленої метакогнітивної рефлексії та оцінювання власних досягнень, що забезпечує готовність до самостійного навчання впродовж життя (Barana & Marchisio, 2019).

Висновки. Узагальнення результатів досліджень дає підстави стверджувати, що реалізація особистісного потенціалу формувального оцінювання в навчанні математики досягається за умови реалізації п'яти взаємопов'язаних педагогічних орієнтирів: прозорості цілей і критеріїв оцінювання; діалогічності навчальної взаємодії; розвитку через конструктивний зворотний зв'язок; партнерської участі учнівства в оцінюванні; поступової передачі відповідальності за навчання самому учневі. Комплексна реалізація зазначених принципів забезпечує перехід від оцінювання результатів навчання до оцінювання заради особистісного розвитку. Отже, формувальне оцінювання у навчанні математики доцільно розглядати не як сукупність окремих методичних прийомів, а як цілісну педагогічну систему, що забезпечує поступовий перехід від зовнішнього керування навчальною діяльністю до розвитку самостійної, відповідальної та здатної до саморозвитку особистості. Саме в цьому, на нашу думку, полягає його визначальна цінність для сучасної математичної освіти, зорієнтованої на особистісний розвиток учнівства.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. При написанні статті використовувалися інструменти штучного інтелекту: ChatGPT, NotebookLM. Вони застосовувалися **виключно** для мовної корекції текстів (ChatGPT) і для перекладу іноземних джерел (ChatGPT, NotebookLM). Представлені у статті результати та висновки є власним інтелектуальним внеском авторів.

Список використаних джерел

- Andersson, C., & Erixon, E.-L. (2022). Formative assessment – in the hands of beginning mathematics teachers. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12) (p. 3748). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/CERME12/hal-03753397v1>
- Andrade, H.L., & Brookhart, S.M. (2026). Using Rubrics for Teaching and Learning (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003582649>
- Barana A., Marchisio M. (2019). Strategies of formative assessment enacted through automatic assessment in blended modality. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. (hal-02430513) <https://hal.science/CERME11/hal-02430513v1>
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>
- Chen, M., Bos, R., Doorman, M., & Drijvers, P. (2025). Exploring instrumental orchestration practices for formative assessment through digital technology. In M. Bosch et al. (Eds.), Proceedings of CERME14 (p. 3550). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/hal-05298045v1>
- Dias, P., & Santos, L. (2015). An assessment practice that teacher José uses to promote self-assessment of mathematics learning. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9) (pp. 3002–3008). European Society for Research in Mathematics Education. <https://hal.science/hal-01289723>
- Hankeln, C., Prediger, S., Kroehne, U., & Hahn, S. (2025). Students' reactions to speech input requests in a digital formative assessment of conceptual understanding. In M. Bosch et al. (Eds.), Proceedings of CERME14 (p. 3583). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/hal-05298067v1>
- Kaplan-Can, G., & Haser, Ç. (2023). A case of a preservice middle school mathematics teacher's planned and enacted formative assessment strategies. In P. Drijvers et al. (Eds.), Proceedings of CERME13 (p. 3966). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/CERME13/hal-04413528v1>
- Lane, R., Parrila, R., Bower, M., Bull, R., Cavanagh, M., Forbes, A., Jones, T., Leaper, D., Khosronejad, M., Pellicano, L., Powell, S., Ryan, M., & Skrebneva, I. (2019). Formative Assessment: Evidence and Practice Literature Review. https://www.researchgate.net/profile/Tiffany-Jones-2/publication/341397802_Lane_R_Parrila_R_Bower_M_Bull_R_Cavanagh_M_Forbes_A_Jones_T_Leaper_D_Khosronejad_M_Pellicano_L_Powell_S_Ryan_M_and_Skrebneva_I_2019_Formative_Assessment_Evidence_and_Practice_Literature_Review_AITSL_M/links/5ebe32f9299bflc09abc2f87/Lane-R-Parrila-R-Bower-M-Bull-R-Cavanagh-M-Forbes-A-Jones-T-Leaper-D-Khosronejad-M-Pellicano-L-Powell-S-Ryan-M-and-Skrebneva-I-2019-Formative-Assessment-Evidence-and-Practice.pdf
- Lemmo A. (2023) Mathematical written tests as formative assessment practice. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest, Hungary. (hal-04413550) <https://hal.science/CERME13/hal-04413550v1>
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: a tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In Proceedings of CERME6. <https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-11-levav-leikin.pdf>
- Macmahon A.L., Lyubinskaya I. (2023). A framework for secondary mathematics technology-enhanced formative assessment (TEFA) literacy. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest, Hungary. (hal-04412078) <https://hal.science/CERME13/hal-04412078v1>

- Manzoni V., Regola S., Giberti Ch.(2025). How can the prison context change teachers' perspective and practices about mathematic assessment?. Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14), Free University of Bozen-Bolzano; ERME, Feb 2025, Bozen-Bolzano, Italy. (hal-05298216) <https://hal.science/hal-05298216v1>
- Maskos, K., Schulz, A., Oeksuez, S.S. et al. (2025) Formative Assessment in Mathematics Education: A Systematic Review. *ZDM Mathematics Education* 57, 679–693. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01696-x>
- Mentz, E., & Lubbe, A. (Eds.). (2021). Learning through assessment: An approach towards Self-Directed Learning (NWU Self-Directed Learning Series, Vol. 7). AOSIS Publishing. <https://books.aosis.co.za/index.php/ob/catalog/book/280>
- Morselli, F., & Robotti, E. (2022). Looking back for understanding: formative assessment strategies and inclusive activities for conjecturing and proving. In J. Hodgen et al. (Eds.), Proceedings of CERME12 (p. 3867). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/CERME12/hal-03753457v1>
- Stemmer, A., Klingbeil, K., & Barzel, B. (2025). Teacher professionalisation through the use of a digital diagnostic tool in settings with different forms of additional support. In Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14). European Society for Research in Mathematics Education. <https://hal.science/hal-05284537>
- Tutuncu, S., & Hodgen, J. (2022). An Analysis of Educative Curriculum Materials for Formative Assessment. In J. Hodgen et al. (Eds.), Proceedings of CERME12 (p. 4048). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/CERME12/hal-03753625v1>
- Van den Berg, M. (2018). Classroom Formative Assessment: A quest for a practice that enhances students' mathematics performance [Doctoral dissertation, University of Groningen]. GION education/research. <https://www.nko.nl/sites/nro/files/migrate/proefschrift-marian-van-den-berg.pdf>
- Wake, G. (2010). Modelling and formative assessment pedagogies mediating change in actions of teachers and learners in mathematics classrooms. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6) (pp. 2086–2095). Institut Français de l'Éducation. <https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg11-05-wake.pdf>
- Букалов, Л. Л., & Васильева, Д. В. (2025). Формувальне оцінювання у навчанні математики : методичний посібник. К.: Видавничий дім «Освіта», 2025. — 31 с. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/744648/1/%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%94%D0%B2%D0%B0_%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B5%20%D0%BE%D1%86%D1%96%D0%BD%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F.pdf
- Забранський, В. Я. (2024). Стратегії формувального оцінювання під час навчання математики у 5-6 класах. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 1, 33-41. <https://vspu.net/didmath/index.php/journal/article/view/3> DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-1-33-41>
- Михайленко, Л. Ф. (2022). Сучасні підходи до впровадження формувального оцінювання на уроках математики. *Фізико-математична освіта*, 37(5), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-006>
- Тарасенкова, Н. А. (2023). Засоби формувального оцінювання у навчанні математики. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*, 2(22). https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/739564/1/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%82%D1%8F_%D0%A2%D0%B0%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0_2023.pdf
- Тютюнник, Д. (2024). Теорія і практика формувального оцінювання на уроках геометрії: огляд закордонних публікацій. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 70-81. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-70-81>
- Хутченко, І. (2024). Сучасні цифрові технології для реалізації формувального оцінювання на уроках математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 82-94. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-82-94>

References

- Andersson, C., & Erixon, E.-L. (2022). Formative assessment – in the hands of beginning mathematics teachers. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (p. 3748). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/CERME12/hal-03753397v1>
- Andrade, H.L., & Brookhart, S.M. (2026). *Using Rubrics for Teaching and Learning* (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003582649>
- Barana A., Marchisio M. (2019). Strategies of formative assessment enacted through automatic assessment in blended modality. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. (hal-02430513) <https://hal.science/CERME11/hal-02430513v1>
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>
- Chen, M., Bos, R., Doorman, M., & Drijvers, P. (2025). Exploring instrumental orchestration practices for formative assessment through digital technology. In M. Bosch et al. (Eds.), *Proceedings of CERME14* (p. 3550). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/hal-05298045v1>
- Dias, P., & Santos, L. (2015). An assessment practice that teacher José uses to promote self-assessment of mathematics learning. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 3002–3008). European Society for Research in Mathematics Education. <https://hal.science/hal-01289723>
- Hankeln, C., Prediger, S., Kroehne, U., & Hahn, S. (2025). Students' reactions to speech input requests in a digital formative assessment of conceptual understanding. In M. Bosch et al. (Eds.), *Proceedings of CERME14* (p. 3583). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/hal-05298067v1>
- Kaplan-Can, G., & Haser, Ç. (2023). A case of a preservice middle school mathematics teacher's planned and enacted formative assessment strategies. In P. Drijvers et al. (Eds.), *Proceedings of CERME13* (p. 3966). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/CERME13/hal-04413528v1>
- Lane, R., Parrila, R., Bower, M., Bull, R., Cavanagh, M., Forbes, A., Jones, T., Leaper, D., Khosronejad, M., Pellicano, L., Powell, S., Ryan, M., & Skrebneva, I. (2019). *Formative Assessment: Evidence and Practice Literature Review*. https://www.researchgate.net/profile/Tiffany-Jones-2/publication/341397802_Lane_R_Parrila_R_Bower_M_Bull_R_Cavanagh_M_Forbes_A_Jones_T_Leaper_D_Khosronejad_M_Pellicano_L_Powell_S_Ryan_M_and_Skrebneva_I_2019_Formative_Assessment_Evidence_and_Practice_Literature_Review_AITSL_M/links/5ebe32f9299bffc09abc2f87/Lane-R-Parrila-R-Bower-M-Bull-R-Cavanagh-M-Forbes-A-Jones-T-Leaper-D-Khosronejad-M-Pellicano-L-Powell-S-Ryan-M-and-Skrebneva-I-2019-Formative-Assessment-Evidence-and-Practice.pdf
- Lemmo A. (2023) Mathematical written tests as formative assessment practice. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest, Hungary. (hal-04413550) <https://hal.science/CERME13/hal-04413550v1>
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: a tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In *Proceedings of CERME6*. <https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-11-levav-leikin.pdf>
- Macmahon A.L., Lyublinskaya I. (2023). A framework for secondary mathematics technology-enhanced formative assessment (TEFA) literacy. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest, Hungary. (hal-04412078) <https://hal.science/CERME13/hal-04412078v1>
- Manzoni V., Regola S., Giberti Ch.(2025). How can the prison context change teachers' perspective and practices about mathematic assessment?. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*, Free University of Bozen-Bolzano; ERME, Feb 2025, Bozen-Bolzano, Italy. (hal-05298216) <https://hal.science/hal-05298216v1>
- Maskos, K., Schulz, A., Oeksuez, S.S. et al. (2025) Formative Assessment in Mathematics Education: A Systematic Review. *ZDM Mathematics Education* 57, 679–693. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01696-x>

- Mentz, E., & Lubbe, A. (Eds.). (2021). Learning through assessment: An approach towards Self-Directed Learning (NWU Self-Directed Learning Series, Vol. 7). AOSIS Publishing. <https://books.aosis.co.za/index.php/ob/catalog/book/280>
- Morselli, F., & Robotti, E. (2022). Looking back for understanding: formative assessment strategies and inclusive activities for conjecturing and proving. In J. Hodgen et al. (Eds.), Proceedings of CERME12 (p. 3867). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/CERME12/hal-03753457v1>
- Stemmer, A., Klingbeil, K., & Barzel, B. (2025). Teacher professionalisation through the use of a digital diagnostic tool in settings with different forms of additional support. In Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14). European Society for Research in Mathematics Education. <https://hal.science/hal-05284537>
- Tutuncu, S., & Hodgen, J. (2022). An Analysis of Educative Curriculum Materials for Formative Assessment. In J. Hodgen et al. (Eds.), Proceedings of CERME12 (p. 4048). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. <https://hal.science/CERME12/hal-03753625v1>
- Van den Berg, M. (2018). Classroom Formative Assessment: A quest for a practice that enhances students' mathematics performance [Doctoral dissertation, University of Groningen]. GION education/research. <https://www.nko.nl/sites/nro/files/migrate/proefschrift-marian-van-den-berg.pdf>
- Wake, G. (2010). Modelling and formative assessment pedagogies mediating change in actions of teachers and learners in mathematics classrooms. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6) (pp. 2086–2095). Institut Français de l'Éducation. <https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg11-05-wake.pdf>
- Bukalov, L. L., & Vasyliieva, D. V. (2025). [Formative assessment in mathematics education: Methodological guide]. Vydavnychyi dim «Osvita». https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/744648/1/%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%94%D0%B2%D0%B0_%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B5%20%D0%BE%D1%86%D1%96%D0%BD%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F.pdf
- Khutchenko, I. (2024). [Modern digital technologies for implementing formative assessment in mathematics lessons]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii* [in Ukrainian], (2), 82–94. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-82-94>
- Mykhailenko, L. F. (2022). [Modern approaches to implementing formative assessment in mathematics lessons]. *Fizyko-matematychna osvita* [in Ukrainian], 37(5), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-006>
- Taraskenkova, N. A. (2023). [Tools of formative assessment in mathematics education]. *Aktualni pytannia pryrodnycho-matematychnoi osvity* [in Ukrainian], (2)(22). https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/739564/1/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%82%D1%8F_%D0%A2%D0%B0%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0_2023.pdf
- Tiutiunyk, D. (2024). [Theory and practice of formative assessment in geometry lessons: A review of international publications]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii* [in Ukrainian], (2), 70–81. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-70-81>
- Zabranskyi, V. Ya. (2024). [Strategies of formative assessment in teaching mathematics in Grades 5–6]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii* [in Ukrainian], (1), 33–41. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-1-33-41>

Отримано / Received 08.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 16.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 373.5.016:519.2(73)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-67-78

Робота з даними як засіб формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи: огляд американського досвіду

Роксолана Мілян

Relish Labs LLC (Home Chef), США

E-mail: roksolana.milian@gmail.comORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4568-2845>

Анотація. Стаття присвячена проблемі розширення методичного інструментарію формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи засобами роботи з даними. Обґрунтовано, що статистичне мислення є не відокремленою навчальною лінією, а виявом тих самих логічних операцій – аналізу, синтезу, порівняння, класифікації, узагальнення, доведення та обґрунтування, – які утворюють когнітивне ядро логічного складника математичної компетентності. Грамотність у роботі з даними є ключовою вимогою сучасного ринку праці, що надає навчання цих операцій безпосереднього мотиваційного горизонту для учнів. На основі аналізу американського досвіду – керівництва для оцінювання та навчання зі статистичної освіти GAISE, стандартів CCSS (Common Core State Standards), досліджень Wild і Pfannkuch, Garfield і Ben-Zvi – показано, що дані є унікально продуктивним середовищем для формування всіх чотирьох компонентів логічного складника (мотиваційно-ціннісної, когнітивної, діяльної, рефлексивно-оцінної). Розроблено таблицю відповідності логічних операцій вимірам статистичного мислення та показникам сформованості логічного складника, яка узгоджує американські підходи з чотирикомпонентною структурою логічного складника, обґрунтованою в попередніх дослідженнях автора. Запропоновано систему з п'яти контекстних завдань для учнів, що моделюють реальні життєві ситуації – роботу із соціологічними, ціновими, ігровими та антропометричними даними – і орієнтовані на різні логічні операції: порівняння, класифікацію, синтез, доведення. Сформульовано методичні рекомендації для вчителів математики основної школи.

Ключові слова: аналіз даних, грамотність у роботі з даними, компетентнісний підхід, логічний складник математичної компетентності, методика навчання математики, основна школа, статистичне мислення, система задач.

UDC 373.5.016:519.2(73)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-67-78

Data-Based Work and the Logical Component of Mathematical Competence: The American Experience

Roksolana Milian

Relish Labs LLC (DBA Home Chef), USA

E-mail: roksolana.milian@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4568-2845>

Abstract. This article addresses the problem of expanding the methodological toolkit for forming the logical component of basic school students' mathematical competence through data-based work. It is substantiated that statistical thinking is not a separate strand of instruction but a manifestation of the same logical operations – analysis, synthesis, comparison, classification, generalization, proof, and justification – that form the cognitive core of the logical component of mathematical competence. Data literacy is a key requirement of the modern labor market, which gives the teaching of these operations a direct motivational horizon for students. Based on an analysis of American experience – the Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE), the Common Core State Standards (CCSS), and the research of Wild and Pfannkuch, Garfield and Ben-Zvi – it is shown that data constitute a uniquely productive environment for forming all four components of the logical component (motivational-value, cognitive, activity-based, and reflective-evaluative). A correspondence table linking logical operations, dimensions of statistical thinking, and indicators of the logical component was developed, aligning American approaches with the author's own four-component framework. A system of five contextual tasks is proposed, modeling real situations – sociological, price, game-based, and anthropometric data – and targeting different logical operations: comparison, classification, synthesis, and proof. Methodological recommendations for basic school mathematics teachers are formulated.

Keywords: data analysis, data literacy, competence-based approach, logical component of mathematical competence, methodology of teaching mathematics, basic school, statistical thinking, system of tasks.

Problem Statement. The ability to think critically and make data-driven decisions has become not only an educational goal but also a key requirement of the modern labor market. In the fields of data analytics, marketing, healthcare, and public administration, professionals are expected to be able to investigate, analyze, and generalize data and justify conclusions – that is, to perform precisely those logical operations whose development is the goal of teaching mathematics in basic school. This means that forming the logical component of mathematical competence through data-based work not only aligns with the goals of Ukrainian schooling but also directly prepares students for genuine participation in today's information society.

We have substantiated the logical component of basic school students' mathematical competence in our previous research (Milian, 2021) as a dynamic combination of abilities that unites understanding of the logic of events, logical skills, and experience in using them, necessary for carrying out mathematical and/or personally meaningful productive activity. The structure of the logical component is formed by the unity of the motivational-value, cognitive, activity-based, and reflective-evaluative components. A specialized system of tasks has been identified as the main means of forming it (Milian, 2021). At the same time, the potential of data and statistics as an environment for developing the logical component of mathematical competence requires further methodological reflection. In this context, approaches presented in the American scientific-methodological literature are of interest, where working with data and statistics is considered an important resource for developing students' logical and mathematical thinking. An analysis of these approaches is presented in this article.

Analysis of Sources and Recent Research. The problem of forming students' mathematical competence has been studied by many Ukrainian scholars, including M. S. Holovan, O. I. Matiash, S. A. Rakov, S. O. Skvortsova, N. A. Tarasenkova, and others. An analysis of foreign research on forming students' logical competence was carried out in our earlier work (Milian, 2020). Notably, research in this direction is actively continuing: a recent study by O. Matiash and I. Velbitskaya conducted a comparative analysis of American technologies for developing primary school students' logical-mathematical thinking, demonstrating continuity of approaches to developing logical thinking between primary and basic school (Matiash & Velbitskaya, 2025). Within this article, we focus on approaches to developing statistical thinking presented in the works of American researchers C. Wild and M. Pfannkuch, J. Garfield and D. Ben-Zvi, C. Franklin et al., and C. Langrall et al., examining them through the lens of the logical component of students' mathematical competence.

Key Approaches of the American Scientific-Methodological Tradition. The Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) (Franklin et al., 2007; updated by Bargagliotti et al., 2020) is the most influential American document for teaching statistics in K-12. It describes three levels of development (A, B, C), of which levels A and B correspond approximately to grades 5–8. At level B, students are expected to: design data collection with awareness of potential

sources of bias; move from displaying individual values to distributional thinking; formulate informal conclusions from samples; and make an initial assessment of the relationship between two variables. These expectations directly correspond to the indicators of the activity-based and reflective-evaluative criteria for the formation of the logical component (Milian, 2021). It is worth noting that GAISE's four-stage model (formulate a question – collect data – analyze data – interpret results) echoes the earlier and more detailed model of the PPDAC investigative cycle (Problem – Plan – Data – Analysis – Conclusion), proposed by Wild and Pfannkuch, underscoring the continuity and coherence of the American tradition of statistics education (Wild & Pfannkuch, 1999).

The Common Core State Standards (CCSS, 2010) incorporate work with data and statistics into the grades 6–8 curriculum, building a clear progression: in grade 6, students master statistical questions and measures of central tendency and spread; in grade 7, random sampling and comparative statistics; and in grade 8, bivariate data and linear association. In doing so, the standards place emphasis not on computation but on reasoning about data: students are required to interpret, compare, and evaluate – that is, to perform precisely the logical operations that form the core of the logical component of mathematical competence (Milian, 2021).

Garfield and Ben-Zvi found that students demonstrate the greatest progress in statistical thinking under the following conditions: tasks use real, contextually meaningful data; students formulate their own questions for analysis; instruction explicitly reveals the distinction between statistical and mathematical thinking; and students are engaged in joint reasoning and argumentation (Garfield, 2008). The principles formulated by these researchers closely echo the organizational-pedagogical conditions for the effective formation of the logical component of students' mathematical competence that we substantiate in our own work (Milian, 2021).

Identification of Previously Unresolved Parts of the General Problem. Despite the thoroughness of the approaches examined, the sources analyzed leave unaddressed the question of practically implementing statistical thinking through a concrete system of tasks aimed at forming the logical component of basic school students' mathematical competence. American sources (GAISE, CCSS, the research of Wild and Pfannkuch, Garfield and Ben-Zvi) reveal the theoretical dimensions of statistical thinking but do not offer methodological developments adapted to the domestic educational context or aligned with the four-component structure of the logical component of mathematical competence substantiated in our previous research. This necessitates developing a corresponding system of tasks for basic school.

Aim of the Article – based on an analysis of American experience in teaching statistical thinking and data literacy, to substantiate the potential of data-based work as a means of forming the logical component of basic school students' mathematical competence and to propose a corresponding system of tasks.

Presentation of the Main Material.

Statistical Thinking as a Manifestation of Logical Operations in Working with Data.

In our previous research (Milian, 2021), we specified indicators of the formation of the logical component of students' mathematical competence according to four criteria. In particular, within the activity-based criterion, the following analytical skills are identified: analyzing data and relationships between them; selecting the data needed for a solution; formulating assumptions and investigating their validity. The reflective-evaluative criterion includes the ability to critically evaluate the process and outcome of a solution, draw conclusions based on the results obtained, present results, and provide arguments. These indicators are, in essence, a description of what the American scientific-methodological literature calls statistical thinking.

Wild and Pfannkuch, within their model of “types of thinking” – one of several components of their broader concept of statistical thinking – define statistical thinking through five types: recognition of the need for data, transnumeration (changing data representations to reveal new meaning), consideration of variation, reasoning with statistical models, and integration of the statistical and the contextual (Wild, Pfannkuch, 1999). Garfield and Ben-Zvi emphasize that statistical thinking is not computational but explanatory and evaluative in nature (Garfield, Ben-Zvi, 2008). The GAISE guidelines define statistical thinking as a four-stage investigative process: formulate a statistical question, collect data, analyze data, interpret results. GAISE's distinction between statistical questions (which anticipate variability in the answer) and mathematical questions (which have a single correct answer) is fundamentally important: it helps students understand that reasoning with data is connected to uncertainty and inference, not merely to computation.

Comparing these approaches with the four-component structure of the logical component of mathematical competence (Milian, 2021) reveals a deep substantive correspondence. Table 1 reflects this connection, linking each logical operation to the corresponding dimension of statistical thinking and a specific indicator of the formation of the logical component.

Table 1. Correspondence Between Logical Operations, Statistical Thinking Dimensions, and Logical Component Indicators

Logical Operation	Dimension of Statistical Thinking	Indicator of the Formation of the Logical Component
Analysis	Decomposing a dataset into variables, identifying relationships	Analyzing data and relationships between them (activity-based criterion)
Synthesis	Transnumeration: combining data into a new holistic representation	Identifying and describing mathematical characteristics, relationships between objects (activity-based criterion)

Comparison	Comparing distributions, groups, trends	Classifying mathematical objects by shared features, recognizing analogies (activity-based criterion)
Classification	Distinguishing data types, categorization	Ways of recording and representing mathematical information in various forms (cognitive criterion)
Generalization	Drawing conclusions beyond the sample, identifying patterns	Formulating assumptions and investigating their validity; predicting outcomes (activity-based criterion)
Proof / Justification	Critically evaluating claims based on data, identifying limitations	Critically evaluating the process and result; drawing conclusions; formulating counterarguments (reflective-evaluative criterion)

The comparison presented allows us to assert that working with data is not a separate strand of instruction but a manifestation of the same logical operations within a subject domain that holds heightened motivational value for basic school students. A student who finds it difficult to engage with abstract algebraic generalization can become fully engaged in the very same operations while working with real data about sports, weather, prices, or the environment. This directly strengthens the motivational-value component of the logical component. It is also important that the logical operations involved in working with data coincide with those performed by data analysts, marketers, and researchers in their everyday work, which gives instruction a practical horizon that is meaningful to students.

System of Tasks for Forming the Logical Component through Data-Based Work.

A specialized system of tasks is the main means of forming the logical component of basic school students' mathematical competence (Bachynska, 2018; Matiash et al., 2022). Applying this principle to the domain of data-based work, we present five model tasks that correspond to the active-practical and exploratory-creative stages of our staged methodology. Each task is formulated as an open-ended investigation and linked to specific indicators of the formation of the logical component.

Task 1. What Does Our Class Like?

Target operations: comparison, generalization. *Components:* activity-based, reflective-evaluative. *Time:* 45 min.

Data source: a survey conducted in class the day before the lesson – each student records how many hours per week they spend on three types of leisure activities: reading books, playing sports, and social media/phone games, etc. The data is compiled into a combined class table (separately for boys and girls).

Procedure: 1. Examine the compiled class data table. What do you notice when comparing boys and girls? 2. Calculate the average number of hours per week for each leisure activity, separately for boys and for girls. 3. Build a bar chart comparing the average figures for boys and girls across the three leisure activities. 4. The school council wants to introduce one new club for the class (a sports club, a book club, or a media club). Based only on this data, which club would you recommend? Write 3–4 sentences with justification. 5. What additional data would you need for a final recommendation? (For example: do students actually want a club, or are they simply spending time this way due to a lack of alternatives? Is the interest the same for everyone?)

Methodological commentary: Question 3 forms the operation of comparison through visual representation (cognitive and activity-based criteria). Question 4 requires generalization and justification – indicators of the reflective-evaluative criterion. Question 5 develops the ability to identify the limitations of data – a skill that naturally emerges here through the difference between what behavioral data shows and what students actually want.

Task 2. Is This Headline True?

Target operations: analysis, proof, and justification. Components: activity-based, reflective-evaluative. Time: 45 min.

Headline: Teen screen time has risen 40% since 2021 – experts warn of a learning crisis.

Data: average daily screen time (hours) for students aged 13–15: 2021 – 3.2; 2022 – 5.1; 2023 – 5.4; 2024 – 5.6; 2025 – 5.8.

Procedure: 1. Calculate the percentage change in screen time from 2021 to 2025. Does the result match the claim of “40%”? 2. Calculate the percentage change from 2021 to 2024. What number do you get? 3. Which year did the journalist choose as the starting point? Is this choice justified? 4. Build a line graph of the data. Does it create the same impression as the headline? 5. Write an evaluative response to the headline: is it accurate, misleading, or somewhere in between? Justify your answer with specific numbers.

Methodological commentary: This task develops the most cognitively demanding indicator of the reflective-evaluative criterion – the ability to constructively respond to arguments and formulate counterarguments. It introduces the concept of baseline manipulation – a key data-analysis skill needed both for critical media literacy and for any analytical work with statistics.

Task 3. Are Height and Math Performance Related?

Target operations: classification, synthesis, generalization. Components: all four. Time: 2 lessons.

Data: collected in class – students measure their own height and record their score from the most recent math test (or the teacher provides a simulated dataset).

Procedure: Lesson 1: 1. Before looking at the data, write down your prediction and reasoning: is there a relationship between height and math performance? 2. Classify students into three groups by height (define the boundaries and justify your choice). Calculate the average score for each group.

3. Build a scatter plot: height (X-axis) and score (Y-axis). Describe what you see. Lesson 2: 4. Does the plot indicate a relationship? How strong is it, and in which direction? 5. A classmate claims: "The data proves that taller students are better at math." Evaluate this claim. 6. What is a hidden (confounding) variable? Name one that could explain the relationship found. (Hint: age – older students are both taller and have more experience studying math.)

Methodological commentary: This task develops classification (grouping by height), synthesis (a scatter plot as a combination of two variables), and generalization (drawing a conclusion from the graph). Question 1 activates the motivational-value component through prediction. Questions 5–6 introduce the concepts of correlation and confounding variables – critically important logical-thinking skills that correspond to the reflective-evaluative component and are foundational for data-analysis practice.

Task 4. Where Is It Cheaper to Buy Groceries?

Data source: at home (with parents' help), students record the prices of 6–8 identical products (bread, milk, eggs, bananas, etc.) at two different stores near their home. The data is compiled into a combined class table.

Procedure: 1. Examine the compiled price table. What do you notice? 2. Classify the products into two groups: "cheaper at Store A" and "cheaper at Store B." Which group has more products? 3. Calculate how much the same basket of these products would cost at each store. 4. A family wants to save money by buying everything at one store. Which store would you recommend? Are there products worth buying at the other store, even if it is less advantageous overall? 5. What else, besides price, affects the choice of store (distance, quality, hours of operation)?

Methodological commentary: This task introduces students to working with real data through a simple, accessible everyday situation. Question 2 forms the operation of classification (cognitive criterion); question 4 develops early analytical skills that account for exceptions, preparing students for the more complex operations of comparison and generalization in the subsequent tasks of the system.

Task 5. What Will You Roll?

Data source: an in-class experiment – each student rolls two dice 20 times and records the sum of the numbers rolled after each roll. The results of the whole class are compiled into one combined table.

Procedure: 1. Count how many times each sum from 2 to 12 occurred (using the whole class's data). 2. Build a bar chart: the X-axis shows the sum (2–12), and the Y-axis shows how many times it occurred. 3. Which sum occurs most often? Count how many different ways a sum of 7 can be obtained from two dice (for example, 1+6, 2+5, 3+4...), and how many ways a sum of 2 can be obtained. Does this explain the shape of the chart? 4. If each student had rolled the dice only 2 times instead of 20, would the distribution look the same? What happens to the shape of the chart if you combine

the data with that of another class? 5. One student says: “The dice are unfair, because a sum of 7 came up most often.” Do you agree with this claim? Justify your answer.

Methodological commentary: This task illustrates consideration of variation – one of the five types of statistical thinking identified by Wild and Pfannkuch at the beginning of the article, but not yet embodied in any of the previous tasks. Question 3 develops analysis by combining experimental data with combinatorial reasoning (cognitive criterion). Question 4 builds an understanding of how sample size affects the stability of a distribution – a fundamental idea in statistical thinking. Question 5 reinforces the highest-level reflective-evaluative indicator: the ability to distinguish random deviation from systematic error based on the data itself.

Summarizing the experience examined, we formulate several practical guidelines for teachers.

1. Formulate data-based tasks as open-ended investigations rather than closed exercises. The most consistent finding of American research (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Langrall et al., 2017) is that statistical thinking and the associated logical operations develop through genuine investigation rather than through applying formulas to artificial datasets. Each task should begin with a meaningful question, be built on real or realistic data, and end with a conclusion requiring justification. The five tasks presented are models corresponding to the active-practical and exploratory-creative stages of the staged methodology for forming the logical component of mathematical competence (Milian, 2021).

2. Explicitly name the logical operations at each stage of working with data. When students sort data by category, the teacher names this action classification. When they draw a conclusion from a graph, the teacher reminds them that this is a generalization and that it requires justification. This kind of metacognitive scaffolding helps students transfer logical-thinking skills from data-based contexts to other areas of mathematics.

3. Use real, open data. Using authentic data creates a genuine context and directly strengthens the motivational-value component of the logical component of mathematical competence.

4. Develop critical evaluation of data-based claims as a distinct methodological priority. Task 2 illustrates an approach that deserves systematic implementation: teaching students to identify and evaluate manipulative techniques in statistical reporting. In an information environment saturated with data-backed claims, the ability to ask “Does this data actually support this claim?” is one of the most practically significant outcomes of mathematics education. This directly develops the reflective-evaluative criterion for the formation of the logical component.

5. Connect data-based work to students' future professional activity. Teachers should explain to students that the logical operations they carry out in data-based tasks – analysis, comparison, generalization, critical justification – are the very same operations performed by data analysts, marketers, researchers, and civil servants in their daily work. This gives students a motivational horizon beyond the classroom and establishes a connection between school mathematics and future educational and professional trajectories.

Conclusions. This article substantiates the organic connection between statistical thinking and the logical component of basic school students' mathematical competence. It is shown that working with data is not a separate strand of instruction but a manifestation of the same logical operations within a subject domain distinguished by heightened motivational value for students and a direct connection to the demands of the modern labor market.

An analysis of American experience (the Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE), the Common Core State Standards, and the research of Wild and Pfannkuch, Garfield and Ben-Zvi) confirmed the methodological conclusions of our own research: the most effective means of developing logical thinking is open-ended investigative tasks using real data that require students to perform every operation from formulating a question to critically evaluating a conclusion. Five model tasks have been proposed, linked to specific indicators of the formation of the logical component across four criteria, and methodological recommendations have been formulated.

Conflict of Interest. *The author declares no conflict of interest regarding this study, including of a financial, personal, authorship-related, or any other nature that could have influenced the course of the research and its results as presented in this article.*

Use of Artificial Intelligence Tools. *The author confirms that no artificial intelligence technologies were used in the creation of the presented work.*

Список використаних джерел

- Бачинська, Р. (2018). ЗАДАЧА ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОЇ СКЛАДОВОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ БАЗОВОЇ ШКОЛИ. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, 51, 24-28. <https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5362>
- Державний стандарт базової середньої освіти: затверджено постановою КМУ від 30 вересня 2020 р. № 898. Київ, 2020.
- Матяш О. І., Мілян Р. С. (2020). Навчаємось мислити логічно: навч.-метод. посібник для учнів. Тернопіль: Вектор, 106.
- Матяш, О., & Кривошея, М. (2025). ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ЗДАТНОСТІ ДО ДОСЛІДЖЕНЬ ЯК ПЕДАГОГІЧНА ПРОБЛЕМА. *Фізико-математична освіта*, 40(2), 30-35. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-04>
- Матяш О., Velbitskaaya I. (2025). Компаративний аналіз формування логіко-математичного мислення учнів початкової школи: імплікації для вчителя математики базової школи. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 4. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-51-64>
- Мілян Р. С. (2020). Аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (95) 239, 33-37.

- Мілян Р. С. (2021). Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи. Дисертація на здобуття доктора філософії: 014 Середня освіта (математика).
- Bargagliotti A., Franklin C., Arnold P., Gould R., Johnson S., Perez L., Spangler D. A. (2020) Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) II. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Common Core State Standards Initiative (CCSS). (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association.
- Franklin C., Kader G., Mewborn D., Moreno J., Peck R., Perry M., Scheaffer R. (2007). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Garfield J., Ben-Zvi D. Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice. (2008). Dordrecht: Springer.
- Langrall C., Makar K., Nilsson P., Shaughnessy J. M. (2017). Teaching and learning probability and statistics: An integrated perspective. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*. Reston: NCTM, 490–525.
- Matiash, O., Mykhailenko, L., Milian, R., Voievoda, A., Nakonechna, L., Kateryniuk, H. (2022). The place and role of problems combinations in the methodical system of the pupils' logical thinking. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, 22 (5), 463–469. <https://doi.org/10.22937/IJCSNS.2022.22.5.65>
- Mykhailenko, L., Matiash, O., Milian, R., Kalashnikov, I., Horiashyn, A. (2022). Mathematics teacher's methodical competence development in the conditions of the university and school partnership. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 22(12), 87–103. <https://openurl.ebsco.com/EPDB:gcd:13:17739405/detailv2?sid=ebsco:plink:scholar-a&id=ebsco:gcd:160005052>
- Roschelle J., Feng M., Murphy R. F., Mason C. A. (2020). Online mathematics homework increases student achievement. *AERA Open*, 2(4). <https://doi.org/10.1177/2332858416673617>
- Wild C. J., Pfannkuch M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

References

- Bachynska, R. S. (2018). Zadacha yak zasib formuvannia lohichnoi skladovoi matematychnoi kompetentnosti uchniv bazovoi shkoly [Task as a means of forming the logical component of mathematical competence of basic school students]. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv*, (51), 24–28. [in Ukrainian] <https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5362>
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) II*. American Statistical Association.
- Cabinet of Ministers of Ukraine. (2020). *Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity: zatverdzheno postanovoi KМУ vid 30 veresnia 2020 r. No. 898* [State standard of basic secondary education: approved by the decree of the CMU of September 30, 2020, No. 898]. [in Ukrainian]
- Common Core State Standards Initiative (CCSS). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. American Statistical Association.

- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer.
- Langrall, C., Makar, K., Nilsson, P., Shaughnessy, J. M. (2017). Teaching and learning probability and statistics: An integrated perspective. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, 490–525. NCTM.
- Matiash, O. I., Milian, R. S. (2020). *Navchaimos myslyty lohichno: navch.-metod. posibnyk dlia uchniv* [Learning to think logically: teaching-methodical manual for students]. Vektor. [in Ukrainian]
- Matiash, O. I., Kryvosheia, M. I. (2025). Formuvannia v uchniv zdatnosti do doslidzhen yak pedahohichna problema [Developing students' research capacity as a pedagogical problem]. *Fizyko-matematychna osvita: naukovyi zhurnal*, 40(2), 30–35. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-04> [in Ukrainian]
- Matiash, O., Mykhailenko, L., Milian, R., Voievoda, A., Nakonechna, L., Kateryniuk, H. (2022). The place and role of problems combinations in the methodical system of the pupils' logical thinking. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, 22(5), 463–469. <https://doi.org/10.22937/IJCSNS.2022.22.5.65>
- Matiash, O., Velbitskaya, I. (2025). Komparatyvnyi analiz formuvannia lohiko-matematychnoho myslennia uchniv pochatkovoi shkoly: implikatsii dlia vchytelia matematyky bazovoi shkoly [Comparative analysis of the development of logical-mathematical thinking in primary school students: implications for the lower secondary mathematics teacher]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, (4). <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-51-64> [in Ukrainian]
- Milian, R. (2020). Analiz rezultativ zakordonnykh doslidzhen shchodo formuvannia lohichnoi kompetentnosti uchniv u protsesi navchannia matematyky [Analysis of the results of foreign research on the formation of students' logical competence in the process of teaching mathematics]. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII(95, Issue 239), 33–37. [in Ukrainian]
- Milian, R. (2021). *Formuvannia lohichnoi skladovoi matematychnoi kompetentnosti uchniv osnovnoi shkoly* [Formation of the logical component of mathematical competence of basic school students] (Doctoral dissertation). [in Ukrainian]
- Mykhailenko, L., Matiash, O., Milian, R., Kalashnikov, I., Horiashyn, A. (2022). Mathematics teacher's methodical competence development in the conditions of the university and school partnership. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 22(12), 87–103. <https://openurl.ebsco.com/EPDB:gcd:13:17739405/detailv2?sid=ebsco:plink:scholar-a&id=ebsco:gcd:160005052>
- Roschelle, J., Feng, M., Murphy, R. F., & Mason, C. A. (2020). Online mathematics homework increases student achievement. *AERA Open*, 2(4). <https://doi.org/10.1177/2332858416673617>
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Отримано / Received 14.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 21.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 373.5.016:51:371.26(494)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-79-97

Математична освіта в Швейцарії: особливості навчання в школі та оцінювання досягнень учнів

Діана Тютюнник

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м.Вінниця,

Україна E-mail: diana.tiutiunnyk@vspu.edu.ua ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2723-0960>

Анотація. У статті здійснено комплексний аналіз математичної освіти у Швейцарській Конфедерації – країні з унікальною децентралізованою освітньою моделлю, чотирма офіційними мовами та 26 автономними кантонами. Розкрито структуру обов'язкової школи Швейцарії, що охоплює 11 років навчання і поєднує широку кантональну автономію з єдиною загальнонаціональною компетентнісною рамкою, закріпленою угодою HarmoS (2007). Описано три регіональні навчальні плани – Lehrplan 21 (21 німецькомовний та двомовний кантон), Plan d'études romand / PER (франкомовні кантони) та Piano di studio (кантон Тічіно) як вираження спільних освітніх орієнтирів при збереженні мовної і культурної ідентичності кожного регіону. Детально проаналізовано математичну галузь навчальних планів: тривимірну компетентнісну модель Lehrplan 21, тематичні галузі PER та Piano di studio, а також систематизовано компетентнісні дескриптори з математики для трьох навчальних циклів обов'язкової школи. Висвітлено методичні особливості навчання математики у швейцарській школі: дослідницький та компетентнісно орієнтований підхід, самокероване навчання, інтеграцію адаптивних цифрових платформ. Визначено систему оцінювання навчальних досягнень учнів – від описових портфоліо та формативних звітів у початковій школі до шестибальної числової шкали у середній школі, де оцінки з математики відіграють вирішальну роль у розподілі учнів між академічними та практичними освітніми траєкторіями, а також загальнонаціонального стандартизованого моніторингу ÜGK. Показано, що попри стабільно високі результати швейцарських учнів у міжнародному дослідженні PISA (508 балів з математики у PISA 2022 при середньому значенні для країн ОЕСР 472 бали), внутрішній моніторинг ÜGK фіксує суттєві міжкантональні відмінності в математичних досягненнях, що засвідчує подвійну природу кантональної автономії як переваги і водночас виклику системи. Обґрунтовано актуальність швейцарського досвіду – компетентнісної побудови навчальних планів, моделі циклічного оцінювання та інтеграції цифрових платформ підтримки – для реформування математичної освіти в Україні в контексті Нової української школи.

Ключові слова: Lehrplan 21, Plan d'études romand, Piano di studio, HarmoS, математична освіта, компетентнісні дескриптори, оцінювання, PISA, ÜGK, освіта в Швейцарії.

UDC 373.5.016:51:371.26(494)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-79-97

Mathematics education in Switzerland: features of school instruction and assessment of student achievement

Diana Tiutiunnyk

Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine.

E-mail: diana.tiutiunnyk@vspu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2723-0960>

Abstract. The article provides a comprehensive analysis of mathematics education in the Swiss Confederation – a country characterized by a unique decentralized educational model, four official languages, and 26 autonomous cantons. It reveals the structure of Swiss compulsory schooling, which spans 11 years and combines extensive cantonal autonomy with a single, nationwide competence framework established by the HarmoS Agreement (2007). The paper describes the three regional curricula – Lehrplan 21 (adopted by 21 German-speaking and bilingual cantons), Plan d'études romand / PER (French-speaking cantons), and Piano di studio (canton of Ticino) as expressions of shared educational benchmarks that simultaneously preserve the linguistic and cultural identity of each region. The mathematics domain within these curricula is analyzed in detail, focusing on the three-dimensional competence model of Lehrplan 21, as well as the thematic areas of PER and Piano di studio. Furthermore, the study systematizes mathematics competence descriptors across the three cycles of compulsory education. The article highlights the methodological features of teaching mathematics in Swiss schools, including inquiry-based and competence-oriented approaches, self-regulated learning, and the integration of adaptive digital platforms. It outlines the student assessment system ranging from descriptive portfolios and formative reports in primary school to a six-point numerical grading scale in lower secondary school, where mathematics grades play a decisive role in tracking students into academic or vocational educational pathways, alongside the national standardized monitoring system (ÜGK).

The findings demonstrate that while Swiss students consistently achieve high results in the international PISA study (scoring 508 points in mathematics in PISA 2022 compared to the OECD average of 472), the internal ÜGK monitoring reveals significant inter-cantonal disparities in mathematical achievement. This underscores the dual nature of cantonal autonomy, serving as both an advantage and a challenge to the system. Finally, the study substantiates the relevance of the Swiss experience—specifically its competence-based curriculum design, cycle-based assessment models, and the integration of supportive digital platforms – for reforming mathematics education in Ukraine within the context of the New Ukrainian School (NUS) initiative.

Keywords: Lehrplan 21, Plan d'études romand, Piano di studio, HarmoS, mathematics education, competency descriptors, assessment, PISA, ÜGK, education in Switzerland.

Постановка проблеми. Незважаючи на відносно невелику площу й населення (близько 8,7 млн осіб), Швейцарська Конфедерація посідає провідне місце у світових освітніх рейтингах і демонструє стабільно високі результати в міжнародних дослідженнях якості освіти. За даними PISA 2022, швейцарські п'ятнадцятирічні учні набрали 508 балів з математики, що значно перевищує середній показник країн ОЕСР (472 бали), а 16 % учнів досягли найвищих рівнів математичної грамотності (5–6 рівень), що вдвічі перевищує середньоєвропейський показник (OECD, 2023).

Постає закономірне запитання: завдяки яким структурним, управлінським та методичним чинникам освітня система порівняно невеликої країни з чотирма офіційними мовами та 26 автономними кантонами досягає таких стабільних результатів? Відповідь на нього неможлива без комплексного аналізу самої системи шкільної освіти Швейцарії – її принципів управління та особливостей організації навчального процесу.

Сучасна система шкільної освіти Швейцарії характеризується яскраво вираженою децентралізацією. Конституція Швейцарської Конфедерації делегує повноваження шкільної системи кантонам. Кожен із 26 кантонів має власний департамент освіти, структуру освіти, навчальний календар і програми, а навчання здійснюється різними мовами. Центральна федеральна влада в особі Державного секретаріату з питань освіти, досліджень та інновацій (State Secretariat for Education, Research and Innovation, SERI) здійснює лише загальний нагляд за відповідністю кантональних програм загальнонаціональним принципам.

Попри широку кантональну автономію, угода HarmoS (2007) встановила єдину структурну рамку обов'язкової школи, спільну для всіх кантонів. Відповідно до неї, структура шкільної освіти Швейцарії охоплює чотири послідовні рівні.

Перший рівень – дошкільна освіта (Kindergarten). Це попередня освіта для дітей віком від 4 до 6 років, яка передує загальній освіті. Відповідно до угоди HarmoS, дитячий садок Kindergarten в Швейцарії зазвичай є обов'язковим і охоплює два роки – з чотирирічного віку.

Другий рівень – початкова освіта (Primarschule). Початкова освіта у Швейцарії починається з 1-го класу і триває протягом 6 років. Учні отримують загальну освіту, включаючи мови, математику, науку, мистецтво та фізичну культуру. Заняття проводяться мовою кантону, де знаходиться школа. У німецькомовних кантонах дитячий садок і два роки початкової освіти об'єднані в перший навчальний цикл, і учні віком від чотирьох до восьми років навчаються в одному класі (Grundstufe або Basisstufe).

Третій рівень – середня освіта (Sekundarschule). Цей рівень поділяється на дві частини: нижня середня освіта (Sekundarschule) і вища середня освіта (Gymnasium). Нижня середня освіта є обов'язковою і може бути загальною або професійною. Вища середня освіта (не є обов'язковою) готує учнів до вищої освіти та університету. Більш ніж 90% молодих людей отримують кваліфікацію на рівні середньої освіти. Це дозволяє їм далі безпосередньо здобувати професію, переходити до вищої технічної школи або для продовження навчання у

закладах вищої освіти. Результатом закінчення середньої школи є сертифікат про отримання повної середньої освіти, відомий як Matura. Swiss Matura дає випускникам практично вільний доступ до всіх кантональних університетів і двох федеральних технологічних інститутів (ETH) у Цюриху та Лозанні.

Професійна освіта (Berufsbildung). Учні, які вибирають професійну освіту, вступають на програму навчання практичного спрямування, яка комбінує теоретичне навчання в професійній школі з практичним навчанням на підприємствах. Фактично це учнівство в тренінговій компанії у поєднанні з одним або двома днями навчання на тиждень у професійно-технічній школі. Цей шлях орієнтований на практику і розглядається як безпосередня підготовка до успішного початку кар'єри. У деяких випадках учні залишаються на підприємстві після закінчення навчання.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Вивчення закордонного досвіду організації шкільної освіти, зокрема математичної, та систем оцінювання навчальних досягнень учнів має в українській педагогічній науці усталену традицію, що особливо активізувалася в умовах реформи Нової української школи та інтеграції України до європейського освітнього простору.

Фундаментальне значення для української педагогічної компаративістики мають праці О. І. Локшиної, у яких системно проаналізовано трансформації змісту шкільної освіти в країнах Європейського Союзу, охарактеризовано компетентнісний підхід як провідний орієнтир розвитку європейської школи та розкрито сутність формульованого оцінювання як інтерактивного оцінювання учнівського прогресу, що дає змогу вчителю адаптувати процес навчання до потреб учнів (Локшина, 2009). Тенденції реформування середньої освіти розвинених англomовних країн у контексті глобалізації ґрунтовно досліджено А. А. Сбруєвою (2004).

Значний внесок у вивчення закордонного досвіду математичної освіти зроблено науковцями кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Зокрема, А. Л. Воевода та О. Б. Панасенко (2023) дослідили сучасні тенденції розвитку математичної освіти Ізраїлю і здійснили аналіз оновлених навчальних програм з математики для учнів старшої школи цієї країни, акцентуючи на гнучкості структури курсу та практичній спрямованості змісту навчання (Воевода & Панасенко, 2024). Безпосередньо закордонний досвід шкільної математичної освіти став предметом системного аналізу Л. Ф. Михайленко, яка узагальнила європейські дидактичні традиції навчання математики (Франції, Нідерландів, Бельгії, Італії, німецькомовних і скандинавських країн), традиції математичної освіти країн Східної Азії та США, охарактеризувала міжнародні порівняльні дослідження PISA і TIMSS, інструменти порівняльного аналізу якості викладання математики та закордонні практики підготовки й професійного розвитку вчителів математики (Михайленко, 2024). О. Л. Коношевський (2025)

на матеріалі педагогічних практик Сінгапуру, Естонії, Швейцарії, Канади та Австралії узагальнив закордонний досвід формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики та сформулював рекомендації для української школи; Д. О. Тютюнник (2024) здійснила огляд закордонних публікацій з теорії і практики формувального оцінювання на уроках геометрії, акцентуючи на конструктивному зворотному зв'язку як інструменті коригування навчального процесу; Н. Г. Підлісничка (2025) проаналізувала погляди закордонних дослідників (Норвегії, Великої Британії, США, Іспанії, Нідерландів, Німеччини, Італії, Франції та інших країн) на місце математики у професійній підготовці майбутніх економістів.

Проблематика оцінювання навчальних досягнень учнів крізь призму міжнародних моніторингових досліджень представлена в Національному звіті за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018, підготовленому колективом фахівців Українського центру оцінювання якості освіти (М. Мазорчук, Т. Вакуленко, В. Терещенко, Г. Бичко, К. Шумова, С. Раков, В. Горох та ін., 2019), у якому докладно проаналізовано стан математичної грамотності українських 15-річних учнів у порівнянні з країнами ОЕСР. Д. В. Васильєвою укладено збірник завдань для розвитку математичної компетентності учнів у форматі PISA, що безпосередньо переносить методологію міжнародного оцінювання в практику української школи (Васильєва, 2022).

Водночас аналіз наукових джерел засвідчує, що математична освіта Швейцарської Конфедерації — країни з унікальною децентралізованою моделлю управління освітою, узгодженою через міжкантональну угоду HarmoS, — досі не була предметом окремого комплексного дослідження в українській педагогічній науці: у наявних публікаціях швейцарський досвід згадується лише фрагментарно, переважно в контексті загальних оглядів систем освіти європейських країн. Це зумовлює наукову новизну та актуальність пропонованої статті.

Мета статті: охарактеризувати три регіональні навчальні плани Швейцарії, розкрити компетентнісні дескриптори з математики, описати особливості методики навчання та систему оцінювання навчальних досягнень учнів з математики.

Виклад основного матеріалу. Швейцарія має чотири офіційні мови: німецьку, французьку, італійську та ретороманську. Це безпосередньо відображається в організації навчального процесу. У 21 німецькомовному та двомовному кантоні навчання здійснюється за навчальним планом Lehrplan 21; у франкомовних кантонах – за Plan d'études romand (PER); у кантоні Тічіно (Ticino) – за Piano di studio ([Swiss Education System](#)). Усі три документи є результатом регіональної гармонізації в рамках угоди HarmoS, відображаючи єдині компетентнісні орієнтири при збереженні культурної та мовної ідентичності. Угода HarmoS встановила тривалість обов'язкового навчання – 11 років, включаючи два роки дитячого садка з 4 років; визначила компетентнісні стандарти з ключових предметів (у тому числі

математики) для закінчення 4-го, 8-го та 11-го класів; уніфікувала розклад та структуру переходів між рівнями освіти.

Серед трьох регіональних навчальних планів найбільшим за охопленням є *Lehrplan 21*, що регулює організацію освітнього процесу у 21 німецькомовному та двомовному кантоні Швейцарії. Розроблений Конференцією директорів народної освіти Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (D-EDK, 2016) і введений поетапно з 2015 р.

Математична галузь Lehrplan 21 ґрунтується на тривимірній моделі компетентностей. Ця модель передбачає, що «математична компетентність виявляється, коли математичні знання застосовуються в конкретних ситуаціях або у взаємодії математичних змістів і діяльностей».

Модель охоплює три виміри: перший – змістові галузі (Inhalte / «що?»); другий – аспекти діяльності (Tätigkeiten / «як?»); третій – процеси розвитку компетентностей у часі (упродовж трьох циклів). Жодна з цих вимірювань не є ієрархічно вищою: «навчання і викладання математики не може обмежуватися окремими клітинками таблиці, а охоплює все поле математичної діяльності».

Lehrplan 21 для німецькомовних кантонів організований за трьома навчальними циклами: Цикл 1 (дитячий садок – 2 клас), Цикл 2 (3-6 класи), Цикл 3 (7-9 класи). У кожному циклі математичні компетентності формулюються через конкретні дескриптори, прив'язані до рівнів «базових вимог» та «орієнтирів».

Цикл	Класи / вік	Акцент математичного навчання
Цикл 1	Дитячий садок + 1-2 класи (4-8 років)	Математичні ігри та уявлення: кількість, форма, орієнтація в просторі; дочислові поняття; лічба і базові операції у конкретному контексті
Цикл 2	3-6 класи (8-12 років)	Розширення числових уявлень (натуральні, дробові, від'ємні числа); геометрія площини; вимірювання; початки алгебраїчного мислення; дані та ймовірність
Цикл 3	7-9 класи (12-15 років)	Систематична алгебра; функції та залежності; геометрія простору; стереометрія; статистика та ймовірність; математичне моделювання

Таким чином, Lehrplan 21 переорієнтував систему «від фокусу на академічних знаннях до навчальних умінь і компетентностей, тобто більш практичного підходу до навчання».

Математика у Lehrplan 21 організована за трьома тематичними галузями, кожна з яких проходить крізь усі три цикли з наростаючою складністю: 1) Zahl und Variable (Число і змінна – арифметика та алгебра); 2) Form und Raum (Форма та простір (геометрія)); 3) Grössen, Funktionen, Daten und Zufall (Величини, функції, дані та випадковість – прикладна математика). Додатково виокремлена наскрізна галузь – математичне моделювання та розв'язання задач.

Перша предметна галузь охоплює арифметику та алгебру. Її концептуальне ядро полягає в тому, що «числа дозволяють визначати кількості та послідовності; на фундаментальному принципі позиційної системи числення ґрунтуються розуміння властивостей і структур чисел, числових множин та операцій». В алгебрі до чисел додаються змінні для узагальнення структур і відношень. Галузь містить 9 математичних компетентностей, розподілених за трьома аспектами діяльності. За аспектом А (Operieren und Benennen): розуміння і застосування арифметичних понять та символів; гнучка лічба і впорядкування чисел; виконання чотирьох арифметичних дій і піднесення до степеня; порівняння і перетворення виразів, розв'язування рівнянь. За аспектом В (Erforschen und Argumentieren): дослідження числових і операційних відношень та арифметичних закономірностей; пояснення, перевірка та обґрунтування тверджень і гіпотез; використання засобів для дослідження арифметичних закономірностей. За аспектом С (Mathematisieren und Darstellen): представлення і пояснення шляхів розв'язання; унаочнення числових послідовностей і виразів.

Друга предметна галузь охоплює геометрію. Її об'єктом є «точки, лінії, фігури і тіла та їхні властивості, відношення і закономірності». Прикладами зі щоденного життя (архітектура, мистецтво, техніка, природа) обґрунтовується потреба у розгляді, інтерпретації, зміні, зображенні та встановленні відношень між геометричними об'єктами. Галузь містить 9 компетентностей. За аспектом А: розуміння понять і символів; зображення, розбиття і складання фігур і тіл; визначення і обчислення довжин, площ та об'ємів. За аспектом В: дослідження геометричних відношень між довжинами, площами і об'ємами, формулювання гіпотез; перевірка та обґрунтування тверджень і формул. За аспектом С: зображення тіл і просторових відношень; складання, ескізний малюнок, побудова фігур; уявне переміщення фігур у просторі (Korpergeometrie); робота з системою координат та читання і побудова планів.

Третя предметна галузь відповідає «прикладній математиці» і «займається явищами з навколишнього середовища». Вона охоплює: величини (довжина, площа, об'єм, маса, гроші, час); функції як опис відношень між двома величинами; дані та методи статистичного аналізу; теорію ймовірності та елементи комбінаторики.

Галузь містить 8 компетентностей. За аспектом А: розуміння понять і символів; оцінювання, вимірювання, перетворення, округлення і обчислення з величинами; опис функціональних залежностей. За аспектом В: формулювання і дослідження запитань щодо відношень між величинами та функціональних залежностей; дослідження прикладних ситуацій у статистиці, комбінаториці та ймовірності. За аспектом С: збір, впорядкування, зображення, аналіз та інтерпретація даних; математизування прикладних ситуацій; конкретизація виразів, формул, рівнянь і таблиць у прикладних ситуаціях.

Структурно кожна компетентність у Lehrplan 21 описана у вигляді багаторівневої послідовності: від найпростіших дій (розпізнати, назвати) до складних (дослідити, обґрунтувати, моделювати). Сірим кольором виокремлені базові вимоги в межах циклу, а

пунктирною червоною лінією — орієнтири досягнень на кінець 4-го та 8-го класів (Berger & Kipfer, 2019).

Lehrplan 21 не встановлює єдиних правил оцінювання – це залишається у компетенції кантонів. Однак документ про реалізацію математичного навчального плану зазначає, що «оцінка наприкінці першого циклу здійснюється щодо того, чи досягнув учень рівня компетентності», а «як основа для виставлення оцінки слугує документація досягнень учня, навчальні контрольні роботи та навчальні процеси». Таким чином, оцінювання у Lehrplan 21 має складатися з: документації досягнень (портфоліо, зразки роботи); навчальних контрольних робіт (Lernkontrollen); спостереження за навчальними процесами. Ці форми доповнюють одна одну і формують цілісну картину математичних компетентностей учня.

Якщо Lehrplan 21 відображає педагогічну традицію та організаційну культуру німецькомовної Швейцарії, то франкомовний регіон сформував власну відповідь на вимоги угоди HarmoS – *Plan d'études romand (PER)*, що охоплює вісім кантонів і відображає специфіку французької дидактики математики.

Plan d'études romand (PER) – навчальний план для восьми франкомовних та двомовних кантонів (Женева, Во, Фрібур, Вале, Невшатель, Юра, Берн, Золотурн – франкомовні частини). Розроблений Міжкантональною конференцією народної освіти романської Швейцарії (СІІР) і запроваджений з 2015 р. для всієї обов'язкової освіти, включаючи École enfantine (Eurydice / EACEA, 2023).

PER структурований за тими ж трьома навчальними циклами (Cycle 1, Cycle 2, Cycle 3), що й Lehrplan 21, але з урахуванням французькомовного педагогічного контексту та традицій французької дидактики математики (зокрема, зв'язку з Асоціацією ARDM) (ICMI).

У сфері математики PER виділяє такі тематичні галузі:

- Nombres et opérations (Числа та операції) – арифметика, структура числових систем, обчислення;
- Espace et géométrie (Простір і геометрія) – геометрія площини і простору, конструювання, вимірювання;
- Grandeurs et mesures (Величини та міри) – одиниці вимірювання, оцінка, перетворення;
- Algèbre et fonctions (Алгебра та функції) – у Циклі 3 – рівняння, нерівності, функціональні залежності;
- Statistique et probabilités (Статистика та ймовірність) – збір та інтерпретація даних, елементи комбінаторики.

Ключова особливість PER – акцент на «démarche de modélisation» (процес математичного моделювання) як наскрізну методологічну стратегію, а також тісний зв'язок між математикою та природничими науками (Science de la nature) вже на рівні Циклу 1. PER також описує «compétences transversales» (міждисциплінарні компетентності), серед яких: collaboration, communication, démarche réflexive, pensée créatrice та stratégies d'apprentissage

(співпраця, комунікація, рефлексивне мислення, творче мислення, стратегії навчання) (СІПР, 2015).

Ще одним елементом швейцарської освітньої системи є *Piano di studio*, який, як і інші регіональні навчальні плани, враховує мовні та культурні особливості відповідного кантону. Piano di studio – навчальний план єдиного повністю італомовного кантону Швейцарії Тічіно (Ticino). Розроблений Департаментом освіти кантону та запроваджений у 2018/2019 навчальному році. Ґрунтується на тих самих засадах HarmoS, що й Lehrplan 21 і PER, але відображає специфіку італомовної педагогічної традиції та зв'язки з Асоціацією AIRDM і Центром компетентностей DDM (SUPSI) (ICMI).

У Piano di studio математика входить до освітньої галузі «Matematica», яка охоплює:

- Numeri e calcolo (Числа та обчислення);
- Spazio e figure (Простір і фігури – геометрія);
- Relazioni, funzioni, misure e dati (Відношення, функції, міри та дані);
- Argomentazione (Аргументація та доведення як наскрізний елемент).

Характерною рисою Piano di studio є виражена увага до «pensiero computazionale» (обчислювального мислення) та інтеграції математики з інформатикою вже з початкового рівня. Водночас зберігається традиційно сильний акцент на евклідовій геометрії та доведенні, що відображає вплив італійської математичної традиції (ICMI).

Узагальнюючи, слід зазначити, що розгляд Lehrplan 21, Plan d'études romand та Piano di studio дає змогу констатувати наявність у Швейцарії цілісної, але децентралізованої моделі реалізації математичної освіти. У межах цієї моделі спільні освітні орієнтири поєднуються з урахуванням мовної, культурної та кантональної специфіки, що забезпечує адаптивність навчального змісту до потреб конкретного регіону. Водночас усі три навчальні плани демонструють єдину методологічну спрямованість: акцент на формуванні математичної компетентності, розвитку логічного й критичного мислення, уміння розв'язувати задачі та застосовувати математичні знання в практичних ситуаціях.

Усі три навчальні плани описують математичні компетентності через конкретні дескриптори, прив'язані до навчальних циклів. Принципова відмінність від традиційних предметних програм полягає в тому, що дескриптор формулюється як «учень може / уміє», а не «учень знає / вивчає». Нижче наведено систематизовані дескриптори переважно за Lehrplan 21 як найдетальнішим публічним документом (D-EDK, 2016), з паралелями до PER та Piano di studio.

Цикл 1 (дитячий садок - 2 клас): формування числових та просторових уявлень

На першому циклі пріоритетом є розвиток дочислових понять та конкретно-операційного математичного мислення (у термінах Ж. Піаже).

Основні дескриптори:

Тематична галузь	Компетентнісні дескриптори (Цикл 1)
Числа та операції	– Учень може рахувати предмети до 20 (30) і записувати числа; – розпізнає і порівнює кількості, використовує поняття «більше», «менше», «рівно»; – додає і віднімає в межах 20 з опорою на наочні засоби; – розуміє позиційний принцип запису числа (одиниці / десятки)
Форма та простір	– Розпізнає і називає прості геометричні форми (квадрат, коло, трикутник, прямокутник, куб, куля); – описує і порівнює форми за властивостями (кількість кутів, сторін); – орієнтується у просторі (вгору/вниз, ліво/право, перед/за); – будує прості фігури з геометричних тіл та на сітківці
Розміри та міри	– Порівнює предмети за довжиною, масою, об'ємом без стандартних одиниць; – вимірює довжину нестандартними мірками; – розуміє час доби (ранок / день / вечір) і дні тижня
Дані та ймовірність	– Класифікує предмети за однією ознакою і пояснює критерій; – зображає результати спостережень у вигляді простої таблиці або малюнка; – розуміє поняття «точно», «можливо», «неможливо» в ситуаціях щоденного життя

Цикл 2 (3-6 клас): розширення числових систем та операційних умінь

На другому циклі відбувається систематичне розширення числових уявлень, розвиток алгебраїчного мислення та поглиблення геометричних знань:

Тематична галузь	Компетентнісні дескриптори (Цикл 2)
Числа та операції	– Виконує усні та письмові обчислення у множині натуральних чисел (до 1 000 000); – розуміє дробові числа (звичайні та десяткові), порівнює, записує і виконує дії з ними; – застосовує стратегії оцінки та перевірки результату; – розв'язує задачі у реальних контекстах (гроші, час, відсотки у базовому вигляді)
Форма та простір	– Класифікує плоскі фігури (трикутники, чотирикутники) за властивостями; – обчислює периметр і площу прямокутника; – будує та аналізує симетричні фігури; – розпізнає та описує просторові тіла (куб, прямокутний паралелепіпед, циліндр, конус, піраміду); – використовує систему координат для опису положення точки на площині
Розміри та міри	– Вимірює і перетворює одиниці довжини, маси, об'єму, часу; – обчислює площу і периметр в стандартних одиницях; – оцінює і перевіряє результати вимірювання
Алгебраїчне мислення	– Описує закономірності в числових послідовностях і таблицях;

	- записує прості рівняння та нерівності, розв'язує їх методом підбору; - розпізнає і будує пропорційні залежності в реальних ситуаціях
Дані та ймовірність	- Збирає, класифікує та зображує дані у вигляді таблиць, стовпчикових і кругових діаграм; - обчислює середнє арифметичне простих наборів даних; - визначає ймовірність простих подій на основі дослідів

Цикл 3 (7-9 клас): систематизація та математичне моделювання

Третій цикл завершує обов'язкову освіту і орієнтований на досягнення базових компетентностей (Grundkompetenzen), що перевіряються в рамках ÜGK. Дескриптори охоплюють рівень, необхідний для переходу до гімназії або початку учнівства (D-EDK, 2016; OECD, 2023):

Тематична галузь	Компетентнісні дескриптори (Цикл 3)
Числа та алгебра	- Виконує операції у множині раціональних і дійсних чисел (включаючи ірраціональні); - застосовує степені, корені, відсоткові розрахунки в прикладних задачах; - розв'язує лінійні рівняння, системи рівнянь і прості квадратні рівняння; - спрощує алгебраїчні вирази, застосовує формули скороченого множення
Функції	- Описує функціональні залежності словесно, таблично, графічно та аналітично; - будує і інтерпретує графіки лінійних та квадратичних функцій; - аналізує швидкість зміни (ріст/спадання) та ключові точки функції; - моделює реальні ситуації за допомогою функцій
Геометрія та вимірювання	- Застосовує теорему Піфагора для розрахунків у трикутниках та просторових фігурах; - обчислює площу і периметр різних плоских фігур, об'єм і поверхню тіл; - виконує побудови з циркулем і лінійкою та описує їх логічно; - застосовує подібність фігур і тригонометричні відношення у прямокутному трикутнику; - аналізує перетворення геометричних фігур (осьова / центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення)
Статистика та ймовірність	- Проводить статистичні дослідження: збирає, систематизує і відображає дані; - обчислює та інтерпретує середнє, медіану, моду, розмах; - оцінює ймовірність подій за класичним і статистичним означенням; - критично аналізує статистичні дані та графіки у ЗМІ
Моделювання та розв'язання задач	- Перекладає словесну задачу математичною мовою (змінні, рівняння, функції);

	- обирає відповідну математичну стратегію для нестандартної задачі; - перевіряє відповідь і критично оцінює її в контексті задачі; - представляє хід розв'язання чітко і логічно — письмово або усно
--	--

Особливості навчання математики у швейцарській школі

Методика навчання математики у всіх трьох навчальних планах базується на принципах, що відображають спадщину Й. Г. Песталоцці та сучасні підходи конструктивізму. Учителі мають право вільно обирати методи, обираючи ті, що найкраще відповідають цілям, змісту і конкретним учням. Пріоритет надається «розширеним формам навчання, диференційованому навчанню та самостійному навчанню» (Eurydice / EACEA, 2023).

Практично це означає: учні не лише отримують алгоритм і відпрацьовують його, а насамперед стикаються з проблемною ситуацією і самостійно шукають шлях до розв'язку. За Swissinfo, Lehrplan 21 надає «більшого значення самокерованому навчанню та міждисциплінарним (соціальним, особистісним) компетентностям». Водночас підкреслюється: мета розв'язання задачі у швейцарській школі – власне знаходження розв'язку, через яке учні можуть осягати математичні поняття (Mulyono, 2021).

На рівні початкової школи навчання математики тісно інтегроване з конкретними маніпулятивними діями та ігровими елементами. «У дитячому садку та у першому навчальному циклі оцінювання, як правило, здійснюється без числових оцінок» ([Swiss Education System](#)), щоб уникнути тиску та заохотити внутрішню мотивацію. Замість балів – описові відгуки про прогрес дитини двічі на рік.

На рівні нижчої середньої школи навчання математики набуває систематичнішого характеру. Відбувається диференціація учнів за рівнями підготовки: частина учнів спрямовується на академічний (гімназійний) шлях, що веде до Matura та університету, інші – на шляхи професійної підготовки. Такий поділ здійснюється орієнтовно у 11-12 років і є одним з характерних компонентів швейцарської системи, хоча критерії та механізми розподілу варіюються між кантонами.

Домашні завдання в Швейцарії не є обов'язковими у нормативному сенсі: «Lehrplan 21 зазначає лише, коли домашні завдання не слід задавати (наприклад, на свята), але не визначає, чи слід їх задавати взагалі». Це відображає загальну орієнтацію на індивідуальний розвиток та зниження зовнішнього тиску на учнів.

Цифрові платформи адаптивного навчання

Цифровізація навчання математики реалізована через два основні продукти, узгоджені з Lehrplan 21:

- Lernlupe (3-6 клас) – адаптивна навчальна платформа, що пропонує функції оцінювання компетентностей, персоналізованої підтримки та планування уроків. Ключовий предмет — математика;

- Lernpass plus / Stellwerk (7–9 клас) – платформа для нижчої середньої школи з функцією стандартизованого оцінювання навчальних досягнень, орієнтована на підготовку до переходу в професійне навчання або гімназію.

Обидві платформи доступні для всіх шкіл Східної Швейцарії з 2017 р. і забезпечують вчителям аналітику прогресу кожного учня, а учням – персоналізовані навчальні завдання. EDK ухвалила загальнонаціональну Стратегію цифровізації у 2018 р., і цифрові інструменти інтегровані в навчання математики з початкового рівня (Eurydice / EACEA, 2023).

Оцінювання навчальних досягнень учнів з математики

Академічне оцінювання у Швейцарії використовує стандартизовану шестибальну шкалу: 6 – найвища оцінка (відмінно), 5 – добре, 4 – задовільно (мінімальна прохідна), нижче 4 – незадовільно. У деяких кантонах застосовуються половинні та чвертьбальні оцінки. Примітно: з серпня 2025 р. кантон Люцерн скасував числові оцінки у початкових школах на користь описових характеристик.

У початковій школі широко застосовуються: описові відгуки двічі на рік у навчальних звітах; спостережні аркуші для відстеження розвитку; портфоліо (у тому числі цифрові в окремих кантонах), що фіксують роботи учня протягом часу – «твори, зразки письма або результати проєктів, що дозволяють рефлексувати особистісне зростання».

У Циклі 2 числові оцінки вводяться поступово (терміни різняться між кантонами). Оцінювання поєднує звіти про успішність із якісною характеристикою старанності, робочих звичок та соціальної поведінки.

У нижчій середній школі (Цикл 3) оцінки виставляються за шестибальною шкалою наприкінці кожного семестру. З моменту запровадження HarmoS оцінювання інтегрує ширші компетентності – соціальні навички, відповідальність, міжособистісні здібності поруч з академічними показниками. Залишення на другий рік є рідкістю і допускається лише у виняткових випадках.

Стандартизований моніторинг ÜGK. Головним інструментом загальнонаціонального моніторингу є ÜGK (Überprüfung der Grundkompetenzen – Перевірка базових компетентностей), що проводиться EDK. У червні 2011 р. на пленарному засіданні EDK вперше затвердила національні освітні цілі (Bildungsziele / Objectifs de formation) для чотирьох предметних галузей обов'язкової школи: мови навчання, другої національної мови та англійської, математики та природничих наук. Ці цілі визначають, які базові компетентності (Grundkompetenzen / compétences fondamentales) учні мають набути до кінця 4-го, 8-го та 11-го (останнього) шкільного року за нумерацією HarmoS. ÜGK перевіряє, якою мірою ці цілі досягаються на практиці. ÜGK принципово НЕ призначений для оцінювання конкретних учнів, класів або окремих шкіл: результати окремих учнів обробляються анонімно і не прив'язуються до конкретного класу чи школи. Це відрізняє ÜGK від класичних шкільних

контрольних робіт і зближує його з великомасштабними міжнародними дослідженнями типу PISA, однак із суто швейцарськими інструментами вимірювання.

Перше обстеження з математики відбулося у 2016–2017 рр.: 22 423 учні у 9-му класі нижчої середньої освіти (відповідає 11-му класу за нумерацією Harms) проходили тест з математики.

ÜGK 2016 перевіряла базові математичні компетентності наприкінці обов'язкової школи, тобто на рівні 9-го класу. Тестові завдання охоплювали такі тематичні галузі:

Тематична галузь	Типові перевірювані компетентності (базовий рівень)
Числа та змінні	– Операції з раціональними числами, відсоткові розрахунки у прикладних задачах; – розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей; – застосування алгебраїчних виразів для моделювання ситуацій
Форма та простір	– Обчислення площі, периметра плоских фігур і об'єму геометричних тіл; – застосування теореми Піфагора у практичних контекстах; – опис і аналіз геометричних перетворень
Функціональні залежності	– Інтерпретація та побудова графіків лінійних функцій; – опис пропорційних та обернено пропорційних залежностей; – читання і порівняння числових таблиць і діаграм
Дані та ймовірність	– Розрахунок і інтерпретація середнього, медіани, розмаху; – критична оцінка статистичних тверджень у ЗМІ; – визначення ймовірності простих подій

Основний результат ÜGK 2016 з математики: у загальношвейцарському масштабі 62,2 % учнів 11-го класу Harms (9-й клас) досягли базових компетентностей. Це означає, що майже кожен третій учень наприкінці обов'язкової школи не досягає мінімального стандарту математичних знань і вмінь. Найбільш суттєвим відкриттям ÜGK 2016 стала значна варіативність між кантонами: частка учнів, що досягли базових компетентностей, варіювала від 43,5 % до 82,7 %. Це розрив у 39,2 відсоткових пункти – при тому, що кантони номінально орієнтуються на єдині загальнонаціональні стандарти.

Науковці Консорціуму ÜGK проаналізували можливі пояснення міжкантональних відмінностей. Було встановлено, що склад учнівських контингентів (за міграційним статусом, домашньою мовою та соціальним походженням) «пояснює лише незначну частину кантональних відмінностей у результатах». Тобто кантональні відмінності в досягненнях є більшими, ніж можна було б очікувати виходячи зі складу учнівського контингенту.

Одним із системних чинників, що аналізувався, стала тривалість навчального часу: «хоча вплив навчального часу на досягнення базових компетентностей і спостерігається, ним можна пояснити лише невелику частину кантональних відмінностей». Це свідчить про те, що причини варіативності є комплексними і не зводяться до одного вимірюваного фактора.

До індивідуальних чинників, які мають «малий або середній вплив» на досягнення базових компетентностей, належать: міграційний статус учня, мова(и) домашнього спілкування, соціальне походження (зокрема рівень освіти та соціальний статус батьків).

ÜGK 2024 перевіряла базові математичні компетентності наприкінці першого навчального циклу – у 2-му класі початкової школи (4-й клас HarmoS, вік 7–8 років). Зокрема, прикладом типового завдання є вправа «Zahlen ordnen» (Упорядкування чисел), що використовує drag-and-drop технологію на планшетах. Результати ÜGK 2024 з математики та мови навчання планується оприлюднити у травні 2026 р.

PISA: міжнародний вимір. Швейцарія бере участь у PISA з 2000 р. (OECD, 2023). У PISA 2022 15-річні учні набрали 508 балів з математики (ОЕСР — 472 бали), 16 % досягли рівнів 5–6 (ОЕСР — 9 %). Водночас соціально-економічний статус пояснює 21 % варіації у математичній успішності (ОЕСР — 15 %), що свідчить про вищий вплив соціального походження на результати, ніж у середньому по країнах ОЕСР.

Висновки. Математична освіта в Швейцарії є системою, що поєднує регіональну різноманітність (три навчальні плани) з чіткою національною компетентнісною рамкою (HarmoS). Три навчальні плани – Lehrplan 21, PER та Piano di studio – відображають культурну та педагогічну ідентичність відповідних мовних регіонів, але спільно ґрунтуються на компетентнісних дескрипторах, розподілених за трьома циклами обов'язкової школи.

Методика навчання математики орієнтована на дослідницьке та самокероване навчання, підтримується розвинутою мережею цифрових адаптивних платформ і спирається на добре підготовлений педагогічний корпус. Система оцінювання поєднує описові портфоліо та формативні звіти на початковому рівні з числовими оцінками та стандартизованим моніторингом ÜGK на вищих рівнях.

Наявна напруга між сильними результатами у PISA і внутрішніми даними ÜGK свідчить про те, що кантональна автономія, будучи перевагою системи, водночас породжує суттєву міжрегіональну нерівність у математичних досягненнях. Досвід Швейцарії – передусім компетентнісна побудова навчальних планів, модель циклічного оцінювання та інтеграція цифрових платформ підтримки є цікавим для реформування математичної освіти в Україні в контексті Нової української школи.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Під час підготовки статті автори використовувала Gemini як допоміжний інструмент для перекладу окремих фрагментів тексту з німецької мови, їх редагування, впорядкування списку використаних джерел. Генеративний штучний інтелект не використовувався для створення змісту статті. Остаточний текст, перевірка фактів і відповідальність за достовірність результатів дослідження належать автору.

Список використаних джерел

- Воевода, А. Л., & Панасенко, О. Б. (2023). Сучасні тенденції розвитку математичної освіти Ізраїлю. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (69), 5-13. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2023-69-5-13>
- Воевода, А. Л., & Панасенко, О. Б. (2024). Аналіз оновлених навчальних програм з математики для учнів старшої школи Ізраїлю. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (73), 134-142. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-73-134-142>
- Васильєва, Д. В. (Уклад.), & Топузов, О. М. (Ред.). (2022). *Збірник завдань для розвитку математичної компетентності учнів у форматі PISA*. Педагогічна думка. <https://doi.org/10.32405/978-966-644-447-2-2022-120>
- Коношевський, О. (2025). Формування позитивного ставлення учнів до вивчення математики: огляд закордонного досвіду. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 4, 65-80. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-65-80>
- Локшина, О. І. (2009). *Зміст шкільної освіти в країнах Європейського Союзу: теорія і практика (друга половина ХХ - початок ХХІ ст.)*. Богданова А. М. <https://lib.iitta.gov.ua/5435/>
- Михайленко, Л. Ф. (2024). *Шкільна математична освіта за кордоном: курс лекцій*. ТВОРИ. <https://doi.org/10.31652/978-617-552-594-4-1-216>
- Мазорчук, М., Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., Горох, В. та ін. (2019). *Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018*. Український центр оцінювання якості освіти. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
- Підлісничка, Н. (2025). Місце математики у підготовці майбутніх економістів: погляд закордонних дослідників. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 3, 77-92. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-77-92>
- Сбруєва, А. А. (2004). *Тенденції реформування середньої освіти розвинених англomовних країн в контексті глобалізації (90-ті pp. ХХ - початок ХХІ ст.)*. Козацький вал. <http://repository.sspu.sumy.ua/handle/123456789/427>
- Тютюнник, Д. (2024). Теорія і практика формувального оцінювання на уроках геометрії: огляд закордонних публікацій. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 70-81. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-70-81>
- Berger, S., Verschoor, A. J., Eggen, T. J. H. M., & Moser, U. (2019). Development and validation of a vertical scale for formative assessment in mathematics. *Frontiers in Education*, 4, Article 103. <https://doi.org/10.3389/feduc.2019.00103>
- Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2015). *Plan d'études romand (PER) — Mathématiques*. CIIP. <https://portail.ciip.ch/per/domains>
- Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (D-EDK). (2016). *Lehrplan 21 — Mathematik*. D-EDK. <https://www.lehrplan21.ch>
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS). (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Eurydice/EACEA. (2023). *Teaching and learning in primary education — Switzerland*. European Commission. <https://eurydice.eacea.ec.europa.eu/national-education-systems/switzerland/teaching-and-learning-primary-education>
- Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (D-EDK). (2016). *Lehrplan 21: The key facts at a glance*. <https://www.lehrplan21.ch/sites/default/files/The%20key%20facts%20at%20a%20glance.pdf>
- Linneweber-Lammerskitten, H., & Wälti, B. (2005). Is the definition of mathematics as used in the PISA assessment framework applicable to the HarMoS Project? *ZDM Mathematics Education*, 37, 402-407.

- LivingIn.Swiss. (2023). *Lehrplan 21 explained*. <https://livingin.swiss/lehrplan-21-explained/>
- International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). (n.d.). *Mathematics education in Switzerland: Associations, teacher training & research*. <https://www.mathunion.org/icmi/around-icmi/country-contexts/context-mathematics-education-switzerland>
- Mulyono. (2021). Comparing school mathematics curriculum between Switzerland and Indonesia. *Bulletin of Applied Mathematics and Mathematics Education*, 1(2), 105–112.
- OECD Education GPS. (n.d.). *Switzerland — Student performance (PISA 2022)*. OECD. <https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?primaryCountry=CHE>
- OECD. (2023). *PISA 2022 results: Country notes — Switzerland*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-results-volume-i-and-ii-country-notes_ed6fbcc5-en/switzerland_95f719cc-en.html
- Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK). (n.d.). *ÜGK: Überprüfung des Erreichens der Grundkompetenzen in der obligatorischen Schule*. <https://www.edk.ch/de/themen/bildungsmonitoring/nationale-bildungsziele-obligatorische-schule>
- St. Gallen University of Teacher Education. (n.d.). *Digital learning platforms — Lernlupe and Lernpass plus*. <https://www.phsg.ch/en/research-and-development/digital-learning-platforms-lernlupe-and-lernpass-plus>
- Swiss Conference of Cantonal Ministers of Education (EDK). (n.d.). *Home* [Website]. <https://www.edk.ch/en>
- Swiss Education Consulting. (2024). *School rankings in Switzerland*. <https://swisseducationconsulting.ch/school-rankings-in-switzerland/>
- Conférence suisse des directrices et directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP). (n.d.). *Primary level — Swiss education system*. <https://www.cdpe.ch/en/education-system-ch/compulsory/primary>
- Swissinfo.ch. (2017). *Big test ahead for introduction of common school curriculum*. https://www.swissinfo.ch/eng/society/textbook-case_big-test-ahead-for-introduction-of-common-school-curriculum/42946202
- Swiss School in Singapore. (n.d.). *Curriculum — Lehrplan 21 and PER*. <https://www.swiss-school.edu.sg/en/about-the-swiss-school-in-singapore/lernen/lehrplan/>
- Bildungs- und Kulturdirektion, Kanton Bern. (n.d.). *ÜGK — Überprüfung der Grundkompetenzen HarmoS*. <https://www.bkd.be.ch/de/start/themen/statistik-bildung-und-kultur/statistische-erhebungen/uegk.html>
- ÜGK Schweiz. (n.d.). *Testaufgaben (Schulen)*. <https://www.uegk-schweiz.ch/eltern/testaufgaben/>
- Konsortium ÜGK. (2019). *Überprüfung der Grundkompetenzen. Nationaler Bericht der ÜGK 2016: Mathematik 11. Schuljahr*. EDK & SRED. <https://www.uegk-schweiz.ch/uegk-2016/>

References

- Voievoda, A. L., & Panasenko, O. B. (2023). Suchasni tendentsii rozvytku matematychnoi osvity Izrailiu [Modern trends in the development of mathematics education in Israel]. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*, (69), 5–13. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2023-69-5-13> [in Ukrainian].
- Voievoda, A. L., & Panasenko, O. B. (2024). Analiz onovlenykh navchalnykh prohram z matematyky dlia uchniv starshoi shkoly Izrailiu [Analysis of the updated mathematics curricula for upper secondary school students in Israel]. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*, (73), 134–142. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-73-134-142> [in Ukrainian].
- Vasylieva, D. V. (Comp.), & Topuzov, O. M. (Ed.). (2022). *Zbirnyk zavdan dlia rozvytku matematychnoi kompetentnosti uchniv u formati PISA* [Collection of tasks for developing students' mathematical

- competence in PISA format]. Pedahohichna dumka. <https://doi.org/10.32405/978-966-644-447-2-2022-120> [in Ukrainian].
- Konoshevskiy, O. (2025). Formuvannya pozytyvnoho stavlennia uchniv do vyvchennia matematyky: ohliad zakordonnoho dosvidu [Fostering students' positive attitude toward learning mathematics: a review of foreign experience]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, (4), 65–80. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-65-80> [in Ukrainian].
- Lokshyna, O. I. (2009). *Zmist shkilnoi osvity v krainakh Yevropeiskoho Soiuzu: teoriia i praktyka (druha polovyna XX – pochatok XXI st.)* [Content of school education in the European Union countries: theory and practice (second half of the 20th – beginning of the 21st century)]. Bohdanova A. M. <https://lib.iitta.gov.ua/5435/> [in Ukrainian].
- Mykhailenko, L. F. (2024). *Shkilna matematychna osvita za kordonom: kurs lektsii* [School mathematics education abroad: a course of lectures]. TVORY. <https://doi.org/10.31652/978-617-552-594-4-1-216> [in Ukrainian].
- Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, H., Shumova, K., Rakov, S., Horokh, V., et al. (2019). *Natsionalnyi zvit za rezultatamy mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2018* [National report on the results of the international study of education quality PISA-2018]. Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf [in Ukrainian].
- Pidlisnycha, N. (2025). Mistse matematyky u pidhotovtsi maibutnikh ekonomistiv: pohliad zakordonnykh doslidnykiv [The place of mathematics in the training of future economists: a view of foreign researchers]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, (3), 77–92. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-77-92> [in Ukrainian].
- Sbrueva, A. A. (2004). *Tendentsii reformuvannia serednoi osvity rozvynenykh anhlomovnykh krain v konteksti hlobalizatsii (90-ti rr. XX – pochatok XXI st.)* [Trends in reforming secondary education in developed English-speaking countries in the context of globalization (1990s – early 21st century)]. Kozatskyi val. <http://repository.sspu.sumy.ua/handle/123456789/427> [in Ukrainian].
- Tiutiunyk, D. (2024). Teoriia i praktyka formuvalnoho otsiniuvannia na urokakh heometrii: ohliad zakordonnykh publikatsii [Theory and practice of formative assessment in geometry lessons: a review of foreign publications]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, (2), 70–81. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-70-81> [in Ukrainian].
- Berger, S., Verschoor, A. J., Eggen, T. J. H. M., & Moser, U. (2019). Development and validation of a vertical scale for formative assessment in mathematics. *Frontiers in Education*, 4, Article 103. <https://doi.org/10.3389/feduc.2019.00103>
- Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2015). *Plan d'études romand (PER) — Mathématiques*. CIIP. <https://portail.ciip.ch/per/domains>
- Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (D-EDK). (2016). *Lehrplan 21 — Mathematik*. D-EDK. <https://www.lehrplan21.ch>
- Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS). (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. DECS. <https://pianodistudio.edu.ti.ch>
- Eurydice/EACEA. (2023). *Teaching and learning in primary education — Switzerland*. European Commission. <https://eurydice.eacea.ec.europa.eu/national-education-systems/switzerland/teaching-and-learning-primary-education>
- Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (D-EDK). (2016). *Lehrplan 21: The key facts at a glance*. <https://www.lehrplan21.ch/sites/default/files/The%20key%20facts%20at%20a%20glance.pdf>
- Linneweber-Lammerskitten, H., & Wälti, B. (2005). Is the definition of mathematics as used in the PISA assessment framework applicable to the HarMoS Project? *ZDM Mathematics Education*, 37, 402–407.

- LivingIn.Swiss. (2023). *Lehrplan 21 explained*. <https://livingin.swiss/lehrplan-21-explained/>
- International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). (n.d.). *Mathematics education in Switzerland: Associations, teacher training & research*. <https://www.mathunion.org/icmi/around-icmi/country-contexts/context-mathematics-education-switzerland>
- Mulyono. (2021). Comparing school mathematics curriculum between Switzerland and Indonesia. *Bulletin of Applied Mathematics and Mathematics Education*, 1(2), 105–112.
- OECD Education GPS. (n.d.). *Switzerland — Student performance (PISA 2022)*. OECD. <https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?primaryCountry=CHE>
- OECD. (2023). *PISA 2022 results: Country notes — Switzerland*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-results-volume-i-and-ii-country-notes_ed6fbcc5-en/switzerland_95f719cc-en.html
- Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK). (n.d.). *ÜGK: Überprüfung des Erreichens der Grundkompetenzen in der obligatorischen Schule*. <https://www.edk.ch/de/themen/bildungsmonitoring/nationale-bildungsziele-obligatorische-schule>
- St. Gallen University of Teacher Education. (n.d.). *Digital learning platforms — Lernlupe and Lernpass plus*. <https://www.phsg.ch/en/research-and-development/digital-learning-platforms-lernlupe-and-lernpass-plus>
- Swiss Conference of Cantonal Ministers of Education (EDK). (n.d.). *Home* [Website]. <https://www.edk.ch/en>
- Swiss Education Consulting. (2024). *School rankings in Switzerland*. <https://swisseducationconsulting.ch/school-rankings-in-switzerland/>
- Conférence suisse des directrices et directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP). (n.d.). *Primary level — Swiss education system*. <https://www.cdpe.ch/en/education-system-ch/compulsory/primary>
- Swissinfo.ch. (2017). *Big test ahead for introduction of common school curriculum*. https://www.swissinfo.ch/eng/society/textbook-case_big-test-ahead-for-introduction-of-common-school-curriculum/42946202
- Swiss School in Singapore. (n.d.). *Curriculum — Lehrplan 21 and PER*. <https://www.swiss-school.edu.sg/en/about-the-swiss-school-in-singapore/lernen/lehrplan/>
- Bildungs- und Kulturdirektion, Kanton Bern. (n.d.). *ÜGK — Überprüfung der Grundkompetenzen HarMoS*. <https://www.bkd.be.ch/de/start/themen/statistik-bildung-und-kultur/statistische-erhebungen/uegk.html>
- ÜGK Schweiz. (n.d.). *Testaufgaben (Schulen)*. <https://www.uegk-schweiz.ch/eltern/testaufgaben/>
- Konsortium ÜGK. (2019). *Überprüfung der Grundkompetenzen. Nationaler Bericht der ÜGK 2016: Mathematik II. Schuljahr*. EDK & SRED. <https://www.uegk-schweiz.ch/uegk-2016/>

Отримано / Received 06.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 10.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 37.016:51:159.955

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-98-111

Обґрунтування потенціалу математичної освіти для розвитку критичного та стратегічного мислення особистості

Мирослава Кусій

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна

E-mail: kusijmiroslava@gmail.comORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3120-1975>

Анотація. Трансформація способу життя сучасного людства обґрунтовує значимість володіння комплексними навичками мислення, насамперед критичного та стратегічного мислення. Мета даної статті пояснити необхідність підвищення уваги до модернізації методичних систем навчання математики в закладах вищої освіти з метою забезпечення умов розвитку критичного та стратегічного мислення студентів.

На основі огляду публікацій українських та закордонних дослідників (2016-2026 роки) показано, що в Україні недостатньо уваги приділяється дослідниками методам та прийомам розвитку критичного та стратегічного мислення студентів у процесі вивчення математичних дисциплін. Критичне та стратегічне мислення студентів не формується автоматично завдяки самому змісту навчальної програми з математики. Його розвиток забезпечується спеціальними підходами до навчання, які стимулюють студентів, зокрема, до аргументування, постановки запитань і виконання інтелектуально складних навчальних завдань. Університети Європи дедалі активніше створюють центри навчання і викладання, які підтримують розвиток не лише критичного, а й стратегічного мислення. Обґрунтовано, що увага до розвитку критичного та стратегічного мислення особистості є нагальною потребою, яка постає перед вищою математичною освітою і в Україні, і в усьому світі.

Для належної підготовки майбутніх фахівців до викликів XXI століття необхідні подальші дослідження, які спрямовані на розроблення й експериментальну перевірку ефективності навчальних стратегій на заняттях з математики, що активують розвиток критичного та стратегічного мислення. Маємо необхідність переосмислити методичні підходи до навчання математики в закладах вищої освіти.

Ключові слова: критичне мислення, стратегічне мислення, математична освіта, розвиток мислення, здобувачі вищої освіти.

UDC: 37.016:51:159.955

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-98-111

Justification of the Potential of Mathematics Education for the Development of Individuals' Critical and Strategic Thinking

Myroslava Kusi

Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine

E-mail: kusijmiroslava@gmail.comORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3120-1975>

Abstract. The transformation of modern society and contemporary lifestyles highlights the importance of developing complex thinking skills, particularly critical and strategic thinking. The purpose of this article is to substantiate the need to increase attention to the modernization of methodological systems for teaching mathematics in higher education institutions in order to create conditions that foster the development of students' critical and strategic thinking.

Based on a review of publications by Ukrainian and international researchers published between 2016 and 2026, the study demonstrates that insufficient attention has been paid in Ukraine to methods and instructional approaches aimed at developing students' critical and strategic thinking in the process of studying mathematics. Students' critical and strategic thinking does not develop automatically through the mathematics curriculum itself. Rather, its development requires specific pedagogical approaches that encourage students to construct arguments, ask questions, and engage in intellectually challenging learning tasks. Universities across Europe are increasingly establishing teaching and learning centers that support the development of not only critical but also strategic thinking. The study substantiates that fostering individuals' critical and strategic thinking has become an urgent challenge for higher mathematics education, both in Ukraine and worldwide.

To adequately prepare future professionals for the challenges of the twenty-first century, further research is required to develop and experimentally validate instructional strategies for mathematics education that effectively promote the development of critical and strategic thinking. This necessitates a reconsideration of methodological approaches to mathematics teaching in higher education institutions.

Keywords: critical thinking, strategic thinking, mathematics education, thinking development, higher education students.

Постановка проблеми. Підготовка фахівців нової генерації є стратегічною ціллю сучасної вищої освіти України, що впливає із потреб глобалізованого суспільства, цифрової трансформації та швидкоплинних змін у сфері знань і технологій. Ключовим аспектом цієї підготовки стає розвиток мислення майбутніх фахівців як основи їхньої здатності до інноваційної діяльності, критичної оцінки інформації, прийняття обґрунтованих рішень та адаптації до невизначених умов.

Фахівець нової генерації – це той, хто готовий до викликів майбутнього, володіє сучасними навичками та знаннями, і здатен змінюватися та розвиватися разом з навколишнім світом. Ключовими рисами фахівця нової генерації нині визнається критичне та стратегічне мислення. За останні 25 років в Україні захищено 14 дисертацій, які розкривають окремі питання проблеми формування та розвитку мислення у студентів (35% від загальної кількості дисертацій захищених в Україні за вказаний період з проблеми формування та розвитку мислення у здобувачів освіти). За спеціальністю 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) захищено у вказаний період дві дисертації Л. Глузман (2003) та С. Шевченко (2013), які розкривають окремі питання проблеми формування та розвитку мислення у студентів (Матяш, 2024 в). Розвиток мислення студентів слід розглядати нині як комплексну, багаторівневу наукову проблему, яка вимагає системного осмислення та практичного вирішення в умовах цифрового суспільства.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Проблематика формування та розвитку критичного мислення студентів, в цілому, досить широко представлена в психолого-педагогічній літературі. Майже півсотні статей українських дослідників (за період 2015-2025 років) стосується проблеми формування та розвитку критичного мислення студентів ЗВО. Зокрема, йдеться про статті Куземко Л. (2017), Шалашної Н. (2019), Лізак К. (2022), Кобець В. (2023), Єгорової І. (2024), Дубрової О. (2024), Жумбей М. (2024) та інших. Проблематика формування та розвитку *стратегічного мислення* студентів є відносно новою і піднімалася у наукових статтях значно рідше. Йдеться, зокрема, про публікації Конотоп О. (2020), Редько С. (2021), Підлісничої Н. (2024).

Варто зазначити, що проблема розвитку критичного мислення студентів у процесі фахової підготовки українськими науковцями найчастіше відображена у публікаціях, що стосуються підготовки майбутніх учителів математики (Антонюк О. П., Астаф'єва М., Годованюк Т.Л., Друшляк М. Г., Коваленко О. В., Клочко О.В., Лукашова Т. Д., Матяш О.І., Мартиненко О., Москаленко О. І., Москаленко Ю. О., Прошкін В., Черкаська Л. П., Чкана Я., Швай О. Л., та інші). Українські дослідники одностайні в тому, що формування у майбутніх учителів математики критичного мислення – невід'ємна складова їхньої фахової підготовки в університеті, що вимагає використання різноманітних технологій та способів впровадження цих технологій у навчальний процес. Проте відносно мало публікацій, в яких ця проблема розкривається на прикладі навчання конкретних математичних дисциплін.

Щодо сучасних закордонних публікацій про розвиток критичного та стратегічного мислення студентів у процесі навчання, то європейські та американські дослідники підкреслюють важливість оснащення студентів навичками стратегічного мислення поряд із критичним мисленням і креативністю. Університети Європи дедалі активніше створюють центри навчання і викладання, які підтримують розвиток стратегічного мислення.

Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми. Для з'ясування сучасних тенденцій у досліджуваних процесах, важливо розуміти причини та сутність цих процесів у цілому, та в українській освіті, зокрема. Усвідомлюючи важливість володіння якісною освітою, більшість країн світу оголошує розвиток мислення здобувачів освіти національним пріоритетом і передумовою власної національної безпеки. Пошук шляхів запровадження нової парадигми і відповідних нових моделей освіти не обмежується збільшенням обсягів змісту навчальних дисциплін або термінів навчання. Йдеться про досягнення принципово інших цілей освіти, які ніколи раніше не формулювали і які полягають у досягненні нових, вищих рівнів мислення кожної особистості.

Більшість країн світу нині незадоволені власною системою освіти. З'являється розуміння, що модернізація вищої освіти потребує глибинних змін і у системі професійної підготовки майбутніх фахівців. Виникає необхідність зміни стратегічних, глобальних цілей освіти, перестановки акценту зі знань фахівця на його особистісні якості, що постають водночас і як ціль, і як засіб його підготовки до майбутньої професійної діяльності. Інтелектуальні особливості, зокрема – мислення, є необхідною та важливою складовою як професійної компетентності, так і професійно важливих якостей у будь-якій професії на всіх без виключення етапах становлення фахівця. Таким чином, трансформація самого способу життя сучасного людства обґрунтовує значимість володіння комплексними навичками мислення, насамперед критичного та стратегічного мислення. Все це ставить перед українською методичною наукою чітке і нагальне завдання – з'ясування умов успішного розвитку критичного та стратегічного мислення майбутніх фахівців, зокрема, засобами математичної освіти.

Мета даної статті пояснити необхідність підвищення уваги до модернізації методичних систем навчання математики в закладах вищої освіти з метою забезпечення умов розвитку критичного та стратегічного мислення студентів.

Виклад основного матеріалу. Якісну математичну освіту важко уявити без завдання формування та розвитку мислення здобувачів освіти. Наша увага нині зосереджена на проблемі розвитку критичного та стратегічного мислення студента. В педагогічній літературі немає однозначних означень вказаних видів мислення людини. У нашому дослідженні ми орієнтуємося на наступні тлумачення ключових понять:

Критичне мислення - спроможність об'єктивно оцінювати інформацію, робити виважені висновки, відокремлювати факти від суджень, ухвалювати рішення на основі обґрунтувань (Матяш, 2024 а).

Стратегічне мислення - здатність передбачати довгострокові наслідки прийнятих рішень, формулювати мету та засоби її досягнення в умовах невизначеності (із урахуванням ресурсів, ризиків і альтернатив) (Матяш, 2024 а).

На нашу думку, увага до розвитку критичного та стратегічного мислення особистості є нагальною потребою, яка постає перед вищою математичною освітою. Сучасному українському суспільству потрібні фахівці, від ефективної діяльності яких значною мірою залежить успіх соціально-економічних і політичних перетворень у країні. Вони повинні володіти не тільки відповідною фаховою компетентністю, а й мати високий рівень інтелектуального розвитку, певних особистісних якостей, нового типу розумової діяльності, актуального стилю мислення.

У Документі МОН України «Концептуальні засади математичної освітньої галузі» зазначено, що математика є нині одним з основних засобів пізнання світу. «Математика допомагає впорядковувати дані, знаходити закономірності, моделювати явища й робити прогнози. Через математичні поняття і методи людина вчиться сприймати, аналізувати й описувати навколишню реальність, що робить математику фундаментальною для розвитку мислення та розуміння світу. Аналітичне й критичне мислення, уміння працювати з великими обсягами інформації, ухвалювати виважені рішення є основою для розбудови демократичних інституцій, ефективного управління ресурсами й розвитку сталих економічних систем. Математика формує прогностичне, креативне мислення, навчає систематизувати інформацію, будувати логічні зв'язки та структурує вміння розв'язувати проблеми» (Концептуальні засади, 2025). Як зазначено на сайті МОН України, розвиток математичної освіти сприяє формуванню покоління, яке здатне мислити критично, протидіяти дезінформації та маніпуляції, адаптуватися до нових викликів, орієнтуватися на інновації та сприяти сталому розвитку країни. У сучасних умовах математична освіта набуває особливого значення в забезпеченні обороноздатності країни. Військові технології, криптографія, штучний інтелект, кібербезпека, моделювання бойових дій і логістики — усі ці сфери ґрунтуються на фундаментальних математичних знаннях. Сучасна оборонна стратегія неможлива без потужного науково-технічного підґрунтя, яке базується на математиці. (Концептуальні засади, 2025).

Досить конкретно висловлюються про роль математики українські дослідники в галузі філософії: «Математика нині виноситься на перше місце в розвитку комплексів – математика та управління, математика та інформатика, математика та біологія, математика та фізика, тощо, акцентуалізує проблему дослідження когнітивних аспектів математичного. Йдеться навіть не про математику як систему знання чи певну математичну теорію, а математичне як

загальний вираз того, що несе з собою математика. Математичні теорії і методи визначають нині прояви знання, які характеризують сучасний спосіб виробництва знання» (Рубанець, 2009). «Виявлення і дослідження когнітивних аспектів математичного пізнання і знання відкриває перспективи дослідження динаміки способу виробництва знання. З точки зору когнітивної дослідницької культури – це перспективи потенційного розвитку сфери знання і погляд у майбутнє». (Рубанець, 2009).

Існує точка зору, що в педагогічній літературі достатньо уваги приділено проблемі формування та розвитку критичного мислення здобувачів освіти. Відповідних публікацій дійсно немало вже не менше як упродовж п'ятидесяти років. Проте, у статті І. Хом'яка, зокрема, зазначається, що освітній процес, побудований на засадах критичного мислення, став нині основою реформ у високорозвинених країнах Європи. Всесвітній економічний форум у Давосі регулярно наводить перелік актуальних для успішної кар'єри навичок. Рейтинг критичного мислення помітно зріс: із четвертого місця (навички для 2015 року) до другого місця (навички, які важливі в 2020 році) (Хом'як, 2019). Сучасні студенти – це діти Z покоління, покоління технічного прогресу, цифрових технологій, онлайн ресурсів (Дуброва, 2024). Формування здатності здобувачів освіти усвідомити проблему, проаналізувати та оцінити її, розглянути аргументи та альтернативні ідеї, зробити висновки і вибудувати обґрунтований план дій є, очевидно, актуальним нині програмним результатом навчання кожного освітнього компонента у підготовці майбутнього фахівця будь-якої спеціальності.

Наш огляд публікацій українських дослідників (2016-2026 роки) про розвиток критичного мислення студентів у процесі вивчення *конкретних навчальних дисциплін*, дозволяє стверджувати, що відповідні статті торкаються питань розвитку критичного мислення студентів на заняттях з *іноземної мови, української мови, історії, біології, фізики, медіаосвіти, анатомії, педагогічних та природничих дисциплін, філософських студій*. На наш подив, рідко трапляються статті, що торкаються питань розвитку критичного мислення студентів на заняттях з вищої математики.

З метою обґрунтування потреби у побудові методичної системи розвитку критичного мислення українських студентів у процесі навчання в ЗВО математичних дисциплін, ми здійснили, для порівняння, аналогічну розвідку закордонних публікацій. Нас цікавила наявність та кількість публікацій про розвиток критичного мислення (або стратегічного) студентів ЗВО на заняттях з вищої математики. Обрано також період 2016-2026 років. З цією метою зручно скористатися систематичними оглядами актуальних публікацій, які практикуються в закордонних журналах. Зокрема, ми проаналізували:

Wang Q. та Abdullah A. H. (2024). Розвиток критичного мислення студентів засобами математики у закладах вищої освіти: систематичний огляд.

Barragán Moreno S. P., та Aya Corredor O. (2026). Розвиток критичного мислення під час вивчення університетських курсів математики засобами проєктного навчання: картографічний огляд.

Nursyafiqoh Undaresta, S., Maliah Ahmad, R., Nur Aini, A., Hanggara, Y., Hermansah, Hartanto, S. та Shalehoddin. (2026). Критичне мислення студентів під час розв'язування слабоструктурованих математичних задач: огляд обсягу наукової літератури.

Wang Q. та Abdullah A. здійснили систематичний огляд досліджень (Wang, 2024) щодо розвитку критичного мислення студентів засобами математики у закладах вищої освіти. Проаналізовано 15 досліджень (2018-2023 роки), які були проведені в Індонезії, Португалії, Йорданії, Іспанії та Кореї. Дослідження, які включені до систематичного огляду, були відібрані з баз даних SCOPUS та Web of Science. Вкажемо назви окремих статей проаналізованих Wang Q. та Abdullah A. у систематичному огляді:

- ✓ Розвиток навичок критичного мислення студентів через оцінювання критичного мислення під час вивчення курсу *математичного аналізу*. (Calculus). *Zulfaneti, E. S., & Mukhni. 2018. (Web of Science).*
- ✓ Стратегія перевернутого класу, заснована на розвитку навичок критичного мислення: сприяння засвоєнню *поняття похідної* студентками першого року навчання. *Al-Zoubi, A. M., & Suleiman, L. M. 2021. (Web of Science).*
- ✓ Теоретико-методологічна пропозиція щодо розвитку критичного мислення *засобами математичного моделювання* у підготовці майбутніх інженерів. *Acebo, G. J., & Rodriguez, G. R. 2019. (Web of Science).*
- ✓ Застосування стратегії навчання «Що буде, якщо...» (What-if) для розвитку математичного критичного мислення студентів під час вивчення курсу *статистичних методів*. *Payadnya, I. P. A. A., & Atmaja, I. M. D. 2020. (Scopus).*
- ✓ Оцінювання навичок критичного мислення студентів з урахуванням когнітивного стилю: дослідження впровадження проблемно-орієнтованої моделі електронного навчання в *курсах математики*. *Evendi, E., Al Kusaeri, A. K., та ін. 2022. (Scopus).*
- ✓ Розроблення модуля з *аналітичної геометрії* та моделей кооперативного навчання для розвитку здатності до критичного мислення. *Apino, E., & Retnawati, H. 2020. (Scopus).*
- ✓ Удосконалення математичного критичного мислення студентів шляхом використання моделі навчання Team Assisted Individualization (TAI). *Marasabessy, R., Hasanah, A., & Angkotasana, N. 2021. (Scopus).*
- ✓ Експериментальне дослідження впливу проблемно-орієнтованої моделі навчання на розвиток критичного мислення під час вивчення *теорії чисел*. *Agustina, R., Farida, N., та ін. 2020. (Scopus).*
- ✓ Викладання *лінійної алгебри* в інженерних спеціальностях із використанням технологій розвитку критичного мислення. *Catarino, P., & Vasco, P. 2021. (Scopus).*

У вказаному списку статей звертаємо увагу на наявність публікацій про розвиток здатності студентів до критичного мислення на заняттях з *математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії чисел, аналітичної геометрії, курсу статистичних методів*. Акцентуємо увагу на міркуваннях Wang Q. та Abdullah A.: Математика вважається однією з найбільш придатних навчальних дисциплін для розвитку критичного мислення студентів. У галузі математичної освіти окремі науковці вважають, що людина, яка має здібності до математики, здатна краще мислити, а навчання математики сприяє розвитку мислення, що свідчить про тісний взаємозв'язок між процесами мислення та математичною діяльністю. Водночас, критичне мислення студентів не формується автоматично завдяки самому змісту навчальної програми з математики. Його розвиток забезпечується спеціальними підходами до навчання, які стимулюють студентів до аргументування, постановки запитань і виконання інтелектуально складних навчальних завдань (Wang, 2024).

Barragán Moreno S. P. та Aya Corredor O. здійснили систематичний огляд досліджень (Moreno, 2026) щодо розвитку критичного мислення студентів під час вивчення університетських курсів математики засобами проєктного навчання. Для аналізу були відібрані рецензовані наукові статті із баз даних Scopus та ERIC відповідно до критеріїв включення, які передбачали відбір досліджень, опублікованих англійською та іспанською мовами. До огляду були включені лише публікації, присвячені стратегіям проєктного навчання (Project-Based Learning, PjBL), спрямованим на розвиток критичного мислення студентів, які вивчають університетські курси математики, або практичним аспектам їх застосування. Таким чином було відібрано 170 рецензованих наукових статей, що свідчить про значну увагу закордонних дослідників до проблеми розвитку критичного мислення студентів на заняттях з вищої математики. Результати дослідження Barragán Moreno S. P. та Aya Corredor O. виявили трикутний взаємозв'язок між критичним мисленням, математикою та проєктним навчанням.

Дослідники з Індонезії Nursyafiqoh Undaresta S., Maliah Ahmad R., Nur Aini A., Hanggara Y., Hermansah Hartanto та Shalehoddin S. здійснили систематичний огляд досліджень (Undaresta, 2026) щодо розвитку критичного мислення студентів під час розв'язування неструктурованих математичних задач. До аналізу було включені лише статті англійською та індонезійською мовами. До остаточного аналізу було відібрано 20 емпіричних досліджень, які виконані із застосуванням якісної методології та опубліковані в національних наукових журналах протягом останніх десяти років (2015–2025). Результати вказаного тематичного аналізу засвідчили зміну дослідницьких пріоритетів упродовж двох часових періодів — 2015–2020 та 2021–2025 років. У першому періоді увага дослідників була зосереджена переважно на виявленні основних труднощів розв'язування математичних задач, аналізі етапів цього процесу та вивченні впливу афективних чинників, зокрема математичної тривожності. Натомість сучасні дослідження акцентують увагу на розвитку навичок мислення високого

рівня (Higher Order Thinking Skills — HOTS), математичної грамотності та підготовці студентів до викликів Четвертої промислової революції (Undarestaa, 2026).

Сучасні закордонні дослідники дедалі частіше розглядають неструктуровані математичні задачі як ефективний засіб розвитку критичного мислення студентів. Неструктуровані математичні задачі — це навчальні задачі відкритого типу, які характеризуються неповнотою або неоднозначністю умов, відсутністю єдиного алгоритму й однозначної відповіді, допускають різні обґрунтовані способи розв'язання та вимагають від студентів аналізу, оцінювання, аргументації, математичного моделювання, прийняття рішень і рефлексії, що робить їх ефективним засобом розвитку критичного мислення.

Для їх розв'язування студенти мають самостійно аналізувати ситуацію, визначати необхідні дані, формулювати припущення, обирати математичний апарат, оцінювати альтернативні підходи та аргументувати власне розв'язання.

На відміну від традиційних добре структурованих задач, неструктуровані задачі наближені до реальних життєвих, професійних або наукових ситуацій, у яких проблема не задана повністю і може мати кілька обґрунтованих варіантів розв'язання.

Основні характеристики неструктурованих математичних задач:

- *Неповнота або надлишковість інформації.* Частина даних може бути відсутньою, зайвою або такою, що потребує уточнення.
- *Відсутність єдиного алгоритму розв'язання.* Слід самостійно визначати послідовність дій.
- *Множинність можливих рішень.* Допускаються різні способи розв'язання задачі та можливі різні обґрунтовані відповіді.
- *Аргументація результатів.* Важливим є не лише отримання відповіді, а й логічне обґрунтування кожного етапу розв'язання задачі.
- *Рефлексія та оцінювання.* Можливість різнобічного аналізу власного розв'язання, його обмежень та альтернативних підходів.

Як стверджують вказані вище дослідники з Індонезії, неструктуровані задачі активізують практично всі компоненти критичного та стратегічного мислення, оскільки студент змушений: аналізувати умову та виявляти проблему; відокремлювати суттєву інформацію від несуттєвої; перевіряти достовірність припущень; будувати математичні моделі; порівнювати різні стратегії розв'язання; оцінювати правильність і доцільність отриманих результатів; аргументовано обґрунтовувати кожний висновок; здійснювати самоконтроль та корекцію власних міркувань.

Аналіз закордонних публікацій дозволяє стверджувати, що саме в Європі розвиток стратегічного мислення студентів набуває все більшої ваги в межах освітніх реформ та стратегічних планів, особливо у контексті вищої освіти. Цей акцент зумовлений необхідністю забезпечити студентів навичками для подолання складних викликів, прийняття

обґрунтованих рішень і адаптації до швидкоплинного світу. Європейські стратегії підкреслюють важливість оснащення студентів навичками стратегічного мислення поряд із критичним мисленням і креативністю. Це вважається необхідним як для академічного успіху, так і для майбутнього працевлаштування.

Наш аналіз низки найновіших закордонних публікацій (2020-2026) щодо розвитку критичного та стратегічного мислення студентів у процесі навчання дозволяє стверджувати:

- критичне мислення є ключовою компетентністю XXI століття та стратегічною ціллю вищої освіти, його розвиток залежить від низки взаємопов'язаних факторів;
- незважаючи на численні спроби зробити критичне мислення основним акцентом освітнього процесу, існує мало узгодженості щодо умов, за яких навчання дійсно призводить до значного зростання рівня критичного мислення;
- важливо цінувати дослідження в галузі освіти з критичного мислення;
- ефективність навчання критичного мислення залежить переважно від особливостей навчального середовища;
- інтерес до критичного мислення в освіті буде зберігатися і надалі;
- провідні університети, такі як Кембридж і Гарвард, вважають здатність до критичного мислення однією зі своїх основних цінностей;
- спостерігається стабільне зростання кількості досліджень з критичного мислення в освіті протягом останніх двох десятиліть, з помітним сплеском у 2023 році;
- дослідники все частіше зосереджуються на взаємозв'язку між новітніми технологіями, зокрема штучним інтелектом, і критичним мисленням;
- причини зростання наукового інтересу до критичного мислення: зв'язок критичного мислення з економічним добробутом; його значущість на ринку праці; той факт, що критичне мислення є однією з ключових компетентностей XXI століття;
- технологічний прогрес несе не лише нові можливості, а й виклики для формування критичного мислення. Зокрема, масове використання штучного інтелекту може призвести до втрати навичок мислення та прийняття рішень, зокрема зменшення використання критичного мислення;
- сучасні дослідження дедалі більше зосереджуються на методах викладання критичного мислення в умовах технологічного прогресу;
- розвиток критичного мислення має бути інтегровано в оцінювання навчання й викладання;
- мотивація викладачів до розвитку критичного мислення у студентів має посилюватися завдяки впровадженню раціонального механізму оцінювання;
- оцінювання критичного мислення має бути систематично інтегроване;
- слід запровадити адекватні інструменти оцінювання критичного мислення відповідно до попередньо визначених навчальних цілей і результатів;

- доцільно інтегрувати оцінювання критичного мислення в загальну оцінку результатів навчального курсу;
- інтегрування навчання критичного мислення у конкретні предметні галузі, а не викладання його окремими курсами, розглядається як більш перспективний шлях для допомоги студентам стати критичними мислителями;
- особливо важливим є наголос на необхідності подолання труднощів у оцінюванні прогресу розвитку критичного мислення та моніторингу довгострокових ефектів його підтримки, зокрема здатності переносити ці навички на робоче місце та в повсякденне життя;
- і викладачі, і студенти мають усвідомлювати значущість критичного та стратегічного мислення, щоб формувати університетську культуру, орієнтовану на розвиток необхідних якостей мислення та інноваційного потенціалу;
- стратегічне мислення можна визначити, виміряти та розвинути як надійну, стійку здатність;
- формування здатності до критичного та стратегічного мислення є тривалим процесом, який потребує підтримки з боку інституційної системи.
- викладачі мають чітко формулювати цілі розвитку критичного та стратегічного мислення та включати їх у навчальні програми й професійний розвиток викладачів;
- у науковій літературі досі приділено надто мало уваги чіткому опису того, що саме включає в себе процес стратегічного мислення, яким чином воно приносить очікувані переваги, та як його можна інтегрувати в існуючі практики планування;
- стратегічного мислення можна навчити через досвід, мислення у дії, помилки та обговорення; навчання стратегічного мислення має бути активним, практичним, міждисциплінарним;
- стратегічне мислення є важливим компонентом раціонального прийняття рішень, однак мало що відомо про його аспекти розвитку; незважаючи на важливість стратегічного мислення, ми досі небагато знаємо про шляхи його розвитку;
- розрив між визнаною важливістю стратегічного мислення та його реальним втіленням у практиці підживлюється історичною плутаниною щодо самого поняття, як серед науковців, так і серед практиків;
- є потреба в майбутніх дослідженнях, для вивчення того, як розвиток здатностей до стратегічного мислення в дії впливає на індивідуальне відчуття компетентності та дієздатності.

Висновки. У науковому середовищі все частіше лунає теза про необхідність переходу до випереджувального характеру функціонування освіти, переорієнтації її із засвоєння минулого на проектування майбутнього. Завдяки вчасним нововведенням, сучасна освіта може бути затребуваною та ефективною. Більшість дослідників нині розглядають критичне

та стратегічне мислення як навички, які можна набути, і які формуються, зокрема, у навчанні математики. Сучасні закордонні дослідження акцентують увагу на тому, що розвиток здатності стратегічно мислити є одним із найнеобхідніших, але водночас найменш досліджених.

Для належної підготовки майбутніх фахівців до викликів XXI століття необхідні подальші дослідження, які спрямовані на розроблення й експериментальну перевірку ефективності навчальних стратегій на заняттях з математики, що активують розвиток критичного та стратегічного мислення. Маємо необхідність переосмислити методичні підходи до навчання математики в закладах вищої освіти. Замість навчання, орієнтованого переважно на засвоєння алгоритмів і процедур, доцільно впроваджувати такі моделі навчання, які стимулюють розвиток уміння критично оцінювати інформацію та розв'язувати неструктуровані проблеми. Слід потурбуватися про створення спеціальних умов під час навчання математики: внести відповідні зміни у зміст освіти та методику навчання. Ці зміни мають бути спрямовані на забезпечення умов засвоєння та розвитку стратегій як критичного так і стратегічного мислення.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Авторка підтверджує, що не використовувала технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи. При написанні статті використовувався ChatGPT виключно для перекладу іноземних джерел. Представлені у статті результати та висновки є власним інтелектуальним внеском авторки.

Список використаних джерел

- Barragán Moreno, S. P., & Aya Corredor, O. (2026). *Enhancing critical thinking in university mathematics courses through project-based learning: A mapping review*. *European Journal of Science and Mathematics Education*.
- Глузман, Н. А. (2003). *Формування узагальнених прийомів розумової діяльності в майбутніх вчителів початкових класів у процесі вивчення дисциплін математичного циклу* (Автореф. дис. ... канд. пед. наук). Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.
- Дуброва, О. М., & Сахнюк, Т. В. (2024). Розвиток навичок критичного мислення сучасних студентів – представників покоління Z: Інтерактивні практики. *Інноваційна педагогіка*, 72, 61–66. <http://www.innovpedagogy.od.ua/archives/2024/72/11.pdf>
- Іван Хом'як. (2019). Розвиток критичного мислення у студентів-філологів. *Українська мова і література в школі*, 1, 2–7. <https://eprints.oa.edu.ua/id/eprint/8123/1/.pdf>
- Концептуальні засади математичної освітньої галузі. (2025). Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/novyny-posylannia/konceptualni-zasadi-matematichnoyi-osvitnoyi-galuzi.pdf>

- Кусій, М. (2025). Формування у студентів здатності мислити стратегічно: Математичний інструментарій. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 3, 44–52. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-44-52>
- Матяш, О. І., & Підліснич, Н. Г. (2018). Розвиток прийомів розумової діяльності майбутніх економістів у процесі навчання математики. *Фізико-математична освіта*, 4(18), 106–111. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-018-4-017>
- Матяш, О. І., & Підліснич, Н. Г. (2024, а). *Розвиток стратегічного мислення студентів засобами задачного підходу*. ТВОРИ.
- Матяш, О., & Ящук, К. (2024, в). Ретроспективний огляд дисертацій українських дослідників з теорії і методики навчання математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 95–108. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-95-108>
- Nursyafiqoh Undaresta, S., Maliah Ahmad, R., Nur Aini, A., Hanggara, Y., Hermansah, Hartanto, S., & Shalehoddin. (2026). *Critical thinking of students in solving ill-structured mathematical problems: A scoping review*. *Pi: Mathematics Education Journal*, 9(1), 13–25. <https://doi.org/10.21067/pmej.v9i1.13220>
- Підліснич, Н. (2025). Місце математики у підготовці майбутніх економістів: Погляд закордонних дослідників. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 3, 77–92. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-77-92>
- Рубанець, О. М. (2009). *Когнітивні аспекти математичного пізнання в розвитку науки*. <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/9ae012d7-9a0f-46e8-9b22-80d0de9b8f03/content>
- Шевченко, С. М. (2013). *Розвиток аналітичного мислення студентів вищих технічних навчальних закладів у процесі вивчення математичних дисциплін* (Автореф. дис. ... канд. пед. наук). Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.
- Wang, Q., & Abdullah, A. H. (2024). Enhancing students' critical thinking through mathematics in higher education: A systematic review. *SAGE Open*, 14(3). <https://doi.org/10.1177/21582440241275651>

References

- Barragán Moreno, S. P., & Aya Corredor, O. (2026). *Enhancing critical thinking in university mathematics courses through project-based learning: A mapping review*. *European Journal of Science and Mathematics Education*.
- Dubrova, O. M., & Sakhniuk, T. V. (2024). Rozvytok navychok krytychnoho myslennia suchasnykh studentiv – predstavnykiv pokolinnia Z: Interaktyvni praktyky [Development of critical thinking skills of modern students of Generation Z: Interactive practices]. *Innovatsiina pedahohika*, 72, 61–66. <http://www.innovpedagogy.od.ua/archives/2024/72/11.pdf>
- Hluzman, N. A. (2003). *Formuvannia uzahalnenykh pryimov rozumovoi diialnosti v maibutnikh vchyteliv pochatkovykh klasiv u protsesi vyvchennia dystsyplin matematychnoho tsyклу* [Formation of generalized mental activity techniques in future primary school teachers during the study of mathematical disciplines] (Extended abstract of candidate's thesis). Natsionalnyi pedahohichnyi universytet imeni M. P. Drahomanova.
- Khomiak, I. (2019). Rozvytok krytychnoho myslennia u studentiv-filolohiv [Development of critical thinking in philology students]. *Ukrainska mova i literatura v shkoli*, 1, 2–7. <https://eprints.oa.edu.ua/id/eprint/8123/1/.pdf>
- Kontseptualni zasady matematychnoi osvitoi haluzi [Conceptual foundations of the mathematics educational field]. (2025). Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/novyny-posylannia/kontseptualni-zasadi-matematicnoyi-osvitnoyi-galuzi.pdf>

- Kusii, M. (2025). Formuvannia u studentiv zdatnosti myslyty stratehichno: Matematychnyi instrumentarii [Developing students' ability to think strategically: Mathematical tools]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 3, 44–52. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-44-52>
- Matias, O. I., & Pidlisnycha, N. H. (2018). Rozvytok pryiomiv rozumovoi diialnosti maibutnikh ekonomistiv u protsesi navchannia matematyky [Development of mental activity techniques of future economists in the process of learning mathematics]. *Fyzyko-matematychna osvita*, 4(18), 106–111. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-018-4-017>
- Matias, O. I., & Pidlisnycha, N. H. (2024, a). *Rozvytok stratehichnoho myslennia studentiv zasobamy zadachnoho pidkhodu* [Development of students' strategic thinking through a problem-based approach]. TVORY.
- Matias, O., & Yashchuk, K. (2024, b). Retrospektyvnyi ohliad dysertatsii ukrainskykh doslidnykiv z teorii i metodyky navchannia matematyky [Retrospective review of dissertations by Ukrainian researchers in the theory and methodology of mathematics teaching]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 2, 95–108. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-95-108>
- Nursyafiqoh Undaresta, S., Maliah Ahmad, R., Nur Aini, A., Hanggara, Y., Hermansah, Hartanto, S., & Shalehoddin. (2026). *Critical thinking of students in solving ill-structured mathematical problems: A scoping review*. *Pi: Mathematics Education Journal*, 9(1), 13–25. <https://doi.org/10.21067/pmej.v9i1.13220>
- Pidlisnycha, N. (2025). Mistse matematyky u pidhotovtsi maibutnikh ekonomistiv: Pohliad zakordonnykh doslidnykiv [The place of mathematics in the preparation of future economists: A view of foreign researchers]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 3, 77–92. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-3-77-92>
- Rubanets, O. M. (2009). *Kohnityvni aspekty matematychnoho piznannia v rozvytku nauky* [Cognitive aspects of mathematical cognition in the development of science]. <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/9ae012d7-9a0f-46e8-9b22-80d0de9b8f03/content>
- Shevchenko, S. M. (2013). *Rozvytok analitychnoho myslennia studentiv vyshchyykh tekhnichnykh navchalnykh zakladiv u protsesi vyvchennia matematychnykh dystsyplin* [Development of analytical thinking of students of higher technical educational institutions in the process of studying mathematical disciplines] (Extended abstract of candidate's thesis). Natsionalnyi pedahohichniy universytet imeni M. P. Drahomanova.
- Wang, Q., & Abdullah, A. H. (2024). Enhancing students' critical thinking through mathematics in higher education: A systematic review. *SAGE Open*, 14(3). <https://doi.org/10.1177/21582440241275651>

Отримано / Received 18.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 21.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 373.5.016:51:004(477)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-112-123

Адаптивна технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики та її впровадження в шкільну практику

Юлія Бойко

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

E-mail: yu.v.tykhonenko@npu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7003-6266>

Анотація. Повторення та систематизація є невід'ємною складовою ефективного навчання математики. У науково-методичній літературі запропоновано різні підходи до здійснення підсумкового повторення шкільного курсу математики в старших класах, проте спосіб його організації нормативно не регламентується і покладається на вчителя в межах його академічної свободи. З огляду на обмежений час, виділений на повторення, неоднорідність навчальних досягнень та когнітивних особливостей учнів класу, реалізація підсумкового повторення потребує гнучкості та персоналізації. Для цього можуть бути застосовані адаптивні технології. За нашими даними, наявні платформи адаптивного навчання не закривають повною мірою потреби учасників освітнього процесу на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики. Тому нами було розроблено та апробовано адаптивну практико-орієнтовану технологію повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Мета роботи – експериментальна перевірка ефективності впровадження авторської практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики. Методологічною основою розробки є особистісно-орієнтований та діяльнісний підходи. У дослідженні використані методи: теоретичні (аналіз, синтез, узагальнення), емпіричні (педагогічний експеримент), статистичні (непараметричні критерії Вілкоксона та Манна-Вітні).

У роботі теоретично обґрунтовано доцільність застосування адаптивних технологій на етапі підсумкового повторення, вперше розроблено й експериментально перевірено адаптивну практико-орієнтовану технологію повторення та систематизації шкільного курсу математики. Статистичний аналіз підтвердив закономірний (невипадковий) характер стійкого приросту знань учнів експериментальної групи на відміну від контрольної. Попри локальний характер пілотного етапу дослідження, така позитивна динаміка доводить життєздатність авторської технології та обґрунтовує потребу її подальшої верифікації на ширшій вибірці.

Ключові слова: Адаптивне тестування, Нова українська школа, повторення і систематизація шкільного курсу математики, сучасні технології навчання математики.

Adaptive technology for the review and systematization of the school mathematics course and its implementation into school practice

Yuliia Boiko

Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

E-mail: yu.v.tykhonenko@npu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7003-6266>

Abstract. Review and systematization are integral components of effective mathematics education. Although the research and methodological literature proposes various approaches to conducting the final review of the school mathematics course in high school, its organizational method is not strictly regulated by standards and is left to the teacher's academic freedom. Given the limited time allocated for the review, as well as the heterogeneity of students' academic achievements and cognitive characteristics, the implementation of the final review requires flexibility and personalization. Adaptive technologies can be applied to address these needs. According to our findings, existing adaptive learning platforms do not fully satisfy the needs of the educational process participants during the review and systematization stage of the school mathematics course. Therefore, we have developed and pilot-tested an adaptive, practice-oriented technology for the review and systematization of the school mathematics course.

The purpose of the work is to experimentally verify the effectiveness of the implementation of the author's practice-oriented adaptive technology for repetition and systematization of the school mathematics course. The methodological basis is a personality-oriented and activity-based approach. The study used the following methods: theoretical (analysis, synthesis, generalization), empirical (pedagogical experiment), statistical (nonparametric criteria of Wilcoxon and Mann-Whitney).

This paper theoretically substantiates the expediency of applying adaptive technologies at the final review stage; furthermore, it introduces the first developed and experimentally verified adaptive, practice-oriented technology for the review and systematization of the school mathematics course. Statistical analysis confirmed the non-random nature of the sustained knowledge growth observed in the experimental group, in contrast to the control group. Despite the localized scope of the pilot phase of the study, this positive dynamic demonstrates the viability of the author's technology and justifies the need for its further verification on a broader sample.

Keywords: adaptive testing, New Ukrainian School, review and systematization of the school mathematics course, modern technologies for teaching mathematics.

Постановка проблеми. Аналіз джерел та останніх досліджень. Ефективна організація освітнього процесу з математики неможлива без належної уваги до процесів повторення та систематизації навчального матеріалу. У процесі навчання математики *повторення* трактується як цілеспрямоване повернення до раніше вивченого матеріалу, що передбачає його регулярне відтворення в пам'яті здобувачів освіти (Могорита & Лавренова, 2017), а *систематизація* знань – як процес структурування та узагальнення навчального матеріалу, що трансформує розрізнені відомості у логічно вибудовану, інтегровану систему знань, запобігаючи їх механічному накопиченню (Савченко, 2012; Слєпкань, 2006). За дидактичними цілями розрізняють такі види повторення: вступне, поточне, закріплювальне, удосконалювальне, коригувальне та підсумкове (Вашуленко, 2008). У даній роботі розглядаємо підсумкове повторення, яке реалізовується наприкінці певного періоду навчання та охоплює навчальний матеріал, розглянутий протягом цього періоду. Повторення та систематизацію цілісного курсу математики закономірно реалізовувати після вивчення всіх тем шкільної програми, тобто наприкінці випускного (нині 11) класу. У нормативних документах єдиним чином не регламентується спосіб проведення такого повторення, тож воно реалізовується на розсуд вчителя в межах його академічної свободи. Час на повторення відповідно до чинних навчальних програм (МОН, 2017) виділяється переважно із резервного часу, а рівень навчальних досягнень з математики учнів класу та їх когнітивні особливості можуть значно різнитися. Тому спосіб реалізації підсумкового повторення потребує гнучкості та персоналізації навчання, що може досягатися, зокрема, за допомогою адаптивних технологій навчання.

Сучасний стан науково-методичних публікацій, присвячених питанням повторення та систематизації шкільного курсу математики, свідчить про певну розрізненість та брак цілісних системних підходів у цьому напрямі. Попри це, базові теоретичні й дидактичні засади зазначених процесів закладені в класичних працях вітчизняних фахівців, зокрема З. Слєпкань, Г. Бєвза, М. Бурди, В. Швеця та інших. Повторення та систематизацію у контексті підготовки до стандартизованого оцінювання (ЗНО/НМТ) розглянуто у роботах О. Шкільного та Ю. Захарійченка, де запропоновано структурувати навчальний матеріал за десятьма тематичними блоками, що дозволяє реалізувати принцип наступності, коли вивчення нових тем базується на актуалізації раніше засвоєних (Шкільний & Захарійченко, 2016; Шкільний & Захарійченко, 2017). Різні аспекти підготовки до тестування висвітлено також у працях Є. Неліна та О. Мажинської, І. Акуленко та К. Гнезділової, Ю. Ботузової та інших.

Цифровізація освітнього простору також зумовлює трансформацію традиційних методичних підходів та їх збагачення інформаційно-комунікаційними технологіями. Прикладом цього є розвиток адаптивних технологій навчання, котрі ґрунтуються на персоналізації освітньої траєкторії відповідно до індивідуальних результатів та навчальної

динаміки здобувача освіти (Пономаренко, 2025). Характерними особливостями адаптивних технологій є персоналізація, інтерактивність, автоматизація оцінювання, гнучкість та технічна підтримка (Ляшенко, 2019). Тенденції розвитку адаптивних освітніх систем розглянуто у роботах В. Дем'яненка, котрий зазначає, що фундамент наукового обґрунтування закладено ще Я. А. Коменським, І. Г. Песталоцці та іншими класиками педагогіки. Автор зазначає, що ідея адаптивного персоналізованого навчання може бути реалізована через лінійну або розгалужену систему програмованого навчання, а також змішане програмоване навчання. Сучасні адаптивні освітні системи оперують широким набором функцій, таких як складний трекінг розвитку навичок, миттєвий зворотній зв'язок, персоналізовані підказки та інші (Дем'яненко, 2016). Адаптивні технології для вивчення математики впроваджені на таких платформах: Khan Academy, Coursera, Prometheus, ALEKS, GIOS, Learning.ua, Moodle та інших. Проте на запропонованих платформах, за нашими даними, не реалізовано повний цикл повторення та систематизації шкільного курсу математики з достатньою методичною підтримкою. Крім того, за нашими спостереженнями згадані платформи з адаптивними інструментами не знайшли наразі широкого впровадження в закладах загальної середньої освіти.

Методика впровадження адаптивних технологій під час вивчення математики в Україні і перевірка їх ефективності знаходиться на стадії досліджень та розробки. Зокрема методику розробки адаптивних навчальних тестів (на прикладі вищої та прикладної математики) розглянуто в роботі Є. В. Дерезь. Автор зазначає, що застосування таких тестів є найбільш ефективним у поєднанні з елементами мікронавчання (Дерезь, 2019). У статтях Г. Д. Урум у співавторстві з М. І. Співак та К. А. Малайревою розглянуто застосування адаптивного навчання під час вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей з параметрами та методу координат у шкільному курсі математики (Урум & Співак, 2023; Урум & Малайрева, 2023). Контрольовані випробування адаптивних систем з застосуванням штучного інтелекту для персоналізації навчання математики в старшій школі підтверджують, що інтеграція адаптивних технологій в освітній процес забезпечує гнучкість організації навчання, диференціацію завдань за рівнем складності та розширює доступ здобувачів до сучасних освітніх ресурсів (Бойко, Василюк & Моторіна, 2026). Також приклад реалізації адаптивних наведено у наших статтях «Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення шкільного курсу математики» та «Особливості підготовки та реалізації адаптивного тесту з теми "Нерівності"» (Бойко, 2025a; Бойко, 2025b).

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Наразі нами не виявлено досліджень щодо результатів впровадження адаптивних технологій навчання на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики. На нашу думку, такі дослідження необхідні, оскільки дозволять оцінити не лише доречність, а і результативність впровадження адаптивних технологій.

Метою статті є експериментальна перевірка ефективності впровадження авторської практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Виклад основного матеріалу. Задля оптимізації часу та персоналізації освітньої траєкторії учнів на етапі підсумкового повторення математики нами було розроблено практико-орієнтовану адаптивну технологію повторення та систематизації. Концептуальна модель запропонованої технології містить такі компоненти: цільовий, змістовий, технологічний (процесуальний) та оцінювально-аналітичний. Цільовий та змістовий компонент розглянемо на двох рівнях: глобальному (зумовлені державними нормативними документами) та локальному (сформовані особливостями освітнього процесу). Технологічний (процесуальний) компонент містить опис методів, засобів і організаційних форм реалізації запропонованої технології повторення та систематизації курсу математики. Оцінювально-аналітичний компонент передбачає оцінювання результатів навчальних досягнень та поступу учнів, а також – ефективності впровадження практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики. Опис цих компонентів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики

Компонент концептуальної моделі	Основні положення	
Цільовий	<i>Глобальний рівень</i>	<i>Локальний рівень</i>
	1) формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для успішної життєдіяльності в сучасному світі; 2) забезпечення інтелектуального розвитку старшокласників, розвитку їхнього логічного, критичного, просторового та алгоритмічного мислення; 3) свідоме оволодінні системою математичних знань і вмінь, необхідних для вивчення суміжних дисциплін та продовження освіти	1) виявлення та подолання прогалин у знаннях та вміннях учнів; 2) підвищення рівня математичної компетентності та впевненості в своїх знаннях, уміннях та навичках з математики; 3) приведення фрагментарних уявлень про математичні поняття до цілісного образу математичної картини світу, опанованої в межах шкільної програми
Змістовий	<i>Глобальний рівень</i>	<i>Локальний рівень</i>

Таблиця 1. Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики

	Визначається чинною навчальною програмою з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) рівня стандарту для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів та Програмою зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти.	- коригується відповідно до поточного рівня навчальних досягнень здобувачів освіти за допомогою елементів адаптивного навчання; - визначено розподіл за розділами та темами і послідовність їх опрацювання (див. табл. 1.14)
Технологічний (процесуальний)	<i>Методи:</i> технологія структурно-логічних схем і опорних конспектів, ІКТ, мікронавчання, інтерактивні та адаптивні технології навчання, гейміфікація. <i>Засоби:</i> опорні конспекти та таблиці, у тому числі в електронному вигляді та з доповненою реальністю, навчальні короткі відео, тренувальні та тестові завдання з математики, адаптивні тести, розроблений ПЗ. <i>Організаційні форми роботи:</i> індивідуальна, консультація, дистанційна, змішана. <i>Послідовність реалізації:</i> здійснюється у три етапи: 1) діагностичний, 2) тематичне практико-орієнтоване повторення (окремо за десятьма розділами), 3) практичне відпрацювання на комплексних тестах.	
Оцінювально-аналітичний	<i>Результати учнів</i>	<i>Ефективність технології</i>
	1) оцінювання рівня навчальних досягнень з теми/розділу під час тематичного практико-орієнтованого повторення; 2) основний інструмент вимірювання результатів цілісного повторення шкільного курсу математики – внутрішнє підсумкове тестування (комплексний тест); 3) у якості додаткового інструменту можна розглядати результати тесту з математики на НМТ.	Оцінюється за трьома критеріями: 1) динаміка результатів навчальних досягнень учнів; 2) стабільність результатів учнів; 3) мотиваційно-психологічний фактор

Цільовий і змістовий компоненти переважно регламентуються нормативними документами, тож у нашій роботі розглянемо технологічний та оцінювально-аналітичний. Реалізацію запропонованої адаптивної технології підсумкового повторення та систематизації шкільного курсу математики передбачено здійснювати у три послідовні етапи: 1) первинна діагностика знань, умінь і навичок здобувачів освіти; 2) тематичне практико-орієнтоване повторення навчального матеріалу; 3) практичне відпрацювання навичок за допомогою комплексного тестування.

Первинна діагностика (перший етап) передбачає виконання комплексного діагностичного тесту, який охоплює завдання з усіх ключових розділів шкільної математики, поєднуючи різні рівні складності та формати тестових запитань. Такий тест генерується автоматично з розробленого нами банку завдань за заздалегідь визначеною специфікацією та оцінюється кількісно. Для цього тесту ми пропонуємо використовувати структуру загальнодержавного стандартизованого тесту з математики (ЗНО/НМТ).

Тематичне повторення (другий етап) відбувається послідовно за кожним із 10 розділів (числа і вирази, функції, рівняння, нерівності, текстові задачі, елементи математичного аналізу, елементи стохастики, планіметрія, стереометрія, координати і вектори). Кожен із розділів диференційовано на окремі теми відповідно до змістового тематичного класифікатора завдань, який наведено у статті «Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення шкільного курсу математики» (Бойко, 2025а). У межах кожного розділу учні спершу виконують діагностичний тест, який є адаптивним і генерується автоматично (кожне наступне завдання залежить від результатів відповіді на попереднє). За результатами такого тесту визначаються діагностичні рівні володіння кожною із тем розділу. Ми виокремлюємо п'ять таких діагностичних рівнів: не опановано або володіє темою на початковому, середньому, достатньому чи високому рівні. Після цього учні виконують тренувальні вправ і тести до кожної теми розділу відповідно до визначеного діагностичного рівня за алгоритмом, наведеним у таблиці 2.

Таблиця 2. Алгоритм тематичного опрацювання відповідно до визначеного діагностичного рівня навчальних досягнень

Діагностичний рівень (за результатами діагностичного тесту до розділу)						
Не опановано	Початковий рівень	Середній рівень		Достатній рівень		Високий рівень
Послідовно проходить тему: теорія та найпростіші випадки з прикладами, систематизація за допомогою СЛС, відпрацювання навичок розв’язування.	Чи підтверджено результатами тренувальних діагностичних тестів					
	Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
	Опановує достатній рівень або переходить до наступної теми.	Продовжує опрацювати завдання середнього рівня.	Опановує високий рівень або переходить до наступної теми.	Продовжує опрацювати достатній рівень.	Перехід до наступної теми.	Опрацює завдання високого рівня.

Після опрацювання усіх тем розділу учні виконують підсумковий тест до розділу, виконує роль проміжного контролю і дозволяє оцінити динаміку результатів учнів та, за потреби, скоригувати навчальну діяльність.

Практичне відпрацювання на комплексних тестах (третій етап) поєднує тренувальну, контролюючу та коригувальну функції. Систематичне розв'язання комплексних тестів дає змогу здійснювати моніторинг індивідуальної динаміки навчальних досягнень учнів, а також оцінювати стабільність результатів та міцність сформованих математичних компетентностей. Такі комплексні тести, які генеруються, як і під час первинної діагностики, автоматично за заздалегідь визначеною специфікацією та оцінюються кількісно, можна використовувати для проведення підсумкового тестування.

Під час педагогічного експерименту ми використовували результати первинної діагностики як констатувальний експеримент, а результати одного з комплексних тестів (проведений одночасно для всіх учнів у спеціально відведений час) – як контрольний експеримент. Розглянемо результати педагогічного експерименту, проведеного у четвертій чверті 2025-2026 навчального року на базі комунального закладу «Полтавський міський багатoproфільний ліцей ім. І. П. Котляревського». У дослідженні взяли участь 87 здобувачів освіти 11 класів, з них 42 у експериментальній групі та 45 у контрольній групі. У таблиці 3 наведено результати первинної діагностики та підсумкового тесту експериментальної групи, для яких підсумкове повторення та систематизація здійснювалися із застосуванням адаптивних технологій.

Таблиця 3. Результати діагностичного та підсумкового тестів експериментальної групи

№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після
1	18	31	10	13	27	19	18	30	28	22	22	37	10	22
2	20	25	11	16	26	20	12	10	29	20	18	38	27	30
3	26	32	12	23	19	21	16	27	30	17	28	39	29	28
4	12	18	13	17	13	22	27	32	31	14	29	40	9	15
5	5	6	14	20	28	23	13	17	32	13	10	41	12	12
6	27	38	15	5	20	24	19	27	33	23	25	42	20	16
7	28	32	16	29	32	25	24	31	34	28	32			
8	19	32	17	9	10	26	13	28	35	22	29			
9	22	30	18	14	26	27	27	26	36	29	32			

Оскільки дані підсумкового тестування не відповідають нормальному розподілу, для порівняння результатів було застосовано непараметричний критерій Вілкоксона для зв'язаних вибірок. Відповідно до результатів розрахунків, відмінності між показниками первинного діагностичного та підсумкового тестів є статистично значущими із чітко вираженою тенденцією до зростання балів здобувачів освіти ($z = 3,63, p = 0,0003$). Це свідчить про те, що позитивна динаміка результатів не є випадковою, а реалізовані повторення та

систематизація із застосуванням адаптивних технологій мали вплив на прогрес учнів. Натомість для контрольної групи (таблиця 4), де підсумкове повторення та систематизація здійснювалися без застосування адаптивних технологій, відмінності між результатами первинного діагностичного та підсумкового тестів на рівні значущості $\alpha = 0,05$ не мають статистичної значущості ($z = 1,283, p = 0,199$). Це свідчить про те, що позитивна динаміка середніх балів (16,27 до повторення та систематизації і 19,13 після) може мати випадковий характер. Отримані статистичні дані підтверджують, що впровадження пропонованої адаптивної практико-орієнтованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики забезпечує позитивний педагогічний ефект у межах досліджуваної вибірки учнів.

Таблиця 4. Результати діагностичного та підсумкового тестів контрольної групи

№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після
1	14	26	10	30	30	19	22	22	28	19	19	37	9	9
2	20	30	11	8	4	20	17	17	29	24	31	38	20	25
3	12	13	12	15	25	21	6	8	30	8	7	39	15	11
4	16	14	13	20	22	22	18	14	31	18	17	40	14	18
5	11	21	14	9	21	23	28	31	32	15	22	41	17	26
6	6	6	15	11	7	24	13	14	33	16	13	42	19	24
7	8	14	16	11	8	25	22	27	34	26	35	43	19	27
8	27	31	17	14	25	26	5	3	35	4	9	44	22	26
9	14	10	18	11	21	27	26	28	36	30	27	45	23	23

Також на констатувальному етапі експерименту було проведено порівняльний аналіз результатів первинної діагностики експериментальної та контрольної груп із застосуванням непараметричного критерію Манна-Вітні. Отримані дані ($z = 1,65 < 1,96, p = 0,099 > 0,05$) свідчать про відсутність статистично значущих відмінностей між рівнями математичної підготовки учнів контрольної та експериментальної груп і підтверджують однорідність досліджуваних вибірок на початку педагогічного експерименту. Результати підсумкового тесту показали статистично значущі розбіжності між рівнями навчальних досягнень учнів двох груп ($z = 3,003 > 1,96, p = 0,003 < 0,05$). Це дозволяє відхилити нульову гіпотезу про рівність розподілів і констатувати, що експериментальна група, де впроваджувалася адаптивна практико-орієнтована технологія, показала вищий приріст знань порівняно з контрольною.

Висновки і перспективи подальших досліджень. У статті здійснено теоретичне обґрунтування та експериментальну перевірку ефективності розробленої практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики. Визначено, що обмежений час на проведення підсумкового повторення та систематизації у закладах загальної середньої освіти, нерегламентованість способу їх реалізації, а також розбіжності у рівнях когнітивних особливостей і навчальних досягнень здобувачів освіти, потребують гнучкості і персоналізації освітньої траєкторії. Одним зі способів такої персоналізації є застосування адаптивних технологій. Науково-методичні публікації щодо повторення та систематизації шкільного курсу математики, а також застосування адаптивних технологій у навчанні математики, мають розрізнений та фрагментарний характер. Зокрема, комплексних досліджень щодо впровадження адаптивних технологій під час повторення та систематизації курсу математики, не було виявлено. Тому нами розроблено та апробовано практико-орієнтовану адаптивну технологію повторення та систематизації шкільного курсу математики, яка складається із трьох основних етапів: первинної діагностики, тематичного практико-орієнтованого повторення навчального матеріалу; практичного відпрацювання навичок за допомогою комплексних тестів.

Емпіричні дані, отримані під час педагогічного експерименту підтвердили ефективність розробленої технології. Було порівняно результати двох груп (контрольної та експериментальної) на констатувальному та підсумковому етапах експерименту, а також поступ у межах кожної групи до та після реалізації повторення та систематизації шкільного курсу математики. За допомогою критерію Манна-Вітні визначено, що на початку обидві групи мали однорідні результати, натомість після повторення та систематизації одержано статистично значущі розбіжності в результатах. Порівняння поступу учнів експериментальної групи за допомогою критерію Вілкоксона для зв'язаних вибірок показало, що відмінність між результатами первинного діагностичного та підсумкового тестів є статистично значущою. Натомість для контрольної групи статистичної значущості між результатами первинного діагностичного та підсумкового тестів не виявлено, що свідчить про можливий випадковий характер змін. Отже, учні експериментальної групи, які здійснювали повторення та систематизацію за адаптивною практико-орієнтованою технологією, продемонстрували надійні, статистично значущі результати, які мають закономірний (невипадковий) характер, тоді як позитивні зрушення в контрольній групі, з якою не застосовували адаптивні технології, не знайшли статистичного підтвердження і можуть бути наслідком випадкових чинників.

З огляду на невелику вибірку і локальний характер (впровадження у межах лише одного закладу освіти), окреслені результати відображають проміжний (пілотний) етап дослідження. Це обмежує репрезентативність висновків на загальнодержавний рівень. Проте зафіксована позитивна динаміка є вагомим підґрунтям для твердження про життєздатність авторської

технології та актуалізує завдання щодо верифікації її результативності на репрезентативній вибірці ширшої географічної структури.

Конфлікт інтересів. Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список використаних джерел

- Бойко, О. Ю., Василюк-Зайцева, С. В., & Моторіна, В. Г. (2026). Контрольоване випробування адаптивних систем III в персоналізації викладання математики в старшій школі. *Педагогічна Академія: наукові записки*, (28). <https://doi.org/10.5281/zenodo.19014649>
- Бойко, Ю. В. (2025a). Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення шкільного курсу математики. *ScienceRise: Pedagogical Education*, 3 (64), 27-32. <http://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.337529>
- Бойко, Ю. В. (2025b). Особливості підготовки та реалізації адаптивного тесту з теми "Нерівності". *ScienceRise: Pedagogical Education*, 4 (65), 4-9. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.345529>
- Вашуленко, О. В. (2008). Способи повторення навчального матеріалу. *Науковий вісник Чернівецького університету*, 419, 23-29. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/713533>
- Дем'яненко, В. М. (2016). Тенденції розвитку адаптивних освітніх систем. *Друга Міжнародна конференція з адаптивних технологій управління навчанням ATL-2016*, 41-43. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/708550>
- Дерець, Є. В. (2018). Методика розробки адаптивних навчальних тестів з вищої та прикладної математики. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*, 33, 127-132. <https://doi.org/10.31319/2519-2884.33.2018.212>
- Ляшенко, О. І. (2019). Адаптивне навчання як ознака сучасних дидактичних систем. *Актуальні проблеми психології. Психологічна теорія і технологія навчання*, 10 (8), 185-195. <http://appspsychology.org.ua/index.php/ua/arkhiv-vydannia/tom-8/vipusk-10-2019-t8-u>
- Міністерство освіти і науки України. (2017). Навчальні програми з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- Могорита, Н. І., & Лавренова, М. В. (2017). Організація повторення навчального матеріалу у процесі початкового навчання. У Т. Д. Щербан (Ред.), *Освіта і формування конкурентоспроможності фахівців в умовах євроінтеграції: збірник тез доповідей за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції* (с. 258-260). <http://dspace.msu.edu.ua:8080/jspui/handle/123456789/5643>
- Пономаренко, В., & Пономаренко, В. (2025). Адаптивні математичні завдання як ресурс розвитку цифрової компетентності майбутніх учителів математики. *Редакційна рада*, 56, 56-57. https://sspu.edu.ua/images/2025/docs/nauka/konf/zbirnik_npk-2025_cc3e0.pdf#page=57
- Савченко, О. Я. (2012). Дидактика початкової освіти: підручник. Київ: Грамота, 504.
- Слепкань, З. І. (2006). Методика навчання математики (2-ге вид.): підручник. К.: Вища школа, 582.
- Урум, Г. Д., & Малайрева, К. А. (2023). Адаптивне навчання при вивченні методу координат в шкільному курсі математики. *Адаптивні технології управління навчанням: збірник матеріалів дев'ятої міжнародної конференції* (с. 24-26). Видавництво ІЦО НАПН України. <http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/18359>
- Урум, Г. Д., & Співак, М. І. (2023). Адаптивне навчання при вивченні тригонометричних рівнянь та нерівностей з параметрами в шкільному курсі математики. *Адаптивні технології управління навчанням: збірник матеріалів дев'ятої міжнародної конференції* (с. 58-59). Видавництво ІЦО НАПН України. <http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/18376>
- Школьний, О., & Захарійченко, Ю. (2016). Методичні рекомендації щодо створення якісних тестових завдань з математики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*, 6 (90), 207-220.
- Школьний, О., & Захарійченко, Ю. (2017). Розв'язування типових тестових завдань під час підготовки до ЗНО з математики. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені МП Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі*, (18), 203-210

References

- Boiko, O., Vasylyuk-Zaitseva, S., & Motorina, V. (2026). Kontrolovane vyprobuвання adaptivnykh system ShI v personalizatsii vykladannia matematyky v starshii shkoli [Controlled testing of adaptive AI systems in personalizing mathematics teaching in high school]. *Pedagogical Academy: scientific notes*, (28). <https://doi.org/10.5281/zenodo.19014649> [in Ukrainian]
- Boiko, Yu. (2025a). Conceptual model of a practice-oriented adaptive technology for reviewing the school mathematics course [Kontseptualna model praktyko-oriientovanoi adaptivnoi tekhnologii povtorennia shkilnoho kursu matematyky]. *ScienceRise: Pedagogical Education*, 3 (64), 27-32. <http://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.337529> [in Ukrainian]
- Boiko, Yu. (2025). Features of the development and implementation of an adaptive test on the topic “inequalities”. *ScienceRise: Pedagogical Education*, (4 (65), 4-9. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.345529>
- Vashulenko, O.. (2008). Sposoby povtorennia navchalnoho materialu [Methods of repeating educational material]. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University*, 419, 23-29. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/713533> [in Ukrainian]
- Demianenko, V. (2016). Tendentsii rozvytku adaptivnykh osvitnikh system [Trends in the development of adaptive educational systems]. *Second International Conference on Adaptive Learning Management Technologies ATL-2016*, 41-43. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/708550> [in Ukrainian]
- Derets, Ie. (2018). Metodyka rozrobky adaptivnykh navchalnykh testiv z vyshchoi ta prykladnoi matematyky [Methodology for developing adaptive educational tests in higher and applied mathematics]. *Collection of scientific papers of the Dnipro State Technical University (technical sciences)*, 33, 127-132 <https://doi.org/10.31319/2519-2884.33.2018.212> [in Ukrainian]
- Liashenko, O. (2019). Adaptivne navchannia yak oznaka suchasnykh dydaktychnykh system [Adaptive learning as a feature of modern didactic systems]. *Current problems of psychology. Psychological theory and learning technology*, 10 (8), 185-195. <http://appsychology.org.ua/index.php/ua/arkhiv-vydannia/tom-8/vipusk-10-2019-t8-u> [in Ukrainian]
- Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy (2017). Navchalna prohrama z matematyky (algebra i pochatky analizu ta heometrii) dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. [Mathematics curriculum (algebra and beginnings of analysis and geometry) for students in grades 10-11 of secondary schools]. Retrieved from <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> [in Ukrainian]
- Mohoryta, N., & Lavrenova, M. (2017). Orhanizatsiia povtorennia navchalnoho materialu u protsesi pochatkovoho navchannia [Organization of repetition of educational material in the process of initial training]. *Education and formation of competitiveness of specialists in the conditions of European integration: collection of abstracts of reports based on the materials of the International Scientific and Practical Conference*, 258-260. <http://dspace.msu.edu.ua:8080/jspui/handle/123456789/5643> [in Ukrainian]
- Ponomarenko, V., & Ponomarenko, V. (2025). Adaptivni matematychni zavdannia yak resurs rozvytku tsyfrovoi kompetentnosti maibutnikh uchyteliv matematyky [Adaptive mathematical tasks as a resource for developing digital competence of future mathematics teachers]. *Editorial Board*, 56, 56-57. https://sspu.edu.ua/images/2025/docs/nauka/konf/zbirnik_npk-2025_cc3e0.pdf#page=57 [in Ukrainian]
- Savchenko, O. (2012). Dydaktyka pochatkovoi osvity: pidruchnyk [Didactics of primary education: textbook.]. Kyiv: *Hramota*, 504. [in Ukrainian]
- Слепкань, З. (2006). Сліпкань. Методика навчання математики: підручник [Mathematics Teaching Methods: Textbook]. К.: *Vyshcha shkola*, 582. [in Ukrainian]
- Urum, G., & Malaireva, K. (2023). Adaptivne navchannia pry vyvchenni metodu koordynat v shkilnomu kursu matematyky [Adaptive learning when studying the coordinate method in a school mathematics course]. *Adaptive Learning Management Technologies: Proceedings of the Ninth International Conference* (с. 24-26). Видавництво ІЦО НАПН України. <http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/18359> [in Ukrainian]
- Urum, G., & Spivak, M. (2023). Adaptivne navchannia pry vyvchenni trygonometrychnykh rivnian ta nerivnostei z parametramy v shkilnomu kursu matematyky [Adaptive learning when studying trigonometric equations and inequalities with parameters in the school mathematics course]. *Adaptive Learning Management Technologies: Proceedings of the Ninth International Conference* (с. 58-59). Видавництво ІЦО НАПН України. <http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/18376> [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O., & Zakhariichenko, Yu. (2016). Metodichni rekomendatsii shchodo stvorennia yakisnykh testovykh zavdan z matematyky [Methodological recommendations for creating high-quality mathematics test tasks]. *Pedagogical sciences: theory, history, innovative technologies*, 6 (90), 207-220. [in Ukrainian]
- Shkolnyi, O., & Zakhariichenko, Yu. (2017). Rozviazuvannia typovykh testovykh zavdan pid chas pidhotovky do ZNO z matematyky [Solving typical test problems while preparing for the external assessment in mathematics]. *Scientific Journal of the National Pedagogical University named after MP Dragomanov. Series 3: Physics and Mathematics in Higher and Secondary Schools*, (18), 203-210 [in Ukrainian]

Отримано / Received 14.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 18.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 378.147:373.5.016:51:004.9

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-124-134

Лабораторний практикум для підготовки майбутніх учителів математики до використання навчальних платформ

Ольга Матяш¹, Валентин Риндюк²

1. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна

E-mail: matyash_27@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7149-9545>

2. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна

E-mail: Valentine.Rydyuk@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1026-4401>

Анотація. У нинішніх умовах розвитку шкільної освіти навчальні платформи набувають особливого значення як засіб організації навчання, який дає змогу розширити можливості традиційного уроку й модернізувати освітній процес. Потребують подальшого наукового осмислення питання добору навчальних платформ відповідно до цілей, змісту й очікуваних результатів навчання математики. Мета даної статті - пояснити місце і роль лабораторного практикуму «Використання навчальних платформ у навчанні математики» в дидактичній системі формування методичних компетентностей майбутніх учителів математики. За допомогою анкетування з'ясовано, у який спосіб вчителі математики використовують цифрові інструменти та які їхні враження щодо доцільності використання платформ у навчанні учнів математики. Виявлено, що ефективність використання цифрових ресурсів значно залежить від здатності вчителя методично виважено інтегрувати платформи у комплексну стратегію навчання. Наукова новизна дослідження полягає у розробці, презентації та обґрунтуванні 5 лабораторних робіт, спрямованих на формування здатності майбутніх учителів математики методично обґрунтовано добирати, аналізувати й використовувати навчальні платформи у процесі навчання математики. Апробація розробленого лабораторного практикуму в освітньому процесі підготовки студентів магістратури дала змогу перевірити його змістову повноту, методичну послідовність і практичну спрямованість. Дидактична цінність практикуму полягає в тому, що він орієнтує майбутнього вчителя не на формальне використання цифрових сервісів, а на осмислення педагогічної доцільності кожного методичного рішення. Результати нашого дослідження засвідчують доцільність посилення методичної складової підготовки майбутніх учителів математики в умовах цифровізації освітнього процесу.

Ключові слова: навчальні платформи, майбутні вчителі математики, лабораторний практикум, навчання математики.

Laboratory Practicum for Preparing Future Mathematics Teachers to Use Learning Platforms

Olha Matiash¹, Valentyn Ryndiuk²

1. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: matyash_27@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7149-9545>

2. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: Valentine.Rydyuk@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1026-4401>

Abstract. In the current context of school education development, learning platforms are becoming increasingly important as a means of organizing instruction, enabling teachers to expand the possibilities of traditional classroom teaching and modernize the educational process. However, further research is needed to determine how learning platforms should be selected in accordance with the objectives, content, and expected learning outcomes of mathematics education. The purpose of this study is to explain the place and role of the laboratory practicum "Using Learning Platforms in Mathematics Education" within the didactic system for developing the methodological competencies of future mathematics teachers. A questionnaire survey was conducted to investigate how mathematics teachers use digital tools and to identify their perceptions of the appropriateness of employing learning platforms in mathematics instruction. The findings indicate that the effective use of digital resources largely depends on teachers' ability to integrate learning platforms into a comprehensive instructional strategy in a methodologically sound manner. The scientific novelty of the study lies in the development, presentation, and justification of five laboratory assignments designed to develop future mathematics teachers' ability to select, analyze, and apply learning platforms in mathematics teaching based on sound methodological principles. The implementation of the laboratory practicum in the master's degree programme made it possible to evaluate its content validity, methodological consistency, and practical orientation. The didactic value of the practicum lies in encouraging future teachers not merely to use digital services formally but to critically reflect on the pedagogical appropriateness of every methodological decision. The findings confirm the need to strengthen the methodological component of future mathematics teachers' professional preparation in the context of the digitalization of education.

Keywords: learning platforms; future mathematics teachers; laboratory practicum; mathematics education.

Постановка проблеми. Потреба у цифровій компетентності вчителів нині зростає разом із вимогами, які ставить перед нами цифрова сучасність. У нинішніх умовах розвитку шкільної освіти навчальні платформи набувають особливого значення як засіб організації навчання, який дає змогу розширити можливості традиційного уроку й модернізувати освітній процес.

Для власного дослідження ми розробили і запропонували вчителям математики Вінницької області анкету на тему «Використання цифрових навчальних платформ в освітньому середовищі». Важливо було з'ясувати, у який спосіб вчителі математики використовують цифрові інструменти та які їхні враження щодо доцільності використання платформ у навчанні учнів математики. Потрібно було також з'ясувати, в чому полягають основні проблеми вчителів Вінницького регіону щодо ефективної роботи з цифровими платформами. За результатами нашого опитування з'ясувалося, що протягом періоду дистанційного навчання 84,7% вчителів математики Вінниччини використовували платформу Google Classroom для проведення уроків. Для спілкування з учнями 76,8% учителів використовували платформу Meet. Також 37,8% опитаних нами учителів математики Вінниччини використовували платформу Zoom для проведення уроків. Використання цифрових ресурсів у процесі навчання математики за оцінками вчителів є необхідним та корисним перш за все для того, щоб представити абстрактні математичні поняття більш наочно для учнів.

Загальний підсумок здійсненого нами опитування вчителів математики Вінниччини: для забезпечення повноцінного засвоєння знань і формування навчально-інтелектуальних умінь в учнів, а також для того, щоб зробити урок математики цікавішим, варто використовувати цифрові навчальні платформи. Це дає можливість вивести сучасний урок математики на якісно новий рівень, розширити можливості ілюстративного супроводу уроку, розвивати усі види пам'яті учнів, полегшити розробку тестових та творчих завдань, створити умови для реалізації різних форм навчання та видів діяльності. Отже, наше опитування вчителів підтверджує, що вчителі математики використовують як класичні онлайн-платформи для організації та контролю навчання математики, так і інтерактивні інструменти для візуалізації складних математичних понять. Водночас, нам вдалося з'ясувати, що ефективність використання цих ресурсів значно залежить від рівня як цифрової так і методичної компетентності педагогів, від їхньої методичної підготовки, від здатності методично виважено інтегрувати платформи у комплексну навчальну стратегію.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Питання використання цифрових засобів і програмних середовищ у математичній освіті висвітлено у працях Ю. В. Ботузової (Ботузова, 2020), Р. С. Гуревича, М. Г. Друшляк (Друшляк, 2019), М. І. Жалдака, А. М. Коломієць, Т. М. Махомети, О. І. Матяш (Матяш, 2021, 2023, 2025), Л. Ф. Михайленко (Михайленко, 2021), О. В. Семеніхіної та інших українських дослідників. Аналіз сучасних дисертаційних досліджень 2020–2026 років засвідчує посилення уваги науковців до проблем цифровізації

освіти, використання цифрових освітніх ресурсів, мобільних застосунків, комп'ютерно орієнтованих навчальних середовищ і навчальних платформ. Ми виявили, зокрема, низку актуальних дисертацій, що стосуються проблеми підготовки майбутніх учителів до використання цифрових освітніх ресурсів. Зокрема, Р. Д. Банак досліджував підготовку майбутніх учителів природничих дисциплін до проєктування та використання мобільних додатків в освітньому процесі (Банак, 2025); Кравчина О. Є. — комп'ютерно орієнтоване навчальне середовище розвитку підприємницької компетентності вчителів у післядипломній освіті (Кравчина, 2026); А. В. Рудик – професійну підготовку майбутніх учителів математики до технологізації освітнього процесу в умовах профільної школи (Рудик, 2021); М. С. Севастьянова – педагогічні умови формування цифрової компетентності майбутніх учителів початкових класів (Севастьянова, 2024). Науковий інтерес викликає не стільки сам факт використання платформ у навчальному процесі, скільки питання їх методично доцільного та ефективного застосування.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Для методики навчання математики принципово важливим є не лише доступ учнів до цифрових матеріалів, а й те, як саме за допомогою платформ організовується засвоєння математичних понять, формування способів дій, розвиток логічного мислення, відпрацювання навичок розв'язування задач, здійснення контролю й самоконтролю. Саме тому навчальні платформи мають розглядатися передусім у площині методичних рішень: добору змісту, форм, методів, прийомів, видів завдань і способів педагогічної взаємодії, які забезпечують формування математичних компетентностей учнів. Зокрема, потребують подальшого наукового осмислення питання дидактичних можливостей навчальних платформ у методичній діяльності вчителя математики та критеріїв добору платформ відповідно до цілей, змісту й очікуваних результатів навчання математики.

Мета даної статті: пояснити місце і роль лабораторного практикуму «Використання навчальних платформ у навчанні математики» в дидактичній системі формування методичних компетентностей майбутніх учителів математики.

Виклад основного матеріалу. Практичний досвід українських шкіл підтверджує, що впровадження цифрових платформ відбувається через поступову інтеграцію їх у щоденну роботу педагогів. Вчителі використовують платформи для створення навчальних матеріалів, організації дистанційних уроків, проведення тестування та забезпечення індивідуального підходу до учнів. Позитивним є те, що учні отримують можливість опрацьовувати матеріал у власному темпі, повторювати складні теми та одержувати миттєвий зворотний зв'язок. Водночас, наш аналіз відповідного досвіду вчителів математики Вінниччини показав наявність викликів, пов'язаних із недостатньою цифровою та методичною компетентністю окремих педагогів. Сучасна прогресивна практика застосування навчальних платформ у навчанні математики демонструє перспективність та високий потенціал для вдосконалення методики викладання математики, водночас вимагаючи системного підходу до підготовки

майбутніх учителів та розробки адаптованих навчальних матеріалів. Наші дослідження дозволяють стверджувати, що учителі математики, не завжди маючи достатню методичну підготовку для роботи з навчальними платформами, часто зіштовхуються з труднощами при інтеграції цифрових платформ у навчальний процес.

Використання цифрових платформ у навчанні математики вимагає відповідної методичної та цифрової компетентності вчителя. Педагогам необхідно забезпечувати зворотний зв'язок, організовувати регулярні консультації, що допоможуть учням зрозуміти навчальний матеріал та подолати можливі труднощі. Важливим аспектом є оцінка результативності використання навчальних платформ. Оцінка ефективності допомагає удосконалювати методичну діяльність вчителя та обирати найкращі платформи для навчання учнів математики.

Однією з ключових проблем є необхідність адаптації навчального процесу під особливості цифрових платформ. У навчальних планах підготовки майбутніх учителів математики вже звичними є освітні компоненти, вивчення яких дозволяє майбутнім учителям формувати цифрову компетентність, зокрема знання про навчальні платформи. Однак, підготовка майбутніх учителів математики до використання навчальних платформ має охоплювати не лише інструментальний, а й методичний, аналітичний, проєктувальний та оцінювальний аспекти майбутньої професійної діяльності. Це підтверджує необхідність комплексного підходу до підготовки майбутніх учителів математики щодо використання навчальних платформ. Ефективне застосування цифрових ресурсів у навчанні математики не може зводитися лише до технічного опанування окремих сервісів або епізодичного використання інтерактивних завдань на уроці. Відчутна потреба у методичних рекомендаціях щодо якісної інтеграції платформ у процес навчання учнів математики. Методично доцільне використання навчальних платформ передбачає здатність учителя встановлювати зв'язок між дидактичною метою, змістом математичного матеріалу, характером навчальної діяльності учнів, формами організації роботи, способами контролю, самоконтролю, зворотного зв'язку та очікуваними результатами навчання (МОН, 2016). У контексті навчання математики така підготовка має особливу предметну специфіку. Майбутній учитель повинен не лише орієнтуватися у функціональних можливостях навчальних платформ, а й розуміти, які саме види математичної діяльності вони здатні підтримувати: візуалізацію математичних об'єктів, побудову й аналіз графіків, дослідження функціональних залежностей, моделювання, опрацювання теоретичного матеріалу, тренувальну діяльність, самостійну роботу, формувальне оцінювання, аналіз типових помилок та індивідуалізацію навчальних завдань.

З метою забезпечення умов формування методичної готовності та здатності майбутніх учителів математики до ефективного використання навчальних платформ в організації навчання математики нами розроблено і апробовано лабораторний практикум

«Використання навчальних платформ у навчанні математики». Практикум має на меті підвищення якості методичної підготовки майбутніх учителів математики. Лабораторний практикум спрямований передусім на формування здатності майбутніх учителів математики методично обґрунтовано добирати, аналізувати й використовувати навчальні платформи у процесі навчання математики.

На лабораторних заняттях навчальної дисципліни «Дослідно-експериментальна діяльність вчителя математики» студенти магістратури опановували добір навчальних платформ для підготовки й проведення уроків математики, аналізували їхні функціональні можливості та проектували фрагменти уроків алгебри й геометрії. Наступним етапом були завдання щодо організації самостійної пізнавальної діяльності старшокласників із використанням цифрових платформ. Особливу увагу приділено аналізу педагогічних практик учителів математики, оцінюванню ефективності використання платформ на уроці та проектуванню цілісної системи їх застосування в навчанні математики старшої школи. Зміст лабораторних робіт дає змогу послідовно формувати у майбутніх учителів математики вміння проектувати уроки з використанням навчальних платформ, організовувати самостійну роботу старшокласників, аналізувати реальний педагогічний досвід, визначати критерії ефективності цифрових засобів і створювати власну систему їх застосування відповідно до цілей і змісту навчання математики.

Особливістю розробленого нами лабораторного практикуму «Використання навчальних платформ у навчанні математики» є наявність інструктивно-методичного супроводу до кожної лабораторної роботи. Інструкції побудовано таким чином, щоб студент не лише виконував окремі дії з навчальними платформами, а й усвідомлював методичну логіку їх використання в навчанні математики. У структурі лабораторних робіт поєднано короткі теоретичні відомості, завдання для самопідготовки, практичні завдання, вимоги до оформлення результатів, критерії оцінювання, контрольні запитання і рекомендовані джерела. Така побудова забезпечує зв'язок між теоретичним розумінням проблеми, практичним виконанням завдань, аналізом отриманих результатів і формуванням висновків щодо доцільності використання навчальних платформ у конкретних умовах навчання математики.

Лабораторна робота №1 спрямована на формування вмінь аналізувати навчальні платформи, визначати їх функціональні можливості та методичний потенціал у навчанні математики. Її зміст орієнтований на те, щоб майбутні вчителі навчилися добирати цифрові ресурси не за принципом доступності або популярності, а відповідно до дидактичної мети, змісту математичного матеріалу, етапу уроку та очікуваних результатів навчання. У межах цієї роботи студенти мають встановити, які платформи доцільні для пояснення нового матеріалу, які – для тренувальної діяльності, які – для візуалізації, дослідження, контролю або організації взаємодії. Отже, перша лабораторна робота спрямована на формування базового аналітичного вміння: бачити навчальну платформу не як універсальний цифровий

інструмент, а як засіб, методична цінність якого залежить від конкретної педагогічної ситуації.

Лабораторна робота №2 стосується організації самостійної роботи старшокласників із використанням навчальних платформ. Її включення до практикуму зумовлене тим, що самостійна робота є одним із ключових напрямів використання цифрових платформ у старшій школі. У цьому контексті майбутній учитель має вміти не лише розмістити навчальний матеріал або завдання на платформі, а й спроектувати повноцінну самостійну діяльність учнів: визначити її мету, вид, послідовність виконання, рівень складності завдань, способи самоконтролю, критерії перевірки та форми зворотного зв'язку. Особливе значення має також уміння передбачати можливості індивідуалізації та диференціації завдань з урахуванням рівня математичної підготовки старшокласників.

Лабораторна робота №3 орієнтована на аналіз педагогічних практик використання навчальних платформ учителями математики. Її зміст передбачає вивчення реального педагогічного досвіду, представленого у відкритих методичних матеріалах, професійних публікаціях, авторських розробках учителів, матеріалах освітніх платформ і методичних спільнот. Такий підхід важливий для формування в майбутніх учителів здатності критично осмислювати не лише функції платформи, а й спосіб її педагогічного застосування. Студенти мають навчитися виявляти, з якою дидактичною метою вчитель використовує платформу, які види діяльності учнів вона підтримує, які переваги дає в конкретній педагогічній ситуації та які труднощі можуть виникати під час її використання.

Лабораторна робота №4 спрямована на формування вмінь оцінювати ефективність використання навчальних платформ на уроці математики. У межах цієї роботи майбутні вчителі мають навчитися визначати критерії та показники ефективності, співвідносити їх із дидактичною метою уроку, змістом математичного матеріалу, активністю учнів, якістю зворотного зв'язку та результатами навчання. Важливо, що ефективність платформи розглядається не як її технічна зручність або зовнішня інтерактивність, а як ступінь її впливу на якість математичної діяльності учнів, глибину засвоєння матеріалу, можливості самоконтролю, індивідуалізації та корекції навчання.

Лабораторна робота №5 має узагальнювальний характер і спрямована на проектування системи використання навчальних платформ у навчанні математики в старшій школі. Її зміст відображає перехід від аналізу окремих цифрових інструментів до побудови цілісної, функціонально узгодженої системи їх використання. У межах цієї роботи студенти визначають цільовий, змістовий, діяльнісний, технологічний, оцінювальний і результативний компоненти такої системи, обґрунтовують місце кожної платформи, встановлюють зв'язки між ними та пояснюють, яким чином їх поєднання сприяє досягненню очікуваних результатів навчання математики.

Апробація розробленого лабораторного практикуму в освітньому процесі підготовки студентів магістратури дала змогу перевірити його змістову повноту, методичну послідовність і практичну спрямованість. Можемо стверджувати, що виконання запропонованих нами лабораторних робіт забезпечує залучення майбутніх учителів математики до таких видів діяльності, які відповідають реальним професійним задачам: аналізу навчальних платформ, добору цифрових інструментів для конкретної теми, розроблення матеріалів для самостійної роботи учнів, порівняння педагогічних практик, визначення критеріїв ефективності та проектування системи використання платформ. Отже, лабораторний практикум «Використання навчальних платформ у навчанні математики» конкретизує наш авторський підхід до подолання проблеми формування готовності та здатності майбутніх учителів математики до ефективного використання навчальних платформ у навчанні учнів математики.

Зміст лабораторного практикуму забезпечує зв'язок між теоретичною підготовкою студентів і їхньою майбутньою професійною діяльністю. Виконуючи лабораторні роботи, студенти не лише ознайомлюються з можливостями окремих платформ, а й навчаються аналізувати педагогічну ситуацію, добирати цифрові інструменти відповідно до навчальної мети, прогнозувати труднощі, організовувати різні види діяльності учнів, визначати критерії ефективності та обґрунтовувати власні методичні рішення. Це дає підстави розглядати розроблений нами лабораторний практикум як один із засобів забезпечення ключової організаційно-педагогічної умови ефективного використання навчальних платформ у навчанні учнів математики – відповідна цифрова та методична компетентність учителя математики.

Для забезпечення сталості цифрової модернізації навчання необхідно, щоб використання навчальних платформ у школі було закріплене на рівні локальних нормативних документів. На наш погляд, це може бути, для прикладу, Положення про використання цифрових освітніх технологій, в якому, зокрема, мають бути унормовані політика безпеки даних, механізми заохочення педагогів до інновацій. Керівництво школи має забезпечити технічну та консультативну підтримку педагогів, створити команду цифрової трансформації (Digital Team), а також інтегрувати цифрові інструменти у систему внутрішнього забезпечення якості освіти. Якщо ж застосування навчальних платформ залишається лише індивідуальною ініціативою окремого вчителя, воно часто має фрагментарний характер. Натомість, закріплення основних підходів до використання платформ у внутрішніх документах школи дає змогу забезпечити узгодженість дій адміністрації, учителів і учнів, та визначити спільні правила роботи в цифровому середовищі. Зміст Положення має охоплювати не лише технічні аспекти використання цифрових ресурсів, а й педагогічні, методичні та безпекові питання, від яких залежить якість цифрової освітньої взаємодії.

На нашу думку, орієнтовна структура Положення про використання навчальних платформ в освітньому процесі ЗЗСО може містити такі розділи:

Загальні положення.

У цьому розділі визначається призначення положення, сфера його застосування, основні поняття та загальна мета використання навчальних платформ в освітньому процесі.

2. Мета і завдання використання навчальних платформ.

Розділ окреслює, для чого саме платформи використовуються в навчанні: організація навчальної діяльності, підтримка самостійної роботи учнів, здійснення зворотного зв'язку, формувальне оцінювання, індивідуалізація навчання, розвиток математичної компетентності.

3. Добір і використання навчальних платформ.

У цьому розділі визначаються основні критерії добору платформ: відповідність освітнім цілям, віковим особливостям учнів, змісту навчального предмета, технічним можливостям закладу освіти, вимогам безпеки та доступності.

4. Організація роботи учасників освітнього процесу.

Розділ описує загальні функції адміністрації, учителів, учнів і батьків у процесі використання навчальних платформ. Особливу увагу доцільно приділити ролі вчителя як організатора цифрової навчальної діяльності, а не лише користувача платформ.

5. Безпека, академічна доброчесність і захист даних.

У цьому розділі визначаються базові правила безпечної поведінки в цифровому середовищі, відповідального використання навчальних матеріалів, дотримання академічної доброчесності та захисту персональних даних учасників освітнього процесу.

6. Методичний супровід і підвищення цифрової компетентності педагогів.

Розділ передбачає організацію консультацій, обміну досвідом, внутрішніх методичних заходів, взаємодопомоги між педагогами та поступового вдосконалення практик використання навчальних платформ.

7. Моніторинг ефективності використання навчальних платформ.

У цьому розділі окреслюються способи аналізу результативності використання платформ: спостереження за навчальною активністю учнів, аналіз результатів виконання завдань, зворотний зв'язок від учнів і педагогів, коригування подальшої роботи.

Усі необхідні аспекти діяльності вчителя математики у відповідності до вказаного нами орієнтовного Положення про використання навчальних платформ в освітньому процесі передбачені нами у змісті лабораторного практикуму «Використання навчальних платформ у навчанні математики».

З метою підтвердження ефективності вказаного лабораторного практикуму «Використання навчальних платформ у навчанні математики» проведено вхідний та підсумковий зрізи обізнаності студентів магістратури (майбутніх учителів математики) з методикою використання навчальних платформ у навчанні учнів математики. З'ясовано, що майбутні вчителі математики, які виконали всі завдання лабораторного практикуму,

залишилися задоволеними отриманими знаннями та вміннями. Майже всі вказували на те, що цифрові платформи здатні радикально змінювати навчальний простір, поєднуючи можливості традиційного та онлайн-навчання, а також розширюють дидактичний інструментарій вчителя математики. Практикум конкретизує методичну діяльність учителя математики в умовах цифровізації освіти й водночас виступає практичним інструментом підготовки майбутніх педагогів до використання навчальних платформ як засобу формування математичних компетентностей старшокласників.

Висновки. Ефективне використання навчальних платформ у шкільній математичній освіті залежить не від кількості залучених цифрових ресурсів, а від того, наскільки учитель уміє пов'язати їх із дидактичною метою, змістом навчального матеріалу, характером математичної діяльності учнів та очікуваними результатами навчання. Наш лабораторний практикум «Використання навчальних платформ у навчанні математики» побудовано за логікою поступового ускладнення професійно-методичних дій майбутнього вчителя математики. Дидактична цінність практикуму полягає в тому, що він орієнтує майбутнього вчителя не на формальне використання цифрових сервісів, а на осмислення педагогічної доцільності кожного методичного рішення.

Результати нашого дослідження засвідчують доцільність посилення методичної складової підготовки майбутніх учителів математики в умовах цифровізації освітнього процесу. Проте ми усвідомлюємо, що запропонований нами практикум не вичерпує усіх аспектів проблеми методично обґрунтованого використання навчальних платформ у процесі формування математичних компетентностей учнів. Перспективним вважаємо розроблення критеріїв, показників і діагностичного інструментарію для оцінювання рівня сформованості математичних компетентностей старшокласників в умовах використання навчальних платформ у навчанні математики.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи. Представлені у статті результати та висновки є власним інтелектуальним внеском авторів

Список використаних джерел

- Банак, Р. Д. (2025). *Підготовка майбутніх учителів природничих дисциплін до проектування та використання мобільних додатків в освітньому процесі* (Doctoral dissertation, Український державний університет імені Михайла Драгоманова).
- Ботузова, Ю. В. (2020). Досвід використання засобів ІКТ у навчанні математичного аналізу майбутніх учителів математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 75(1), 153–169. <https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.2530>
- Воевода, А. Л., & Притуляк, М. Д. (2024). Формування готовності майбутніх учителів математики до застосування цифрових дидактичних ігор. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 1, 98–106. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-1-98-106>
- Друшляк, М. Г., Лукашова, Т. Д., & Скасків, Л. В. (2019). Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням GeoGebra. *Фізико-математична освіта*, 19(1), 35–40. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-006>
- Кравчина, О. Є. (2026). *Комп'ютерно орієнтоване навчальне середовище розвитку підприємницької компетентності вчителів у післядипломній освіті* (Doctoral dissertation, Інститут цифровізації освіти Національної академії педагогічних наук України).

- Матяш, О. І., Михайленко, Л. Ф., & Воевода, А. Л. (2021). Актуальні аспекти міжнародних досліджень використання інформаційних технологій навчання в галузі математичної освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, 60, 81–90. <https://doi.org/10.31652/24121142-2021-60-81-90>
- Матяш, О. І., & Риндюк, В. В. (2025). Використання цифрових навчальних платформ в математичній освіті: досвід Данії. *Наукові інновації та передові технології. Серія «Педагогіка»*, 2(42), 1503–1514. [https://doi.org/10.52058/2786-5274-2025-2\(42\)-1503-1514](https://doi.org/10.52058/2786-5274-2025-2(42)-1503-1514)
- Matiash, O., Panasenko, O., & Horiashyn, A. (2023). Learning platforms in the training of future mathematics teachers: Analysis of foreign experience. *ScienceRise: Pedagogical Education*, 4(55), 9–14. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2023.284676>
- Міністерство освіти і науки України. (2016). *Нова українська школа: Концептуальні засади реформування середньої школи*. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/novaukrainska-shkola-compressed.pdf>
- Рудик, А. В. (2021). *Професійна підготовка майбутніх учителів математики до технологізації освітнього процесу в умовах профільної школи* (Candidate of Sciences dissertation, Житомирський державний університет імені Івана Франка).
- Севастьянова, М. С. (2024). *Педагогічні умови формування цифрової компетентності майбутніх учителів початкових класів у педагогічних закладах вищої освіти* (Doctoral dissertation, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського).

References

- Banak, R. D. (2025). *Pidhotovka maibutnikh uchyteliv pryrodnychkh dystsyplin do proektuvannia ta vykorystannia mobilnykh dodatkov v osvithomu protsesi* (Doctoral dissertation, Ukrainian State University named after Mykhailo Drahomanov).
- Botuzova, Yu. V. (2020). Dosvid vykorystannia zasobiv IKT u navchanni matematychnoho analizu maibutnikh uchyteliv matematyky. *Information Technologies and Learning Tools*, 75(1), 153–169. <https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.2530>
- Drushliak, M. H., Lukashova, T. D., & Skaskiv, L. V. (2019). Navchannia maibutnikh vchyteliv matematyky rozviazuvaty zadachi teorii hrafiv iz vykorystanniam GeoGebra. *Physical and Mathematical Education*, 19(1), 35–40. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-006>
- Kravchyna, O. Ye. (2026). *Kompiuterno oriientovane navchalne seredovyshe rozvytku pidpriemnytskoi kompetentnosti vchyteliv u pisliadyplomnii osviti* (Doctoral dissertation, Institute for Digitalisation of Education of the National Academy of Educational Sciences of Ukraine).
- Matiash, O. I., Mykhailenko, L. F., & Voievoda, A. L. (2021). Aktualni aspekty mizhnarodnykh doslidzhen vykorystannia informatsiinykh tekhnolohii navchannia v haluzi matematychnoi osvity. *Modern Information Technologies and Innovative Methods of Training in Professional Education: Methodology, Theory, Experience, Problems*, 60, 81–90. <https://doi.org/10.31652/24121142-2021-60-81-90>
- Matiash, O. I., & Ryndiuk, V. V. (2025). Vykorystannia tsyfrovyykh navchalnykh platform v matematychnii osviti: Dosvid Danii. *Scientific Innovations and Advanced Technologies. Series: Pedagogy*, 2(42), 1503–1514. [https://doi.org/10.52058/2786-5274-2025-2\(42\)-1503-1514](https://doi.org/10.52058/2786-5274-2025-2(42)-1503-1514)
- Matiash, O., Panasenko, O., & Horiashyn, A. (2023). Learning platforms in the training of future mathematics teachers: Analysis of foreign experience. *ScienceRise: Pedagogical Education*, 4(55), 9–14. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2023.284676>
- Ministry of Education and Science of Ukraine. (2016). *New Ukrainian school: Conceptual principles of secondary school reform*. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/novaukrainska-shkola-compressed.pdf>
- Rudyk, A. V. (2021). *Profesiina pidhotovka maibutnikh uchyteliv matematyky do tekhnolohizatsii osvithoho protsesu v umovakh profilnoi shkoly* (Candidate of Sciences dissertation, Zhytomyr Ivan Franko State University).
- Sevastianova, M. S. (2024). *Pedahohichni umovy formuvannia tsyfrovoi kompetentnosti maibutnikh uchyteliv pochatkovykh klasiv u pedahohichnykh zakladykh vyshchoi osvity* (Doctoral dissertation, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University).
- Voievoda, A. L., & Prytuliak, M. D. (2024). Formuvannia hotovnosti maibutnikh uchyteliv matematyky do zastosuvannia tsyfrovyykh dydaktychnykh ihor. *Dydaktyka Matematyky: Teoriia, Dosvid, Innovatsii*, 1, 98–106. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-1-98-106>

Отримано / Received 06.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 10.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 378.147:001.8:51:37.011.3-051

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-135-145

Методологічний потенціал історії математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики

Світлана Яценко

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна

E-mail: s.ye.yatsenko@udu.edu.uaORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4274-1177>

Анотація. Мета статті полягає в обґрунтуванні методологічного потенціалу історії математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики та визначенні основних напрямів використання історії генези математичних понять для формування методологічної компетентності магістрів спеціальності А4 Середня освіта.

Методологія дослідження ґрунтується на використанні загальнонаукових методів аналізу, синтезу, узагальнення, систематизації та порівняння наукових джерел, а також історико-логічного підходу, який забезпечує розкриття особливостей виникнення, становлення та розвитку математичних понять і визначення їх ролі в професійній підготовці майбутніх учителів математики.

Наукова новизна полягає у виокремленні та характеристиці світоглядної, гносеологічної, методологічної, евристичної, культурологічної та професійно орієнтованої функцій історії математичних понять, а також в обґрунтуванні доцільності цілеспрямованого використання історії генези математичних понять як засобу формування методологічної компетентності майбутніх учителів математики у процесі вивчення дисципліни «Історія і методологія математики».

Встановлено, що історія математичних понять має методологічний потенціал і сприяє формуванню наукового світогляду, методологічної культури, творчого стилю мислення та професійної ідентичності майбутніх учителів математики. Показано, що аналіз генези фундаментальних математичних понять дозволяє розкрити закономірності розвитку математичного знання, сприяє усвідомленню взаємозв'язку історичного та логічного в математиці й підвищує готовність майбутніх учителів до свідомого використання історико-математичного матеріалу в професійній діяльності. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробленням методики використання історії математичних понять та оцінюванням її впливу на формування методологічної компетентності майбутніх учителів математики.

Ключові слова: історія математики, історико-математичний матеріал, майбутній учитель математики, математичні поняття, методологічна компетентність, методологія математики, професійна підготовка.

UDC 378.147:001.8:51:37.011.3-051

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-135-145

Methodological potential of the history of mathematical concepts in the professional training of future mathematics teachers

Svitlana Yatsenko

Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

E-mail: s.ye.yatsenko@udu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4274-1177>

Abstract. The purpose of the article is to substantiate the methodological potential of the history of mathematical concepts in the professional training of future mathematics teachers and to determine the main directions of using the history of the genesis of mathematical concepts for the development of methodological competence of master's students majoring in A4 Secondary Education.

The research methodology is based on the use of general scientific methods, including analysis, synthesis, generalization, systematization, and comparison of scientific sources, as well as the historical-logical approach, which makes it possible to reveal the peculiarities of the emergence, formation, and development of mathematical concepts and to determine their role in the professional training of future mathematics teachers.

The scientific novelty lies in identifying and characterizing the worldview, epistemological, methodological, heuristic, cultural, and professionally oriented functions of the history of mathematical concepts. It also consists in substantiating the expediency of purposeful use of the history of the genesis of mathematical concepts as a means of developing the methodological competence of future mathematics teachers while studying the course History and Methodology of Mathematics.

It has been established that the history of mathematical concepts possesses significant methodological potential and contributes to the formation of a scientific worldview, methodological culture, creative thinking style, and professional identity of future mathematics teachers. The study demonstrates that the analysis of the genesis of fundamental mathematical concepts makes it possible to reveal the regularities of the development of mathematical knowledge, promotes understanding of the relationship between the historical and logical aspects of mathematics, and enhances future teachers' readiness for the conscious use of historical and mathematical material in their professional activities. Prospects for further research are associated with the development of methods for applying the history of mathematical concepts and assessing its influence on the formation of methodological competence of future mathematics teachers.

Keywords: history of mathematics; historical and mathematical material; future mathematics teacher; mathematical concepts; methodological competence; methodology of mathematics; professional training.

Постановка проблеми. Сучасні тенденції розвитку математичної освіти, зумовлені компетентнісною парадигмою, цифровою трансформацією суспільства та оновленням змісту професійної підготовки педагогічних кадрів, актуалізують проблему формування у майбутніх учителів математики не лише ґрунтовних предметних знань, а й методологічної культури, наукового стилю мислення та здатності усвідомлювати математику як цілісну систему знань, що історично розвивається. Водночас у практиці підготовки магістрів спеціальності А4 Середня освіта предметної спеціалізації А4.04 Математика переважає формально-логічний підхід до вивчення математичних дисциплін, за якого математичні поняття подаються переважно у завершеному вигляді, без належного висвітлення їх генези, еволюції та методологічного значення.

Такий підхід не завжди забезпечує формування цілісного уявлення про закономірності розвитку математичної науки, ускладнює усвідомлення взаємозв'язку між історичним і логічним у процесі пізнання, обмежує можливості розвитку критичного мислення, дослідницьких умінь та здатності до методологічної рефлексії. Як наслідок, майбутні вчителі математики нерідко сприймають математичні поняття як статичні об'єкти, а не як результат тривалого історичного розвитку та наукового пошуку.

У зв'язку з цим постає проблема визначення та реалізації методологічного потенціалу історії математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики, зокрема з'ясування її ролі у формуванні наукового світогляду, математичної культури та готовності до свідомого використання історико-математичного матеріалу в майбутній педагогічній діяльності. Розв'язання цієї проблеми потребує теоретичного обґрунтування можливостей історії математичних понять як засобу розвитку методологічної компетентності майбутніх учителів математики та визначення шляхів її інтеграції у зміст їхньої професійної підготовки.

Аналіз джерел і останніх досліджень. Проблема використання історії математики та історії становлення математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики перебуває в полі зору як вітчизняних, так і зарубіжних дослідників.

Зокрема, у статті С. Лісковець, О. Гуди та В. Тимощука «Історія математики в контексті вивчення математичних дисциплін у закладах вищої освіти» обґрунтовано значення історії математики для формування цілісного наукового світогляду здобувачів вищої освіти, розкрито можливості інтеграції історико-математичного матеріалу в процес вивчення математичних дисциплін у ЗВО (Лісковець, Гуда, Тимошук, 2020, с.217). Історію становлення та розвитку української методичної науки досліджують О. Матяш і К. Ящук. У статтях, присвячених ретроспективному аналізу дисертаційних досліджень та розвитку наукових шкіл з теорії і методики навчання математики, розкрито еволюцію наукових підходів до математичної освіти та професійної підготовки вчителів математики (Матяш, Ящук, 2024).

Окремі аспекти методології математичного пізнання та історії розвитку математичних ідей відображено у працях М. В. Працьовитого, присвячених теорії дійсних чисел, історії

математичних відкриттів та творчій спадщині видатних українських математиків. Автор акцентує увагу на взаємозв'язку історичного розвитку математичних понять і формування сучасного математичного мислення, що має важливе значення для професійної підготовки майбутніх учителів математики (Працьовитий, Сита, 2018).

Значний інтерес становлять дослідження, присвячені професійній підготовці майбутніх учителів математики. Так, у статті В. Атамася та З. Сердюк «Роль історичних задач у формуванні фахових компетентностей майбутнього вчителя математики» показано дидактичний потенціал історичних задач і їхній вплив на розвиток професійних компетентностей майбутніх педагогів (Атамася, Сердюк, 2026).

Питання використання історичного матеріалу у навчанні математики розглянуто у праці Л. Месарош «Місце історичного матеріалу в процесі навчання математики». Авторка підкреслює, що систематичне звернення до історії математичних ідей сприяє розвитку пізнавального інтересу та глибшому розумінню математичних понять (Месарош, 2024).

Значний внесок у розроблення теоретичних і методологічних засад взаємозв'язку історії та педагогіки математики зробили зарубіжні вчені Ф. Фурінгетті, В. Кац, Л. Радфорд, У. Янквіст, М. Фрід, А. Карп, які розглядають історію математики не лише як джерело фактологічного матеріалу, а й як засіб формування математичного мислення, наукового світогляду та методологічної культури майбутнього вчителя.

Ф. Фурінгетті обґрунтовує два основні напрями використання історії математики в освіті: історію як засіб популяризації математики та історію як засіб конструювання математичних знань. Дослідниця наголошує на важливості історико-епістемологічного підходу для розуміння природи математичних понять, формування гнучкості мислення та усвідомлення математики як динамічної системи знань (Фурінгетті, 2020).

У працях А. Карпа та Ф. Фурінгетті розкрито основні напрями розвитку історії математичної освіти як самостійної галузі досліджень, визначено її методологічні засади та окреслено перспективи використання історичного матеріалу в підготовці майбутніх учителів математики (Карп, Фурінгетті, 2016).

Історичні аспекти розвитку математичної освіти, еволюцію змісту навчання, підручників та підготовки вчителів висвітлено в міжнародному довідковому виданні *Handbook on the History of Mathematics Education*, підготовленому за редакцією О. Карпа та Герта Шубрінга (Карп, Шубрінг, 2014).

Становлення математичної освіти як самостійної галузі наукових досліджень та її взаємозв'язок із історією математики досліджено у праці Ф. Фурінгетті, Х. Мануеля Матоса та Марти Менгіні *From Mathematics and Education to Mathematics Education* (Фурінгетті, Мануель Матос, Менгіні, 2016).

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Аналіз вітчизняних і зарубіжних наукових праць засвідчив, що дослідники приділяють значну увагу питанням

використання історії математики в освітньому процесі, історії математичної освіти, ролі історичних задач у формуванні професійних компетентностей майбутніх учителів математики, а також історико-епістемологічним аспектам розвитку математичного знання. Водночас переважна більшість досліджень зосереджена на дидактичних можливостях історичного матеріалу або на висвітленні окремих етапів становлення математичної науки.

Разом із тим недостатньо дослідженими залишаються питання, пов'язані з визначенням і цілеспрямованим використанням методологічного потенціалу історії, зокрема, математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики. Потребують подальшого теоретичного обґрунтування можливості використання історії генези математичних понять як засобу формування методологічної культури, наукового стилю мислення, здатності до методологічної рефлексії та усвідомлення математики як динамічної системи знань. Недостатньо висвітленими є також питання інтеграції історико-математичного матеріалу у зміст навчальної дисципліни «Історія і методологія математики» в процесі підготовки магістрів спеціальності А4 Середня освіта.

Мета статті полягає в обґрунтуванні методологічного потенціалу історії математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики та визначенні основних напрямів використання історії генези математичних понять для формування методологічної культури, наукового стилю мислення і професійної готовності магістрів спеціальності А4 Середня освіта до майбутньої педагогічної діяльності у процесі викладання навчальної дисципліни «Історія і методологія математики».

Виклад основного матеріалу. Розглянемо історію математичних понять як складову методологічної підготовки майбутніх учителів математики. Професійна підготовка майбутнього вчителя математики передбачає не лише оволодіння системою математичних знань, а й формування цілісного уявлення про математику як науку, що безперервно розвивається, відображаючи потреби суспільства та закономірності наукового пізнання. У цьому контексті важливого значення набуває історія математичних понять, яка дозволяє простежити процес виникнення, становлення та розвитку математичних ідей, зрозуміти їх логіку, взаємозв'язки та роль у формуванні сучасної математичної картини світу. На відміну від традиційного викладу математичних дисциплін, у якому поняття подаються в завершеному та формалізованому вигляді, історичний підхід дає змогу розглядати їх як результат тривалого розвитку людської думки. Саме тому історія математичних понять володіє значним методологічним потенціалом, що реалізується через низку взаємопов'язаних функцій. Виділяємо серед інших 6 на наш погляд ключових.

1. Світоглядна функція. Однією з найважливіших функцій історії математичних понять є світоглядна. Ознайомлення із процесом розвитку математичних ідей сприяє формуванню наукового світогляду майбутніх учителів математики, розумінню математики як складової загальнолюдської культури та результату інтелектуальної діяльності багатьох поколінь учених. Світоглядне значення історії математичних понять виявляється у формуванні

уявлення про математику як науку, що постійно розвивається. Так, наприклад, історія розвитку поняття числа демонструє поступовий перехід від натуральних чисел до дробових, від'ємних, ірраціональних, комплексних чисел. Поняття числа виникло з практичних потреб лічби. Спочатку людство користувалося лише натуральними числами, однак задачі вимірювання привели до виникнення дробів, торговельні операції – до від'ємних чисел, геометричні задачі про діагональ квадрата – до ірраціональних чисел, а розв'язування алгебраїчних рівнянь – до комплексних чисел. Кожен новий етап виникав у відповідь на практичні потреби та внутрішні суперечності попередніх математичних теорій. Таким чином, розширення поняття числа відображає діалектичний характер розвитку математичного знання. Усвідомлення цього факту сприяє формуванню у майбутніх учителів уявлення про математику як динамічну систему знань, а не як сукупність незмінних істин.

2. Гносеологічна функція. Гносеологічна функція пов'язана з розкриттям закономірностей математичного пізнання. Історія становлення математичних понять демонструє, що математичне знання не виникає миттєво, а формується через висування гіпотез, пошук нових способів розв'язання проблем, подолання суперечностей та уточнення раніше отриманих результатів. Так, поняття функції пройшло тривалий шлях розвитку. У XVII ст. Г. Лейбніц розумів функцію як геометричний об'єкт. Л. Ейлер пов'язував функцію з аналітичним виразом, а П. Діріхле сформулював сучасне означення, відповідно до якого функція задає відповідність між елементами двох множин. На прикладі функції видно, як змінювалися способи опису залежностей та поступово відбувався перехід від конкретних моделей до абстрактних структур.

Показовою є історія становлення поняття інтеграла. Його витoki пов'язані з античним методом вичерпування Евдокса та Архімеда, за допомогою якого обчислювали площі та об'єми. У XVII ст. І. Ньютон і Г. Лейбніц незалежно один від одного створили основи інтегрального числення та встановили зв'язок між інтегруванням і диференціюванням. Подальший розвиток поняття інтеграла пов'язаний з працями О. Коші та Б. Рімана, які надали йому строгого математичного обґрунтування. Таким чином, сучасне поняття інтеграла є результатом тривалої еволюції від геометричних уявлень до строгих аналітичних конструкцій.

Вивчення історії математичних понять сприяє усвідомленню взаємозв'язку між емпіричним та теоретичним рівнями пізнання, між індукцією та дедукцією, між конкретним і абстрактним. Це особливо важливо для майбутніх учителів математики, оскільки допомагає їм краще розуміти труднощі, які виникають у здобувачів освіти під час засвоєння нових понять.

3. Методологічна функція. Методологічна функція полягає у формуванні у майбутніх учителів математики уявлень про методи математичного дослідження та логіку побудови математичних теорій. Історія розвитку математичних понять переконливо свідчить про те,

що математика розвивається завдяки поєднанню різних методів пізнання: індукції, дедукції, аксіоматичного підходу, аналогії, моделювання, узагальнення, абстрагування та формалізації.

Особливо показовою є історія поняття границі. Архімед фактично використовував метод вичерпування, що містив інтуїтивні уявлення про границю. І. Ньютон та Г. Лейбніц пов'язували математичний аналіз з нескінченно малими величинами, однак відсутність строгого обґрунтування викликала критику сучасників. Лише у працях О. Коші та К. Вейерштраса було створено строгий ε - δ -підхід.

Не менш повчальною є історія неевклідової геометрії. Упродовж двох тисячоліть математики намагалися довести п'ятий постулат Евкліда, однак праці М. Лобачевського, Я. Бойяї та К. Гауса показали можливість існування інших геометрій. Цей приклад ілюструє значення аксіоматичного методу та демонструє, що зміна системи аксіом може приводити до створення нових математичних теорій. Такий підхід допомагає майбутнім учителям усвідомити, що математична строгість є результатом тривалого розвитку науки, а не її початковою властивістю.

4. Евристична функція. Важливе значення має евристична функція історії математичних понять. Історія математики містить численні приклади творчого пошуку, висування гіпотез, помилок і несподіваних відкриттів.

Так, поняття похідної виникло при розв'язанні задач про швидкість руху та проведення дотичної до кривої. Ньютон розглядав флюксії, а Лейбніц – диференціали. Незалежно один від одного вони створили основи диференціального числення. При цьому позначення dy/dx , запропоноване Лейбніцем, використовується і сьогодні.

Виникнення логарифмів у працях Джона Непера було пов'язане з потребою спрощення астрономічних обчислень. Логарифмічна лінійка протягом кількох століть була основним обчислювальним інструментом. Такий історичний матеріал демонструє практичну зумовленість математичних відкриттів.

Евристичний потенціал має і історія фракталів. Багато об'єктів, які вважалися «математичними монстрами» (множина Кантора, крива Коха, трикутник Серпінського), у XX столітті стали основою нової геометрії Бенуа Мандельброта. Це переконує здобувачів освіти, що нестандартні ідеї можуть отримати фундаментальне значення.

5. Культурологічна функція. Історія математичних понять виконує важливу культурологічну функцію, оскільки сприяє усвідомленню математики як невід'ємної складової світової та національної культури. Ознайомлення з науковою спадщиною Евкліда, Архімеда, Ньютона, Лейбніца, Ейлера, Гауса, Остроградського, Вороного, Кравчука та інших учених дозволяє майбутнім учителям математики зрозуміти культурну цінність математичних знань та їх внесок у розвиток цивілізації.

Наприклад, поняття від'ємного числа в європейській математиці тривалий час вважалося «абсурдним», тоді як китайські математики вже в III ст. н.е. використовували червоні та чорні палички для позначення додатних і від'ємних чисел.

Особливий інтерес становить внесок українських математиків. Так, Михайло Остроградський зробив значний внесок у розвиток математичного аналізу, Георгій Вороний створив теорію, яка нині використовується в комп'ютерній графіці, геоінформатиці та кристалографії, а Михайло Кравчук розробив поліноми Кравчука, що знайшли застосування у теорії кодування та цифрових технологіях.

Залучення таких прикладів сприяє формуванню професійної ідентичності майбутніх учителів математики та усвідомленню внеску української науки у світову математичну культуру.

6. Професійно орієнтована функція. Особливого значення історія математичних понять набуває у професійній підготовці майбутніх учителів математики. Знання історії розвитку математичних понять допомагає майбутньому педагогу краще розуміти логіку побудови шкільного курсу математики, передбачати типові труднощі учнів та обирати ефективні способи пояснення навчального матеріалу.

Для майбутнього вчителя важливо не лише знати сучасне означення поняття, а й розуміти труднощі його становлення. Наприклад, під час вивчення поняття дробу учні часто сприймають його лише як два числа, записані одне над одним. Історія розвитку дробів – від єгипетських дробів до сучасного трактування раціонального числа як класу еквівалентності пар цілих чисел – дозволяє глибше усвідомити зміст поняття та передбачити типові помилки учнів.

Історія поняття площі демонструє перехід від безпосереднього вимірювання земельних ділянок у Стародавньому Єгипті до інтегрального числення та сучасної теорії міри. Знання цих етапів дає змогу майбутньому вчителю вибудовувати навчання відповідно до принципу історизму: від конкретного до абстрактного.

Історико-математичний матеріал може використовуватися як засіб мотивації навчання, розвитку пізнавального інтересу, формування критичного мислення та дослідницьких умінь здобувачів освіти. При цьому важливо не обмежуватися повідомленням окремих біографічних фактів, а розкривати процес становлення математичних ідей, демонструвати суперечливість і складність наукового пошуку.

У контексті підготовки магістрів спеціальності А4 Середня освіта доцільно розглядати історію математичних понять як важливий компонент формування методологічної компетентності. Вивчення генези математичних понять сприяє розвитку здатності аналізувати зміст математичних дисциплін, проектувати освітній процес на засадах історизму, використовувати історико-математичний матеріал у професійній діяльності та здійснювати методологічну рефлексію. Її цілеспрямоване використання у процесі

викладання навчальної дисципліни «Історія і методологія математики» сприяє формуванню методологічної культури, наукового стилю мислення та професійної готовності майбутніх учителів математики до здійснення педагогічної діяльності в умовах сучасної освіти.

Висновки. Проведений аналіз наукових джерел та осмислення можливостей історії математичних понять у професійній підготовці майбутніх учителів математики дають підстави для таких висновків.

Історія математичних понять є важливим складником методологічної підготовки майбутніх учителів математики, оскільки сприяє формуванню цілісного уявлення про математику як науку, що розвивається, та дозволяє розкрити закономірності виникнення, становлення й еволюції математичних ідей.

Методологічний потенціал історії математичних понять реалізується через низку взаємопов'язаних функцій: світоглядну, гносеологічну, методологічну, евристичну, культурологічну та професійно орієнтовану. Їх реалізація забезпечує формування у майбутніх учителів наукового світогляду, методологічної культури, здатності до рефлексії та критичного осмислення математичного знання.

Аналіз генези математичних понять (числа, функції, границі, похідної, інтеграла, ймовірності, вектора, геометричного простору та інших) дозволяє простежити взаємозв'язок історичного та логічного в розвитку математичної науки, усвідомити роль абстрагування, узагальнення, формалізації та аксіоматизації у процесі математичного пізнання.

Залучення історико-математичного матеріалу сприяє розвитку творчого та дослідницького стилю мислення майбутніх учителів математики, формуванню здатності аналізувати альтернативні підходи до розв'язання математичних проблем, передбачати типові труднощі учнів та обирати педагогічно доцільні способи пояснення навчального матеріалу.

Історія математичних понять має значний культурологічний потенціал, оскільки дозволяє розглядати математику як складову світової та національної культури, сприяє усвідомленню внеску українських і зарубіжних учених у розвиток математичної науки та формуванню професійної ідентичності майбутнього вчителя математики.

Вивчення генези математичних понять у межах навчальної дисципліни «Історія і методологія математики» доцільно розглядати як один із засобів формування методологічної компетентності магістрів спеціальності А4 Середня освіта, що забезпечує готовність до творчої професійної діяльності та свідомого використання історико-математичного матеріалу в освітньому процесі.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи. Представлені у статті результати та висновки є власним інтелектуальним внеском авторів

Список використаних джерел

- Atamas, V., & Serdiuk, Z. (2026). Роль історичних задач у формуванні фахових компетентностей майбутнього вчителя математики. Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, 223, 800–804. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2026-1-223-800-804>
- Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51(6), 967–994. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454>
- Furinghetti, F., & Karp, A. (Eds.). (2018). Researching the History of Mathematics Education: An International Overview. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68294-5>
- Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2016). From mathematics and education to mathematics education. In A. Karp & G. Schubring (Eds.), Handbook on the History of Mathematics Education (pp. 3–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_1
- Karp, A., & Furinghetti, F. (2016). History of Mathematics Teaching and Learning: Achievements, Problems, Prospects. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31616-1>
- Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (2014). Handbook on the History of Mathematics Education. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2>
- Liskovets, S., Huda, O., & Tymoshchuk, V. (2020). Історія математики в контексті вивчення математичних дисциплін у закладах вищої освіти. Український педагогічний журнал, 4, 215–233. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2020-4-215-233>
- Matyash, O., & Yashchuk, K. (2024). Ретроспективний огляд дисертацій українських дослідників з теорії і методики навчання математики. Дидактика математики: теорія, досвід, інновації, 2, 95–108. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-95-108>
- Matyash, O., & Yashchuk, K. (2024). Становлення і розвиток українських наукових шкіл з теорії і методики навчання математики. Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, 215, 68–75. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2024-1-215-68-75>
- Mesarosh, L. (2024). Місце історичного матеріалу в процесі навчання математики. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота, 54, 120–123. <https://doi.org/10.24144/2524-0609.2024.54.120-123>
- Pratsiovytyi, M. V., & Syta, H. M. (2018). Heometrychni mozaiky velykoho ukrainsia: Do 150-richchia vid dnia narodzhennia profesora Heorhiia Voronoho. Visnyk Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy, 4, 92–101. <https://doi.org/10.15407/visn2018.04.092>

References

- Atamas, V., & Serdiuk, Z. (2026). Rol istorychnykh zadach u formuvanni fakhovykh kompetentnostei maibutnoho vchytelia matematyky [The role of historical problems in the formation of professional competencies of future mathematics teachers]. Naukovi zapysky. Serii: Pedagogichni nauky, 223, 800–804. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2026-1-223-800-804>

- Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(6), 967–994. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454>
- Furinghetti, F., & Karp, A. (Eds.). (2018). *Researching the History of Mathematics Education: An International Overview*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68294-5>
- Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2016). From mathematics and education to mathematics education. In A. Karp & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 3–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_1
- Karp, A., & Furinghetti, F. (2016). *History of Mathematics Teaching and Learning: Achievements, Problems, Prospects*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31616-1>
- Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (2014). *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2>
- Liskovets, S., Huda, O., & Tymoshchuk, V. (2020). Istoriia matematyky v konteksti vyvchennia matematychnykh dystsyplin u zakladakh vyshchoi osvity [History of mathematics in the context of studying mathematical disciplines in higher education institutions]. *Ukrainskyi pedahohichnyi zhurnal*, 4, 215–233. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2020-4-215-233>
- Matyash, O., & Yashchuk, K. (2024). Retrospektyvnyi ohliad dysertatsii ukrainskykh doslidnykiv z teorii i metodyky navchannia matematyky [A retrospective review of dissertations by Ukrainian researchers in the theory and methodology of mathematics teaching]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*, 2, 95–108. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-95-108>
- Matyash, O., & Yashchuk, K. (2024). Stanovlennia i rozvytok ukrainskykh naukovykh shkil z teorii i metodyky navchannia matematyky [Formation and development of Ukrainian scientific schools in the theory and methodology of mathematics teaching]. *Naukovi zapysky. Serii: Pedahohichni nauky*, 215, 68–75. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2024-1-215-68-75>
- Mesarosh, L. (2024). Mistse istorychnoho materialu v protsesi navchannia matematyky [The place of historical material in the process of teaching mathematics]. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Serii: Pedahohika. Sotsialna robota*, 54, 120–123. <https://doi.org/10.24144/2524-0609.2024.54.120-123>
- Pratsiovytyi, M. V., & Syta, H. M. (2018). Heometrychni mozaiky velykoho ukraintsia: Do 150-richchia vid dnia narodzhennia profesora Heorhii Voronoho [Geometric mosaics of a great Ukrainian: To the 150th anniversary of Professor Heorhii Voronoi]. *Visnyk Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 4, 92–101. <https://doi.org/10.15407/visn2018.04.092>

Отримано / Received 23.06.2026

Прийнято до друку / Accepted 14.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

УДК 378.091.214:51-051(569.4)

DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-146-158

Аналіз різних моделей підготовки учителів математики в закладах вищої освіти Ізраїлю

Аліна Воевода¹, Ігор Калашніков²

1. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

E-mail: alina.voievoda@vspu.edu.ua ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1844-6759>

2. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

E-mail: Ihor.Kalashnikov@vspu.edu.ua ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7961-8134>

Анотація. Мета роботи полягає у виокремленні основних моделей підготовки учителів математики в Ізраїлі та розкритті авторського бачення доцільності адаптації окремих компонентів ізраїльського досвіду до удосконалення української системи підготовки учителів математики.

Дослідження ґрунтується на аналізі, узагальненні та систематизації наукової літератури, нормативно-правових документів і матеріалів закладів вищої освіти Ізраїлю, що дало змогу визначити сучасні підходи до підготовки учителів математики.

У статті здійснено комплексний аналіз різних моделей підготовки учителів математики в Ізраїлі в контексті сучасних тенденцій розвитку педагогічної освіти. На основі проведеного аналізу виокремлено три основні моделі підготовки учителів математики: підготовка в педагогічних коледжах, університетська модель та альтернативна модель. Встановлено, що у педагогічних коледжах здійснюється інтегрована підготовка майбутніх учителів у межах однієї освітньої програми. Університетська модель орієнтована на поглиблену математичну підготовку з подальшим здобуттям педагогічної кваліфікації. Альтернативна модель спрямована на залучення до педагогічної діяльності випускників математичних, природничих та інженерних спеціальностей.

Професійна підготовка майбутніх учителів математики в Ізраїлі, незалежно від моделі її реалізації, ґрунтується на єдиній системі взаємопов'язаних компонентів: фундаментальній предметній підготовці, методичній підготовці, педагогічній практиці. З'ясовано, що поєднання різних моделей забезпечує гнучкість та варіативність системи підготовки майбутніх учителів математики.

Ключові слова: підготовка учителів математики, заклади вищої освіти Ізраїлю, університетська модель, педагогічні коледжі, альтернативні моделі.

An analysis of various models for training mathematics teachers in Israeli higher education institutions

Alina Voevoda¹, Igor Kalashnikov²

1. Vinnytsia Mykhailo Kotsyubynsky State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: alina.voevoda@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1844-6759>

2. Vinnytsia Mykhailo Kotsyubynsky Vinnytsia State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

E-mail: Ihor.Kalashnikov@vspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7961-8134>

Abstract. The aim of the study is to identify the main models of mathematics teacher education in Israel and to present the authors' perspective on the possibilities of adapting selected components of the Israeli experience to improve the Ukrainian system of mathematics teacher education.

The study is based on the analysis, synthesis, and systematization of scientific literature, regulatory and legal documents, and materials from Israeli institutions of higher education, which made it possible to identify contemporary approaches to mathematics teacher education.

This article presents a comprehensive analysis of various models of mathematics teacher education in Israel in the context of current trends in the development of teacher education. Based on this analysis, three main models of mathematics teacher training – training at teacher training colleges, the university model, and the alternative model. It has been established that teacher training colleges provide integrated training for future teachers within a single educational program. The university model focuses on in-depth mathematical training followed by the acquisition of a teaching qualification. The alternative model aims to attract graduates of mathematics, natural sciences, and engineering programs to the teaching profession.

The professional training of future mathematics teachers in Israel, regardless of the model used, is based on a unified system of interrelated components: fundamental subject-matter training, methodological training, and teaching practicum. It has been established that combining different models ensures the flexibility and variability of the system for training future mathematics teachers.

Keywords: mathematics teacher education, Israeli institutions of higher education, university model, teacher training colleges, alternative models.

Постановка проблеми. Модернізація національної системи освіти України гостро підняла питання необхідності дослідження різносторонніх освітніх явищ і проблем. Процес реформування системи освіти потребує й нових підходів до професійної підготовки майбутніх педагогів.

У XXI столітті учителі мають стати амбасадорами суспільних змін у загальноєвропейському освітньому просторі, що підкреслюється у численних міжнародних документах ЮНЕСКО, Ради Європи, Міжнародної організації праці, Організації Міжнародної Співпраці і Розвитку. Тому одним із пріоритетних напрямів модернізації системи педагогічної освіти України має стати вивчення світового досвіду та проведення порівняльного аналізу змісту, структури, функцій, організаційних форм і технологій підготовки майбутніх учителів, зокрема й математики, у різних країнах світу.

Історичний процес становлення молодії та водночас стародавньої держави, суттєво позначився на розвитку освіти Ізраїлю, яка утверджує такі важливі базові цінності, як свободу слова та толерантність, єдність та соціальну інтеграцію в суспільстві. Система освіти в Ізраїлі спрямована на підготовку молодих громадян до гідного і відповідального життя в демократичному суспільстві, де поруч живуть люди різних національностей, що сповідують різні релігії, відрізняються культурою і політичними поглядами.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Проблеми розвитку системи освіти Ізраїлю вивчали як вітчизняні (А. Василіук, Д. Васильєва, В. Громовий, М. Дреєрман, О. Карпенко, М. Міленіна, Д. Привалко, Л. Романюк, Ю. Руденко та ін.), так і закордонні науковці (Д. Бітан, З. Гельман, Х. Давід, Н. Давидович, В. Лаві, Д. Менахем, Г. Хілліг та ін.)

Д. Менахем провів комплексне дослідження, присвячене проблемам трансформації вищої освіти Ізраїлю в 90-ті роки ХХ – на початку ХХІ століття. Автор детально проаналізував три основні періоди реформування вищої освіти Ізраїлю: до проведення реформ (1924-1990 рр.); диверсифікації та інтернаціоналізації вищої освіти (1993-1998 рр.); трансформації освітньої політики в країні (початок 2000-х років) (Menahem, 2008).

Окремий напрям становлять дослідження ролі педагогічних коледжів у підготовці вчителів. У роботах S. Yögev та A. Yögev аналізується специфіка дослідницької діяльності закладів педагогічної освіти Ізраїлю, зокрема увага приділяється проблематиці професійного розвитку педагогів та дослідженням, орієнтованим на практику (Yögev & Yögev, 2006).

Дослідження особливостей підготовки вчителів математики в Ізраїлі представлено у працях ізраїльських науковиць А. Shriki та Т. Wagner (2018). Авторки акцентують увагу на трансформації ролі педагогічних коледжів, змінах у структурі професійної підготовки та необхідності забезпечення балансу між математичною, методичною й практичною складовими підготовки майбутнього вчителя (Shriki & Wagner, 2018).

Важливими для розуміння змісту професійної підготовки майбутніх учителів математики є дослідження Р. Tsamir та інших (2018). Автори звертають увагу на проблему інтеграції

університетських курсів із педагогічною практикою у школі, підкреслюючи необхідність поєднання теоретичних знань із реальним досвідом викладання (Tsamir et al. 2018).

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Ізраїльські науковці та державні діячі нині докладають низку зусиль, щоб освітні стандарти в країні відповідали сучасним трендам і течіям у педагогіці. В системі освіти Ізраїлю відбуваються помітні структурні зміни, які характеризуються потребою у розробці нових моделей навчання.

На думку Т. Halperin та D. Bar-Tal (2006) в основу існування держави Ізраїль покладено моральні цінності, визнання і дотримання яких є обов'язком кожного громадянина. Таким чином позиціонується головна мета в ізраїльській системі освіти: розвиток демократії та демократичних цінностей, що є ознакою прогресивного поступу суспільства і безпосередньо відображається на формуванні свідомості у молодого покоління (Halperin & Bar-Tal, 2006). Державна освітня політика в Ізраїлі спрямована на національне виховання, посилення почуття відповідальності, усвідомлення зав'язків особистості з громадою та суспільством і сприяння активній життєвій позиції молодих людей у примноженні добра (Berkovich, 2018).

Дослідження ізраїльського досвіду може бути корисним для вітчизняної педагогічної науки, яка прагне до створення якісно нових моделей підготовки учителів на методологічному, теоретичному та практичному рівнях.

Мета статті – проаналізувати основні моделі підготовки учителів математики в закладах вищої освіти Ізраїлю, визначити їх організаційні та змістові особливості, розглянути доцільність адаптації окремих компонентів ізраїльської системи підготовки учителів математики до українських реалій.

Виклад основного матеріалу. Нині в Ізраїлі функціонують близько 70 закладів вищої освіти: серед яких 7 дослідницьких університетів, Відкритий університет Ізраїлю, близько 35 академічних коледжів (з різними джерелами фінансування), 20 академічних коледжів освіти (педагогічні коледжі).

У системі вищої освіти Ізраїлю, як і в більшості країн Заходу, запроваджено три академічні ступені:

- перший – бакалавр 3-4 роки навчання (бакалавр мистецтва BA Bachelor of Arts), бакалавр наук BSc (Bachelor of Scienc), бакалавр технології BTech (Bachelor of Technology), бакалавр освіти BEd (Bachelor of Educatin);
- другий – магістр – MA, MSc, M.Teach, M.Ed. (1-2 роки);
- третій – доктор філософії – PhD (2-3 роки) (Воевода, 2022).

Особливістю вищої освіти Ізраїлю є те, що всі три академічні ступені студенти можуть здобувати лише в наступних навчальних закладах: Єврейський університет, Тель-Авівський університет, Університет Бар-Ілан (Рамат-Ган), Негевський університет імені Бен-Гуріона, Техніон в Хайфі, Хайфський університет, Вища школа імені Файнберга при Науково-дослідному інституті імені Х. Вейцмана. Ці університети утворені до 1960 р., тому діють за так званою гумбольдтіанською (на честь В. Гумбольдта) моделлю німецьких університетів, що

поєднують в собі стандарти високої якості наукової роботи і постійного її поліпшення, проведення наукових досліджень на максимально високому рівні; підготовку майбутніх наукових кадрів (Воевода, 2023).

Підготовка вчителів математики в Ізраїлі здійснюється відповідно до визначених державою вимог, які передбачають обов'язкове здобуття педагогічної освіти та отримання ліцензії на здійснення професійної педагогічної діяльності. Право на викладання математики надається лише за умови отримання педагогічного сертифіката (документа про вищу освіту, який видається закладом вищої освіти і підтверджує завершення акредитованої програми професійної підготовки майбутніх учителів) та педагогічної ліцензії (Haaretz, 2022).

Педагогічний сертифікат і ліцензія на викладання мають загальнодержавний статус і визнаються в державних закладах освіти Ізраїлю. Обидва документи чинні в усіх секторах державної системи освіти, зокрема у світських, релігійних та арабомовних школах. Водночас сфера їх застосування визначається рівнем освіти. Для здійснення педагогічної діяльності в старшій школі (הסדרה העליונה, *Hativat Elyona*; 10-12 класи) наявність ліцензії на викладання обов'язкова. Натомість для роботи в базовій школі (הסדרה ביניימית, *Hativat Beiniyim*; 7-9 класи) достатньо педагогічного сертифіката, хоча після проходження встановленого періоду педагогічної практики його власник може отримати й ліцензію. Такий порядок відповідає нормативним вимогам Міністерства освіти Ізраїлю (Ministry of Education, 2017). Сертифікат за спеціальністю «Математика» надає право викладати цей предмет на відповідних рівнях загальної середньої освіти, як правило, у 7-12 класах, що підтверджується програмами підготовки ізраїльських закладів вищої освіти (Дреєрман, 2007).

В Ізраїлі помітно проявляється тенденція до створення варіативних багаторівневих систем неперервної педагогічної освіти. У контексті нашого дослідження розглянемо класифікацію моделей підготовки учителів математики в Ізраїлі за кількома критеріями, оскільки сучасна система педагогічної освіти цієї країни характеризується різноманітністю освітніх траєкторій, інституційних форм та способів набуття професійної кваліфікації.

Залежно від організаційної структури та місця здобуття педагогічної освіти ми виокремили *інституційну класифікацію моделей підготовки учителів математики*: модель підготовки в педагогічних коледжах (Colleges of Education), університетську модель та модель альтернативної педагогічної підготовки. Перша ґрунтується на спеціалізованій підготовці майбутніх учителів у закладах педагогічної освіти, друга передбачає поєднання фундаментальної математичної освіти з психолого-педагогічною підготовкою в університетському середовищі, а третя орієнтована на професійний перехід до педагогічної діяльності осіб, які вже мають академічну освіту (рис. 1)



Рис. 1. Класифікація моделей підготовки учителів математики в Ізраїлі за інституційною ознакою

За критерієм співвідношення предметної та педагогічної складових підготовки можна виділити *паралельну та послідовну моделі*. Паралельна модель передбачає одночасне опанування математичних дисциплін, педагогіки, психології та методики навчання математики в межах однієї освітньої програми. Послідовна модель передбачає спочатку здобуття академічної освіти з математики або суміжної галузі, а потім проходження спеціальної педагогічної підготовки для отримання права на викладання.

З позиції організації професійної практики майбутніх учителів доцільним є виділення *теоретично орієнтованої та практико-орієнтованої моделей*. Практико-орієнтована модель, яка активно розвивається в ізраїльській педагогічній освіті, передбачає раннє залучення студентів до освітнього процесу, педагогічне наставництво та формування професійних компетентностей безпосередньо в умовах школи (Shriki & Wagner, 2018).

Аналіз моделей підготовки учителів математики в Ізраїлі потребує комплексного підходу, оскільки жодна окрема класифікація не може повністю відобразити специфіку цієї системи. Поєднання інституційного, структурно-змістового та практико-орієнтованого критеріїв дає можливість більш повно охарактеризувати особливості професійної підготовки майбутніх учителів математики.

Детальніше розглянемо особливості класифікації моделей підготовки учителів математики в Ізраїлі за інституційною ознакою.

Модель підготовки в педагогічних коледжах (академічних коледжах освіти). Педагогічні коледжі (Academic Colleges of Education) становлять окремий сектор системи вищої освіти Ізраїлю, основною функцією якого є професійна підготовка педагогічних кадрів. До провідних закладів цього типу належать Oranim Academic College of Education, Gordon Academic College of Education, Kaye Academic College of Education, Levinsky-Wingate Academic Center, Beit Berl Academic College, Achva Academic College та інші. Вони реалізують освітні програми першого (бакалаврського) рівня за спеціальностями педагогічного спрямування, що передбачають здобуття ступеня Bachelor of Education (B.Ed.) або Bachelor of Arts in Education (B.A.Ed.). Тривалість навчання, як правило, становить три-чотири роки. Педагогічні коледжі

забезпечують підготовку фахівців за різними рівнями освіти та різними спеціальностями, зокрема, «Дошкільна освіта», «Початкова освіта» та «Середня освіта».

Базові освітні програми охоплюють вивчення математичних дисциплін, педагогіки, психології, методики навчання математики, а також передбачають обов'язкову педагогічну практику, яка в більшості закладів розпочинається вже з другого року навчання. Такий підхід забезпечує послідовне формування професійних компетентностей майбутніх учителів та поєднання теоретичної підготовки з практичною діяльністю в закладах загальної середньої освіти.

До прикладу Beit Berl Academic College реалізує спеціалізовану бакалаврську програму B.Ed. in Mathematics and Teaching Certificate (Бакалаврська програма з математики та здобуття педагогічного сертифіката (B.Ed.)), що поєднує фундаментальну математичну підготовку з психолого-педагогічною та методичною освітою і забезпечує підготовку вчителів математики для початкової або середньої школи (студент може обрати траєкторію самостійно) (Beit Berl Academic College, (n.d.)).

Особливий інтерес викликає програма B.Ed. in Science and Technology for Secondary School «Наука і технології для середньої школи», за якою здійснюється підготовка майбутніх педагогів в Oranim Academic College of Education (Оранім академічний коледж освіти). На відміну від традиційних програм підготовки вчителів окремих навчальних предметів, вона ґрунтується на міждисциплінарному підході та поєднує підготовку в галузях природничих наук, технологій і STEM-освіти. Освітня програма спрямована на підготовку педагогів для базової та старшої школи, здатних забезпечувати інтегроване навчання природничих наук і технологій. У структурі програми математична підготовка розглядається як важливий компонент формування STEM-компетентностей майбутнього вчителя. Такий підхід відображає сучасні тенденції розвитку ізраїльської педагогічної освіти, які орієнтовані на міждисциплінарність, практичне застосування знань та підготовку педагогів до роботи в умовах цифрового освітнього середовища (Oranim Academic College, (n.d.)).

Після успішного завершення навчання випускники здобувають академічний ступінь бакалавра педагогічної освіти та педагогічний сертифікат, який після проходження обов'язкового періоду професійної адаптації (стажування) стає підставою для отримання ліцензії на викладання відповідно до вимог Міністерства освіти Ізраїлю (Dreyfus, 2021).

Аналіз моделі підготовки в педагогічних коледжах дає змогу виокремити її ключові переваги: практико-орієнтовану спрямованість, тісний зв'язок із реальними запитами шкільної освіти, системну інтеграцію предметного, психолого-педагогічного та методичного компонентів підготовки, а також створення сприятливих умов для входження здобувачів освіти в педагогічну професію.

Університетська модель підготовки учителів математики в Ізраїлі характеризується поєднанням фундаментальної математичної освіти, професійно-педагогічної підготовки та

практичного досвіду викладання. На відміну від педагогічних коледжів, де професійне становлення майбутнього вчителя відбувається в межах єдиної інтегрованої програми, університетська модель здебільшого передбачає послідовне поєднання академічної математичної освіти з подальшим здобуттям педагогічної кваліфікації.

Університетська підготовка учителів математики в Ізраїлі реалізується у провідних закладах вищої освіти країни, серед яких Bar-Ilan University (Бар-Іланський університет), Tel Aviv University (Тель Авівський університет), University of Haifa (Хайфський університет) та інші. Особливість цієї моделі полягає у тісній взаємодії математичних факультетів і факультетів освіти, що забезпечує поєднання фундаментальної математичної підготовки, методики навчання математики та педагогічної практики.

Реалізацію університетської моделі розглянемо на прикладі Bar-Ilan University, де підготовка майбутніх учителів математики здійснюється через поєднання математичної освіти та педагогічної сертифікації. Студенти мають можливість здобувати ґрунтовну математичну підготовку в межах програм математичного напрямку, орієнтованих, зокрема, на майбутню професійну діяльність у сфері шкільної освіти. Після або паралельно з математичною підготовкою студенти проходять педагогічну підготовку за програмою Teaching Certificate in Mathematics (תעודת הוראה במתמטיקה), призначеною для підготовки вчителів математики для 7–12 класів та отримання Teaching Certificate (педагогічного сертифіката), який надає право на викладання математики у базовій та старшій школі (Bar-Ilan University. (n.d.)).

У межах університетської моделі підготовка за програмою педагогічного сертифіката у Bar-Ilan University триває два роки. Освітній процес передбачає опанування психолого-педагогічних дисциплін, методики навчання математики та практичну підготовку в закладах освіти. Значна увага приділяється питанням розвитку математичного мислення учнів, аналізу типових труднощів у засвоєнні математичних понять, використанню цифрових ресурсів, освітніх ігор та дослідницьких підходів (Bar-Ilan University. (n.d.)).

Порівняно з моделлю підготовки в педагогічних коледжах університетська модель має більш виражену науково-дослідну спрямованість. Майбутні вчителі отримують доступ до сучасних досліджень у галузі математичної освіти та співпрацюють із науковими центрами. Водночас університетська модель містить низку особливостей, які можуть ускладнювати її реалізацію: довший період професійної підготовки, вищі вимоги до вступників та необхідність додаткового етапу становлення педагогічної кваліфікації після здобуття академічного ступеня. Однак, саме поєднання фундаментальної математичної освіти, педагогічної підготовки та практичного досвіду забезпечує високий рівень професійної компетентності випускників.

Таким чином, університетська модель підготовки учителів математики в Ізраїлі характеризується фундаментальністю математичних знань, інтеграцією математичної науки та педагогічної практики й спрямована на формування вчителя, здатного не лише передавати математичні знання, а й організовувати сучасний освітній процес на науковій основі.

Альтернативна модель підготовки учителів математики в Ізраїлі. Поряд із традиційними моделями підготовки учителів математики в педагогічних коледжах та університетах у системі освіти Ізраїлю сформувалася альтернативна модель підготовки учителів. Її сутність полягає у залученні до професії осіб, які вже мають академічну освіту з математики, природничих наук, інженерних або інших суміжних галузей, але не отримали педагогічної кваліфікації. Такий підхід спрямований на подолання дефіциту вчителів, особливо у сфері STEM-дисциплін, та забезпечення школи фахівцями з високим рівнем предметної підготовки.

В ізраїльській системі освіти альтернативна модель реалізується переважно через програми педагогічної перекваліфікації та отримання педагогічного сертифіката (Teaching Certificate, תעודת הוראה). На відміну від базових бакалаврських програм педагогічних коледжів, у межах яких предметна і педагогічна підготовка здійснюються одночасно, альтернативний шлях передбачає послідовну професійну траєкторію: спочатку здобуття академічного ступеня з математики або іншої галузі, а потім – проходження спеціальної педагогічної підготовки. Водночас конкретний обсяг навчального навантаження та кількість академічних кредитів за окремими компонентами програми, включно з педагогічною практикою, залежать від попередньої освіти здобувача та вимог конкретної освітньої траєкторії (Ministry of Education. (n.d.)).

Основними учасниками таких програм стають випускники математичних факультетів університетів, інженери, фахівці природничих наук, фахівці з IT-галузі та інші фахівці, які бажають змінити професійну сферу та працювати в закладах загальної середньої освіти. Необхідна умова для вступу – наявність диплому ступеня бакалавра або магістра у відповідній предметній галузі. Окремі програми можуть передбачати співбесіду, оцінювання академічної успішності або перевірку рівня предметної підготовки кандидата.

Зміст альтернативних програм охоплює основні компоненти професійної підготовки вчителя: педагогіку, психологію освіти, методику навчання математики, оцінювання навчальних досягнень учнів, організацію освітнього процесу та управління класом. Особливе місце посідає методична підготовка, оскільки учасники таких програм уже апріорі повинні володіти глибокими математичними знаннями, однак потребують формування вмінь трансформувати академічний математичний зміст у доступний для учнів навчальний матеріал. Важливою складовою альтернативної моделі виступає педагогічна практика, на яку виділяється значна частина академічних кредитів.

Особливого значення альтернативна модель набула у зв'язку з державною політикою Ізраїлю щодо посилення STEM-освіти та залучення до школи фахівців із високим рівнем математичної компетентності. Міністерство освіти Ізраїлю підтримує програми залучення фахівців, які володіють фундаментальною теоретичною підготовкою до педагогічної діяльності, оскільки вони сприяють підвищенню якості викладання математики та

природничих дисциплін, особливо на рівні п'яти єхідот (навчальних одиниць) (Ministry of Education. (n.d.)).

Прикладами реалізації альтернативної моделі виступають програми педагогічної сертифікації, які пропонують університети та педагогічні коледжі Ізраїлю. Зокрема, такі програми функціонують у провідних університетах країни, де випускники математичних спеціальностей можуть отримати кваліфікацію вчителя математики для базової та старшої школи.

Так у Tel Aviv University (Тель-Авівському університеті) підготовка вчителів математики значною мірою орієнтована на осіб із попередньою академічною освітою в галузі математики або суміжних дисциплін. Програми Тель-Авівського університету вирізняються акцентом на взаємозв'язки між університетськими математичними курсами та практикою шкільного навчання (Tel Aviv University. (n.d.)). Такий підхід передбачає подолання розриву між академічними математичними знаннями і їх дидактичною трансформацією в навчальний матеріал для учнів.

Також програми перекваліфікації реалізуються педагогічними коледжами, які забезпечують методичну та практичну підготовку фахівців, що переходять до педагогічної професії.

Перевагою альтернативної моделі виступає можливість швидкого залучення до системи освіти фахівців із високим рівнем предметних знань, що особливо важливо для таких галузей, як математика, фізика, інформатика. Крім того, ця модель сприяє оновленню педагогічного середовища завдяки залученню осіб із різним професійним досвідом.

Водночас альтернативна модель має певні обмеження. Порівняно з традиційною педагогічною освітою, скорочений період педагогічної підготовки може створювати труднощі у формуванні окремих професійних компетентностей, зокрема щодо вікової психології учнів, організації навчальної взаємодії та управління класом. Саме тому значна увага в таких програмах приділяється практичній підготовці та супроводу початківців у перші роки педагогічної діяльності (Tel Aviv University. (n.d.), (Bar-Ilan University. (n.d.)).

На відміну від Ізраїлю, де функціонують кілька рівноцінних моделей підготовки педагогів, в Україні домінує університетська модель підготовки вчителів математики, що переважно реалізується за спеціальністю А4.04 «Середня освіта (Математика)». Підготовка здійснюється відповідно до професійного стандарту вчителя, однак рівень інтеграції теоретичної, методичної й практичної складових у різних закладах вищої освіти відрізняється.

Аналіз ізраїльського досвіду дає підстави стверджувати, що окремі елементи системи підготовки вчителів математики можуть бути адаптовані до умов функціонування української педагогічної освіти. Насамперед перспективними є розширення варіативності освітніх траєкторій підготовки майбутніх учителів, що передбачає створення альтернативних шляхів здобуття педагогічної кваліфікації для випускників математичних спеціальностей через сертифікатні або післядипломні освітні програми. Доцільним також є посилення практичної

складової професійної підготовки шляхом збільшення тривалості педагогічної практики, її інтеграції впродовж усього періоду навчання та розширення партнерської взаємодії між закладами вищої освіти й закладами загальної середньої освіти.

Водночас заслуговує на увагу ізраїльський досвід професійного супроводу молодих педагогів через систему наставництва, що сприяє їхній успішній адаптації до професійної діяльності та підвищенню якості викладання. Реалізація зазначених підходів може сприяти модернізації системи підготовки майбутніх учителів математики в Україні відповідно до сучасних міжнародних тенденцій розвитку педагогічної освіти.

Висновки. Проведений аналіз моделей підготовки учителів математики в закладах вищої освіти Ізраїлю засвідчив багаторівневий та гнучкий характер системи педагогічної освіти, у якій функціонують різні траєкторії професійного становлення майбутнього вчителя. Така різноманітність зумовлена необхідністю забезпечення освітньої системи висококваліфікованими педагогічними кадрами, здатними відповідати сучасним вимогам математичної освіти та розвитку STEM-напрямів.

Заслуговує на увагу досвід розширення варіативності шляхів здобуття педагогічної кваліфікації, створення додаткових можливостей для входження до педагогічної професії випускників математичних та інженерних спеціальностей, посилення практичної спрямованості професійної підготовки, а також удосконалення механізмів професійного розвитку педагогів.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Декларація щодо використання штучного інтелекту. Під час підготовки статті автори використовували ChatGPT (OpenAI) як допоміжний інструмент для перекладу окремих фрагментів тексту з англійської мови та івриту, їх редагування, впорядкування списку використаних джерел. Генеративний штучний інтелект не використовувався для створення змісту статті. Остаточний текст, перевірка фактів і відповідальність за достовірність результатів дослідження належать авторам.

Список використаних джерел

- Воевода, А. Л. (2023). Перспективи розвитку освітньої системи держави Ізраїль у XXI столітті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (70), 15–24. <https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/556>
- Воевода, А. Л., Матяш, О. І., & Михайленко, Л. Ф. (2022). Трансформаційні процеси у нормативно-правових засадах розбудови системи педагогічної освіти Ізраїлю. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (64), 233–242. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2022-64-233-242>

- Дреерман, М. Г. (2007). *Становлення і розвиток вищої педагогічної освіти в Ізраїлі* [Дисертація кандидата педагогічних наук, Республіканський вищий навчальний заклад «Кримський гуманітарний університет»]. Ялта.
- Bar-Ilan University. (n.d.). *Teaching certificate in mathematics*. <https://www.biu.ac.il/field-of-study/tracks/8847>
- Bar-Ilan University. (n.d.). *Tuition for teaching certificate programs*. <https://www.biu.ac.il/en/registration-and-admission/tuition/tuition-teaching-certificate>
- Beit Berl Academic College. (n.d.). *Beit Berl College*. <https://www.educations.com/institutions/beit-berl-college>
- Berkovich, I. (2018). *Mediniyut chinukhit, tahalim ve-magamot ba-me'ah ha-21 [Educational policy, processes and trends in the 21st century]*. Ra'anana: The Open University of Israel.
- Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM-Mathematics Education*, 53, 679–693. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3>
- Halperin, E., & Bar-Tal, D. (2006). Democratic values and education for democracy in the State of Israel. *Democracy and Security*, 2(2), 169–200. <https://doi.org/10.1080/17419160600954441>
- Haaretz. (2022). *Israel's Education Ministry updates math program in schools for the first time in 30 years*. <https://www.haaretz.com/israel-news/2022-08-01/ty-article/.premium/israels-education-ministry-updates-mathprogram-in-schools-for-the-first-time-in-30-years/00000182-55e3-d7de-a3c7-77f3b5920000>
- Menahem, G. (2008). The transformation of higher education in Israel since the 1990s: The role of ideas and policy paradigms. *Governance: An International Journal of Policy, Administration, and Institutions*, 21(4), 499–526. <https://doi.org/10.1111/j.1468-0491.2008.00411.x>
- Ministry of Education. (n.d.). *Ministry of Education*. State of Israel. Relevant Laws to the Ministry's Work. <https://www.gov.il/en/departments/ministry-of-education/govil-landing-page>
- Oranim Academic College. (n.d.). *Science and technology education programs*. <https://www.oranim.ac.il/sites/heb/academic-units/science-division/science-technology/pages/default.aspx>
- Shriki, A. Wagner T. (2018). Mathematics teacher education in Israel colleges of education: past trends, current state of the art and future plans. In N. Movshovitz-Hadar (Ed.), *K-12 mathematics education in Israel: Issues and innovations* (pp. 225–233). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789813231191_0025
- Tel Aviv University. (n.d.). *Teaching diploma in mathematics*. https://education.tau.ac.il/Hinuch_madai/teaching_diploma_math
- Tsamir, P., Tirosh, D., Barkai, R., & Levenson, E. (2018). Mathematics teacher education for secondary schools: Bridging between university courses and field work. In N. Movshovitz-Hadar (Ed.), *K-12 mathematics education in Israel: Issues and innovations* (Series on Mathematics Education, Vol. 13, pp. 243–250). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789813231191_0026
- Yogev, S., & Yogev, A. (2006). Teacher educators as researchers: A profile of research in Israeli teacher colleges versus university departments of education. *Teaching and Teacher Education*, 22(1), 32–41. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.07.003>

References

- Voievoda, A. L. (2023). *Perspektyvy rozvytku osvithoi systemy derzhavy Izrail u XXI stolitti* [Prospects for the development of the education system of the State of Israel in the XXI century]. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*, [in Ukraine], (70), 15–24. <https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/556>
- Voievoda, A. L., Matiash, O. I., & Mykhailenko, L. F. (2022). *Transformatsiini protsesy u normatyvno-pravovykh zasadakh rozbudovy systemy pedahohichnoi osvity Izrailiu* [Transformation processes in the regulatory and legal foundations of the development of the Israeli teacher education system]. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*, [in Ukraine], (64), 233–242. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2022-64-233-242>
- Dreierman, M. H. (2007). *Stanovlennia i rozvytok vyshchoi pedahohichnoi osvity v Izraili* [Formation and development of higher pedagogical education in Israel] . [Candidate of Pedagogical Sciences dissertation, Crimean Humanitarian University]. Yalta [in Ukraine].

- Bar-Ilan University [Universitat Bar-Ilan; אוניברסיטת בר-אילן]. (n.d.). *Teaching certificate in mathematics*. [in Hebrew] <https://www.biu.ac.il/field-of-study/tracks/8847>
- Bar-Ilan University [Universitat Bar-Ilan; אוניברסיטת בר-אילן]. (n.d.). *Tuition for teaching certificate programs*. [in Hebrew] <https://www.biu.ac.il/en/registration-and-admission/tuition/tuition-teaching-certificate>
- Beit Berl Academic College [Ha-Mikhla'a ha-Akademit Beit Berl; המכללה האקדמית בית ברל]. (n.d.). *Beit Berl College*. [in Hebrew] <https://www.educations.com/institutions/beit-berl-college>
- Berkovich, I. (2018). *Mediniyut chinukhit, tahalim ve-magamot ba-me'ah ha-21 [Educational policy, processes and trends in the 21st century]*. [in Hebrew]. Ra'anana: The Open University of Israel.
- Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM-Mathematics Education*, 53, 679–693. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3>
- Halperin, E., & Bar-Tal, D. (2006). Democratic values and education for democracy in the State of Israel. *Democracy and Security*, 2(2), 169–200. <https://doi.org/10.1080/17419160600954441>
- Haaretz. (2022). *Israel's Education Ministry updates math program in schools for the first time in 30 years*. [tps://www.haaretz.com/israel-news/2022-08-01/ty-article/.premium/israels-education-ministry-updates-mathprogram-in-schools-for-the-first-time-in-30-years/00000182-55e3-d7de-a3c7-77f3b5920000](https://www.haaretz.com/israel-news/2022-08-01/ty-article/.premium/israels-education-ministry-updates-mathprogram-in-schools-for-the-first-time-in-30-years/00000182-55e3-d7de-a3c7-77f3b5920000)
- Menahem, G. (2008). The transformation of higher education in Israel since the 1990s: The role of ideas and policy paradigms. [in English] *Governance: An International Journal of Policy, Administration, and Institutions*, 21(4), 499–526. <https://doi.org/10.1111/j.1468-0491.2008.00411.x>
- Ministry of Education [Misrad HaHinukh; משרד החינוך]. (n.d.). *Relevant laws to the Ministry's work*. State of Israel. [in Hebrew] <https://www.gov.il/en/departments/ministry-of-education/govil-landing-page>
- Oranim Academic College [Ha-Mikhla'a ha-Akademit Oranim; המכללה האקדמית אורנים]. (n.d.). *Science and technology education programs*. [in Hebrew] <https://www.oranim.ac.il/sites/heb/academic-units/science-division/science-technology/pages/default.aspx>
- Shriki, A., & Wagner, T. (2018). Mathematics teacher education in Israel colleges of education: Past trends, current state of the art and future plans. In N. Movshovitz-Hadar (Ed.), *K-12 mathematics education in Israel: Issues and innovations* (pp. 225–233). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789813231191_0025
- Tel Aviv University [Universitat Tel Aviv; אוניברסיטת תל אביב]. (n.d.). *Teaching diploma in mathematics*. [in Hebrew]. https://education.tau.ac.il/Hinuch_madai/teaching_diploma_math
- Tsamir, P., Tirosh, D., Barkai, R., & Levenson, E. (2018). Mathematics teacher education for secondary schools: Bridging between university courses and field work. In N. Movshovitz-Hadar (Ed.), *K-12 mathematics education in Israel: Issues and innovations* (Series on Mathematics Education, Vol. 13, pp. 243–250). https://doi.org/10.1142/9789813231191_0026
- Yogev, S., & Yogev, A. (2006). Teacher educators as researchers: A profile of research in Israeli teacher colleges versus university departments of education. *Teaching and Teacher Education*, 22(1), 32–41. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.07.003>

Отримано / Received 16.07.2026

Прийнято до друку / Accepted 21.07.2026

Опубліковано / Published 29.07.2026

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

**ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:
ТЕОРІЯ, ДОСВІД, ІННОВАЦІЇ**

2026, № 5

SCIENTIFIC JOURNAL

**DIDACTICS OF MATHEMATICS:
THEORY, EXPERIENCE, INNOVATIONS**

2026, No 5