М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 2 (2024), с. 111–119.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 2 (2024), pp. 111–119.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.9

Клас галілеєвоінваріантних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Олександр Тимошенко[1], Іванна Леонова[2]

[1] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
tymosholeksandr@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-5493-5202

[2] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
leonovaim@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0319-1370

Анотація. Стаття присвячена побудові класу галілеєвоінваріантних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для цього використано симетрійний аналіз рівняння Ньютона-Лоренца та на основі інваріантності даного рівняння побудовано клас систем диференціальних рівнянь, частинним випадком якого є рівняння Ньютона-Лоренца, інваріантних відносно алгебри Галілея.

Ключові слова: алгебра Лі, алгебра Галілея, інваріантні системи, диференціальні рівняння.

1. Вступ

Знаходження групи симетрії і відповідної їй алгебри інваріантності системи звичайних диференціальних рівнянь є однією із важливих проблем сучасного математичного аналізу. Наявність класичної групи симетрії у системі звичайних диференціальних рівнянь дає можливість за допомогою відомих алгоритмів будувати як частинні, так і загальні розв’язки таких систем.

Важливий теоретичний і практичний інтерес становить задача знаходження диференціальних рівнянь або системи диференціальних рівнянь, які інваріантні відносно класичних алгебр Лі (Галілея, Пуанкаре, Шредінгера та інші).[7]

Мета статті – побудова класу галілеєвоінваріантних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Використаємо симетрійний аналіз нерелятивістського рівняння Ньютона-Лоренца

$$m\ddot{\vec{x}} = e\left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}, \tag{1}$$

де $\vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ – координатні частинки, $\vec{E}$, $\vec{H}$ – функції від часу і координат, $m=m_0=const$ – маса частинки, e – заряд частинки, $\dot{\vec{x}}=\frac{d\vec{x}}{dt}$, $\ddot{\vec{x}}=\frac{d\dot{\vec{x}}}{dt}$, $\left[\overrightarrow{ab}\right]$ – позначає векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. Постановка задачі

Розглянемо детальніше теореми та наслідки з них, що стосуються симетрійного аналізу нерелятивістського рівняння Ньютона-Лоренца.

Теорема 1. [2] *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) в класі диференційовних операторів першого порядку* $\hat{Q}_2=\xi^0\frac{\partial}{\partial t}+\xi^k\frac{\partial}{\partial x_k}+\eta^{1_k}\frac{\partial}{\partial H_k}+\eta^{2_k}\frac{\partial}{\partial E_k}$ *буде нескінченна алгебра Лі, котра задається операторами вигляду* $\hat{Q}_2=\xi^0\frac{\partial}{\partial t}+\xi^k\frac{\partial}{\partial x_k}+\eta^{1_k}\frac{\partial}{\partial H_k}+\eta^{2_k}\frac{\partial}{\partial E_k}$ *з коефіцієнтними функціями*

$$\begin{gathered}\xi^0=\xi^0\left(t\right),\\ \xi^a=\left(\frac{1}{2}\xi_0^0+\lambda\right)x_a+C^{ab}\left(t\right)x_b+d^a\left(t\right),\\ \eta^{1_a}=C^{ab}\left(t\right)H_b-\xi_0^0H_a+\frac{m}{e}\varepsilon_{abc}C_0^{bc}\left(t\right)\\ \eta^{2_a}=C^{ab}\left(t\right)E_b-\frac{3}{2}\xi_0^0E_a+\varepsilon_{abc}H_c\left(\frac{1}{2}\xi_{00}^0x_b+C_0^{bc}\left(t\right)x_c+d_0^b\left(t\right)\right)+\\ +\frac{m}{e}\left(\frac{1}{2}\xi_{000}^0x_a+C_{00}^{ab}\left(t\right)x_b+d_{00}^a\left(t\right)\right)+\lambda E_a,\end{gathered}\tag{2}$$

де $\xi^a\left(t\right)$, $d^a\left(t\right)$ *- довільні функції,* $\lambda=const$, $C^{ab}\left(t\right)+C^{ba}\left(t\right)=0$, $C^{aa}=0$, $C^{ab}=\frac{\partial\xi^a}{\partial x_b}$, $C_0^{ab}=\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x_b\partial t}$, $\xi_0^0=\frac{\partial\xi^0}{\partial t}$, $\xi_{00}^0=\frac{\partial\xi^0}{\partial t}$, $\xi_{00}^0=\frac{\partial^2\xi^0}{\partial t^2}$, $\xi_{000}^0=\frac{\partial^3\xi^0}{\partial t^3}$, $C_{00}^{ab}=\frac{\partial^3\xi^a}{\partial x_b\partial t^2}$.

Наслідок 1. [4] *Алгебра Лі* $AG\left(1,3\right)$, *базисні елементи якої задаються формулами*

$$\begin{gathered}P_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad P_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\quad G_a=t\frac{\partial}{\partial x_a}+\varepsilon_{abc}H_c\frac{\partial}{\partial E_b},\\ I_{ab}=x_b\frac{\partial}{\partial x_a}-x_a\frac{\partial}{\partial x_b}+E_a\frac{\partial}{\partial E_a}-E_a\frac{\partial}{\partial E_b}+H_b\frac{\partial}{\partial H_a}-H_a\frac{\partial}{\partial H_b},\end{gathered}\tag{3}$$

є підалгеброю алгебри інваріантності рівнянь (1).

Наслідок 2. [4] *Алгебра Лі* $AG_1\left(1,3\right)$, *базисні елементи якої задаються формулами (3) і операторами* D *– дилатації, та* A *– проективним, де*

$$D=2t\frac{\partial}{\partial t}+x_a\frac{\partial}{\partial x_a}-3E_a\frac{\partial}{\partial E_a}-2H_a\frac{\partial}{\partial H_a},\tag{4}$$

$$A=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx_a\frac{\partial}{\partial x_a}-2tH_a\frac{\partial}{\partial H_a}-\left(3tE_a+\varepsilon_{abc}x_bH_c\right)\frac{\partial}{\partial E_a},\tag{5}$$

є підалгеброю алгебри інваріантності рівнянь (1).

Наслідок 3. [4] *Алгебра Лі $AG_2(1,3)$, базисні елементи якої задаються формулами (3) – (5) і оператором*

$$D_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - H_a\frac{\partial}{\partial H_a} - 2E_a\frac{\partial}{\partial E_a}, \tag{6}$$

є підалгеброю алгебри інваріантності рівнянь (1).

Виявляється важливим також досліджувати симетрійні властивості рівнянь вигляду

$$m\ddot{\vec{x}} = e\left\{\vec{H} + \left[\vec{E}\dot{\vec{x}}\right]\right\}, \tag{7}$$

які, як неважко помітити, отримуються з рівнянь (1) заміною $\vec{E}$ на $\vec{H}$ і $\vec{H}$ на $-\vec{E}$.

Теорема 2. *Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь* $m\ddot{\vec{x}} = \lambda_1\left\{\vec{E} + \left[\dot{\vec{x}}\vec{H}\right]\right\} + \lambda_2\left\{\vec{H} + \left[\vec{E}\dot{\vec{x}}\right]\right\}$ *в класі диференціальних операторів першого порядку* $\hat{Q}_2 = \xi^0\frac{\partial}{\partial t} + \xi^k\frac{\partial}{\partial x_k} + \eta^{1_k}\frac{\partial}{\partial H_k} + \eta^{2_k}\frac{\partial}{\partial E_k}$ *є нескінченновимірна алгебра Лі, яка задається операторами виду* $\hat{Q}_2 = \xi^0\frac{\partial}{\partial t} + \xi^k\frac{\partial}{\partial x_k} + \eta^{1_k}\frac{\partial}{\partial H_k} + \eta^{2_k}\frac{\partial}{\partial E_k}$ *з коефіцієнтними функціями*

$$\begin{gathered}
\xi^0 = \xi^0(t),\\
\xi^a = \left(\frac{1}{2}\xi_0^0 + \lambda\right)x_a + C^{ab}(t)x_b + d^a(t),\\
\eta^{1_a} = \frac{\lambda_1 m}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\varepsilon_{abc}C_c^{bc}(t) + \frac{\lambda_2 m}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(\frac{1}{2}\xi_{000}^0(t)x_a + C_{00}^{ab}(t)x_b + d_{00}^a(t)\right) -\\
-\frac{1}{2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}\left(\lambda_1\lambda_2E_a + \left(3\lambda_2^2+2\lambda_1^2\right)H_a\right)\xi_0^0(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left[\left(\lambda_1H-\lambda_2E\right)\xi_0\right]_a +\\
+H_bC^{ab}(t) + \lambda\lambda_2H_a,\\
\eta^{2_a} = \frac{\lambda_2 m}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\varepsilon_{abc}C_0^{cc}(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(\frac{1}{2}\xi_{000}^0(t)x_a + C_{00}^{ab}(t)x_b + d_{00}^a(t)\right) -\\
-\frac{1}{2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}\left[\lambda_1\lambda_2H_a + \left(3\lambda_2^2+2\lambda_1^2\right)E_a\right]\xi_0^0(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left[\left(\lambda_1H-\lambda_2E\right)\xi_0\right]_a +\\
+E_bC^{ab}(t) + \lambda\lambda_2E_a,
\end{gathered} \tag{8}$$

де функції ξ^μ, C^{ab}, d^a і їх частинні похідні визначаються формулами (2), λ_1, λ_2, λ – константи.

З теореми 1 випливає, що алгеброю інваріантності рівнянь (1) є нескінченновимірна алгебра Лі, яка включає підалгебри:

а) алгебру Лі групи Галілея $G(1,3)$;

б) алгебру Лі групи $G_1(1,3)$;

в) алгебру Лі узагальненої групи $G_2(1,3)$.

У зв'язку з цим виникає задача описання рівнянь типу $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$ інваріантних відносно вказаних підалгебр.

3. Основні результати

Для побудови класу систем звичайних диференціальних рівнянь, інваріантних відносно алгебри Галілея, використаємо інваріантність рівняння Ньютона-Лоренца відносно вказаної алгебри Лі.

Теорема 3. *Алгебра Лі* $AG(1,3)$*, базисні елементи якої задаються формулами (3), є алгеброю інваріантності рівнянь* $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\vec{F} = \vec{H}\varphi^1 + \left\{\vec{E} + \left[\overline{\dot{x}H}\right]\right\}\varphi^2 + \left\{\left[\overline{HE}\right] + \dot{\vec{x}}H^2 - \vec{H}\left(\dot{x}H\right)\right\}\varphi^3, \tag{9}$$

де $\varphi^i = \varphi^i\left(w_j\right)$, $i, j = \overline{1,3}$, w_j – *інваріанти групи Галілея* $G(1,3)$,
$w_1 = (EH)$, $w_2 = H^2$, $w_3 = (H\dot{x})^2 + 2(\dot{x}EH) - \dot{x}^2H^2 - E^2$.

Доведення. Необхідність. За умови інваріантності рівнянь $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ відносно операторів зсуву P_μ слідує, що для функції $\vec{F}$ повинні виконуватись умови

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_a} = 0, \tag{10}$$

тобто права частина рівнянь $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ не залежить від t, $\vec{x}$.

Умова інваріантності $L_2\left(L_2\xi^k - \dot{x}_k L_2\xi^0\right) - F^k L_2\xi^0 = \xi^0 \dfrac{\partial F^k}{\partial t} + \xi^s \dfrac{\partial F^k}{\partial x_s} + \left(L_2\xi^s - \dot{x}_s L_2\xi^0\right)\dfrac{\partial F^k}{\partial \dot{x}_s}$ рівнянь $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ відносно операторів I_{ab} має вигляд:

$$\dot{I}_{ab}F^c = \delta_{ac}F^b - \delta_{bc}F^a, \tag{11}$$

де $\dot{I}_{ab}$ – перше продовження оператора I_{ab}, δ_{ab} – символ Кронекера, $F^i = F^i\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$.

Добре відомо, що загальним розв'язком рівняння (11) є функція

$$\vec{F} = \dot{\vec{x}}\varphi' + \vec{E}\varphi^2 + \vec{H}\varphi^3 + \left[\overline{\dot{x}E}\right]\varphi^4 + \left[\overline{\dot{x}H}\right]\varphi^5 + \left[\overline{EH}\right]\varphi^6, \tag{12}$$

де $\varphi^i = \varphi^i\left(w'_j\right)$, $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,7}$,

$w'_1 = \dot{x}^2$, $w'_2 = E^2$, $w'_3 = H^2$, $w'_4 = (EH)$, $w'_5 = (\dot{x}E)$, $w'_6 = (\dot{x}H)$, $w'_7 = (\dot{x}EH)$,

w'_j – інваріанти операторів P_μ, $\dot{I}_{ab}$, де $\dot{I}_{ab}$ – перше продовження оператора I_{ab}.

Для того, щоб рівняння $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ були інваріантними відносно операторів G_a, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$F^d_{\dot{x}_a} + \varepsilon_{abc}H_c F^d_{E_b} = 0, \tag{13}$$

де $F^d_{\dot{x}_a} = \dfrac{\partial F^d}{\partial \dot{x}_a}$, $F^d_{Eb} = \dfrac{\partial F^d}{\partial E_b}$.

Поклавши $a = d = I$ в формулах (13) і враховуючи, що F^d визначається формулою (12), отримуємо визначаюче рівняння:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 H_2\varphi'_{E_3} + H_2E_1\varphi^2_{E_3} + H_1H_2\varphi^3_{E_3} + \dot{x}_2H_2\varphi^4 + \left[\dot{x}E\right]_1 H_2\varphi^4_{E_3} + \left[\dot{x}H\right]_1 H_2\varphi^5_{E_3} + H_2^2\varphi^6 + \\
&+\left[EH\right]_1 H_2\varphi^6_{E_3} - \dot{x}_1H_3\varphi^1_{E_2} - H_3E_1\varphi^2_{E_2} - H_1H_3\varphi^3_{E_2} + \dot{x}_3H_3\varphi^4 - \left[\dot{x}E\right]_1 H_3\varphi^4_{E_2} - \\
&-\left[\dot{x}H\right]_1 H_3\varphi^5_{E_2} + H_3^2\varphi^6 - \left[EH\right]_1 H_3\varphi^6_{E_2} + \varphi' + E_1\varphi^2_{\dot{x}_1} + \dot{x}_1\varphi'_{\dot{x}_1} + H_1\varphi^3_{\dot{x}_1} + \left[\dot{x}H\right]_1 H_2\varphi^5_{E_3} + \\
&+\left[\dot{x}H\right]_1 \varphi^5_{\dot{x}_1} + \left[EH\right]_1 \varphi^6_{\dot{x}_1} = 0,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де $\varphi^i_{E_2} = \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial E_2}$, $\varphi^i_{E_3} = \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial E_3}$, $\varphi^i_{\dot{x}_1} = \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial \dot{x}_1}$, $i=\overline{1,6}$.

Так як φ^i – функції від інваріантів, то неважко переконатися в тому, що розв'язком рівняння (14) є функції

$$\varphi^2 = \varphi^5, \quad \varphi^4 = 0, \quad \varphi^1 = H_1\varphi, \quad \varphi^6 = -\varphi, \quad \varphi^3 = \varphi^{31} - \left(\dot{x}H\right)\varphi. \tag{15}$$

Згідно з формул (15) рівняння (12) приймає вигляд

$$\vec{F} = \vec{\dot{x}}H^2\varphi + \left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}\varphi^2 + \vec{H}\left(\varphi^{31} - \left(\dot{x}H\right)\varphi\right) + \left[\overrightarrow{HE}\right]\varphi. \tag{16}$$

Позначивши в функції (16) φ^{31} на φ^1, φ^2 на φ^2, φ на φ^3, ми отримуємо функцію $\vec{F}$, визначену формулою (9). Необхідність теореми доведено.

Достатність. Нехай функція $\vec{F}$ має вигляд (9). Покажемо, що рівняння (9) інваріантні відносно алгебри $AG(1,3)$. Для цього скористаємось умовою інваріантності: $\underset{2}{X}\bigcup\left(u,x\right)\Big|_{\bigcup(x,u)=0} = 0$, $L_2Q_A\psi = 0$, де ψ – довільний розв'язок, який, як неважко переконатись, тотожно задовольняє умови інваріантності базисних операторів для базисних операторів (3) алгебри Лі $AG(1,3)$. Теорема доведена. □

Теорема 4. *Для того, щоб рівняння* $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$ *були інваріантні відносно алгебри Лі* $AG(1,3)$, *доповненої оператором дилатації* D, *базисні елементи якої задаються формулами (3), (4), необхідно і достатньо, щоб:*

$$\vec{F} = \vec{H}\varphi' + \left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}\varphi^2 + \left\{\left[\overrightarrow{HE}\right] + \vec{\dot{x}}H^2 - \vec{H}\left(\dot{x}H\right)\right\}\varphi^3, \tag{17}$$

де $\varphi^i = A^i\psi^i$, $A' = w_2^{y_1}$, $A^2 = 1$, $A^3 = w_2^{-y_2}$, $\psi^i = \psi^i\left(Q_j\right)$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,2}$,

$$w_1 = \left(EH\right), \quad w_2 = H^2, \quad w_3 = \left(H\dot{x}\right)^2 + 2\left(\dot{x}EH\right) - H^2\dot{x}^2 - E^2, \quad Q_1 = w_1^4w_2^{-5}, \quad Q_2 = w_2^3w_3^{-2}.$$

Доведення. Згідно з теоремою 3 рівняння $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$, інваріантні відносно групи Галілея $G(1,3)$, мають вигляд (9). Умова інваріантності рівняння (9) відносно оператора дилатації D (4), згідно $\underset{2}{X}\bigcup\left(u,x\right)\Big|_{\bigcup(x,u)=0} = 0$ має вигляд

$$D'F_a = -3F_a, \tag{18}$$

де D' – перше продовження оператора D, F_a – визначається формулою (9).

Формула (18) задає визначаюче рівняння:

$$
\begin{aligned}
&H_cD'\varphi' + H_c\varphi' + \left\{E_c + \left[\dot{x}H\right]_c\right\}D'\varphi^2 + \left\{\left[HE\right]_c + \dot{x}_cH^2 - H_c\left(\dot{x}H\right)\right\}D'\varphi^3 - \\
&-2\left\{\left[HE\right]_c + \dot{x}_cH^2 - H_c\left(\dot{x}H\right)\right\}\varphi^3 = 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

З формули (19) після розкладу отримуємо систему визначаючих рівнянь

$$D'\varphi^1 = -\varphi^1, \quad D'\varphi^2 = 0, \quad D'\varphi^3 = 2\varphi^3. \tag{20}$$

Розв'язком першого рівняння системи (20) буде функція

$$\varphi^1 = w_2^{1/4}\psi^1, \tag{21}$$

де $w_2 = H^2, \quad w_1 = (EH), \quad w_3 = (H\dot{x})^2 + 2(\dot{x}EH) - H^2\dot{x}^2 - E^2, \quad \psi^1 = \psi^1(Q_1, Q_2),$ $Q_1 = w_1^4 w_2^{-5}, \quad Q_2 = w_2^3 w_3^{-2}.$

З другого рівняння системи (20) отримуємо

$$\varphi^2 = \psi^2, \tag{22}$$

де $\psi^2 = \psi^2(Q_1, Q_2), \quad Q_1, \quad Q_2$ задаються формулою (21).

Розв'язком третього рівняння системи (20) буде функція

$$\varphi^3 = w_2^{1/2}\psi^3, \tag{23}$$

де $\psi^3 = \psi^3(Q_1, Q_2), \quad Q_1, \quad Q_2$ задаються формулами (21).

Згідно формул (21) – (23) функція $\vec{F}$ (9) має вигляд (11). Отже необхідність доведена.

Достатність доводиться аналогічно доведенню достатності теореми 3. □

Теорема 5. *Алгебра Лі групи Галілея* $G(1,3)$, *доповненої оператором* D_1, *базисні елементи якої задаються формулами (3), (6), є алгеброю інваріантності рівнянь* $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H})$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\vec{F} = \vec{H}\varphi' + \left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}\varphi^2 + \left\{\left[\overrightarrow{HE}\right] + \dot{\vec{x}}H^2 - \vec{H}(\dot{x}H)\right\}\varphi^3, \tag{24}$$

де $\varphi' = w_2^{1/2}\psi', \quad \varphi^2 = \psi^2, \quad \varphi^3 = w_2^{-1/2}\psi^3, \quad \psi^i = \psi^i(Q_1', Q_2'), \quad i = \overline{1,3},$ $Q_1' = w_1^2 w_2^{-3}, \quad Q_2' = w_2^2 w_3^{-1}, \quad w_j, \quad j = \overline{1,3}$, *визначені формулою (17).*

Доведення. Рівняння $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H})$, інваріантні відносно алгебри Лі групи Галілея $G(1,3)$, згідно теореми 3 мають вигляд (9).

Умова інваріантності рівнянь $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H})$, (9) відносно оператора D_1, (6), визначаються формулою

$$D_1' F_c = -2F_c, \tag{25}$$

де F_c задаються формулами (9), D_1' - перше продовження оператора D_1. Перепишемо формулу (25) у вигляді

$$\vec{H}D_1'\varphi^1 + \left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}D_1'\varphi^2 + \vec{H}\varphi^1 + \left\{\left[\overrightarrow{HE}\right] + \dot{\vec{x}}H^2 - \vec{H}(\dot{x}H)\right\}\left(\varphi^3 + D_1'\varphi^3\right) = 0. \tag{26}$$

Після розкладу рівняння (26) отримаємо систему визначаючих рівнянь

$$D_1'\varphi^1 = -\varphi^1, \quad D_1'\varphi^2 = 0, \quad D_1'\varphi^3 = \varphi^3, \tag{27}$$

розв'язком якої, як неважко переконатися, будуть функції

$$\varphi^1 = w_2^{1/2}\psi^1, \quad \varphi^2 = \psi^2, \quad \varphi^3 = w_2^{-1/2}\psi^3,$$

де $\psi^i, \quad w_i, \quad i = \overline{1,3}$ визначаються формулою (24).

Необхідність доведена.

Достатність теореми доводиться безпосередньо перевіркою. □

Теорема 6. *Для того, щоб алгебра Лі* $AG(1,3)$, *доповнена операторами* D, D_1, *базисні елементи якої задаються формулами (3), (4), (6), була алгеброю інваріантності рівнянь* $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H})$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\vec{F} = \frac{w_1}{w_2}u'\vec{H} + \left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}u^2 + \left\{\left[\overrightarrow{HE}\right] + \dot{\vec{x}}H^2 - \vec{H}(\dot{x}H)\right\}w_2^{-1/2}u^3, \tag{28}$$

де $u^i = u^i\left(R\right), \quad i=\overline{1,3}, \quad R = w_1^2 w_2^{-4} w_3, \quad w_i$ *визначається формулою (17).*

Доведення. Згідно теореми 4 рівняння $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$, інваріантні відносно алгебри Лі $AG\left(1,3\right)$, доповненої оператором дилатації D (4), мають вигляд (17). Згідно доведенню теореми 5, умова інваріантності рівнянь $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$, (21) задається формулою (25). Визначаючі рівняння для функції ψ^i, заданих формулою (17), мають вигляд

$$\begin{gathered} w_2^{1/4} H_c D_1'\psi^3 - \frac{1}{2} w_2^{1/4}\psi^3 + \left\{\overrightarrow{E_c} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]_c\right\} D_1'\psi^2 + \\ + \left\{\left[\overrightarrow{HE}\right]_c + \dot{\vec{x}}_c H^2 - \overrightarrow{H_c}\left(\dot{x}H\right)\right\} w_2^{-1/2} D_1'\psi^3 = 0, \end{gathered} \tag{29}$$

де D_1' – перше продовження оператора D_1.

Розкладаючи рівняння (29), отримуємо систему визначаючих рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi^1 &= 2Q_1\psi^1_{Q_1} + 2Q_2\psi^1_{Q_2}, \\ 0 &= 2Q_1\psi^2_{Q_1} + 2Q_2\psi^2_{Q_2}, \\ 0 &= 2Q_1\psi^3_{Q_1} + 2Q_2\psi^3_{Q_2}, \end{aligned} \tag{30}$$

де Q_i визначаються формулою (17) $w^j_{Q_i} = \dfrac{\partial w^j}{\partial Q_i}, \quad i=\overline{1,2}, \quad j=\overline{1,3}$.

Неважко переконатись, що розв'язком системи (30) будуть функції

$$\psi^1 = Q_1^{1/4} u^1, \quad \psi^2 = u^2, \quad \psi^3 = u^3, \tag{31}$$

де $u^i = u^i\left(\dfrac{Q_1}{Q_2}\right), \quad \dfrac{Q_1}{Q_2} = w_1^4 w_2^{-8} w_3^2$.

Підставляючи отримані вирази для функцій $\psi^i, \quad i=\overline{1,3}$ в формулу (17), ми отримуємо формулу (28). Необхідність доведена. □

Достатність доводиться аналогічно доведенню достатності теореми 3.

Теорема 7. *Алгебра Лі групи* $G\left(1,3\right)$*, генератори якої задаються формулами (3) – (5), є алгеброю інваріантності рівняння* $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$ *тоді і тільки тоді, коли має вигляд (17).*

Доведення. Рівняння $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t,\vec{x},\dot{\vec{x}},\vec{E},\vec{H}\right)$ будуть інваріантними відносно проективного оператора A (5), якщо виконується умова:

$$A'F^a = -3tF^a + x_a\left(F^a_{\dot{x}b} - \varepsilon_{abc} H_d F^a_{E_c}\right) = 0, \tag{32}$$

де A' – перше продовження оператора A, мають вигляд (17).

Оскільки оператор A' виражається через оператори $D', \quad G_a'$, де $D', \quad G_a'$ – перші продовження операторів $D, \quad G_a$, за формулою

$$A' = tD' + x_a G_a' - t^2\frac{\partial}{\partial t} - tx_a\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{33}$$

а функції F^i (17), $i=\overline{1,3}$, інваріантні відносно операторів $D, \quad G_a, \quad P_\mu$, то вони є інваріантними і відносно оператора A, визначеного в (5).

Отже, необхідність доведена.

Достатність теореми доводиться безпосередньою перевіркою. □

Теорема 8. *Для того, щоб рівняння* $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ *були інваріантними відносно алгебри Лі* $AG_2(1,3)$*, базисні елементи якої задаються формулами (3) – (6), необхідно і достатньо, щоб функція* $\vec{F}$ *мала вигляд (28).*

Доведення. З теореми 6 слідує, що рівняння $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$, інваріантні відносно алгебри Лі групи Галілея $G(1,3)$, доповненої операторами дилатації D (4) і D_1 (6), мають вигляд (28). З цього слідує, що рівняння (28) інваріантні відносно операторів G_a (3) та D (4). Так як, згідно формули (34), оператор A' є лінійною комбінацією операторів D' і G'_a, то рівняння (28) будуть інваріантними і відносно проективного оператора A (5). Необхідність доведена.

Достатність теореми перевіряється безпосередньою перевіркою інваріантності рівняння (28) відносно кожного з базисних операторів підалгебри алгебри $AG_2(1,3)$. □

Висновки. Система рівнянь $m\ddot{\vec{x}} = e\left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}$ інваріантна відносно нескінченної алгебри інваріантності, частинним випадком якої є алгебра Галілея і її розширення. Наявність такої широкої симетрії рівнянь Ньютона-Лоренца $m\ddot{\vec{x}} = e\left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}$ дає можливість, з використанням теоретико-алгебраїчних методів, описати нові класи рівнянь типу Ньютона-Лоренца $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}\right)$, для яких вдається побудувати точні розв'язки. В статті описаний такий клас системи звичайних диференціальних рівнянь. Важливий інтерес становить те, що система рівнянь Ньютона-Лоренца $m\ddot{\vec{x}} = e\left\{\vec{E} + \left[\overrightarrow{\dot{x}H}\right]\right\}$ є частинним випадком побудованого класу галілеєвоінваріантних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють про відсутність конфліктів інтересів і повне дотримання всіх правил етики журнальних статей.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Cheeger J., Ebin D. G.. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Providence: AMS, 2008. 161 p. URL: https://www.ams.org/books/chel/365/chel365-endmatter.pdf
2. Eberlein P. B. Left invariant geometry of Lie groups. *Cubo*. 2004. Vol. 6, No. 1. P. 427-510.
3. Ivanova N. M. On Lie symmetries of a class of reaction-diffusion equations. *Proc. of the 4th Intern. Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"*. Nicosia: University of Cyprus, 2009. P. 84-86.
4. Lie S. Theorie der Transformationsgruppen. *Math. Ann*. 1880. Vol. 16. P. 441-528. URL: https://eudml.org/doc/156896
5. Bertram W. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings. *Memoirs of the American Mathematical Society*. Providence: AMS, 2008. 211 p. URL: https://hal.science/hal-00004190v2
6. Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. 360 с.
7. Сєров М., Карпалюк Т. Інваріантність системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля. *Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка*. 2010. Т. 7. С. 267-288. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Mvntsh_2010_7_19

UDC 517.9

A class of Galilean invariant systems of ordinary differential equations of the second order

Oleksandr Tymoshenko, Ivanna Leonova

Abstract. The article is devoted to the construction of a class of Galilean invariant systems of ordinary differential equations of the second order. For this, a symmetric analysis of the Newton-Lorentz equation was used, and based on the invariance of this equation, a class of systems of differential equations was constructed, a partial case of which is the Newton-Lorentz equation, which is invariant with respect to the Galilean algebra.

Keywords: Lie algebra, Galilean algebra, invariant systems, differential equations.

References

1. Cheeger, J., Ebin, D. G. (2008). *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, AMS, Providence. https://www.ams.org/books/chel/365/chel365-endmatter.pdf
2. Eberlein, P. B. (2004). *Left invariant geometry of Lie groups*, Cubo, **6** (1), 427-510.
3. Ivanova, N. M. (2009). *On Lie symmetries of a class of reaction-diffusion equations*, Proc. of the 4th Intern. Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”, University of Cyprus, Nicosia, 84-86.
4. Lie, S. (1880). *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann, **16**, 441-528. https://eudml.org/doc/156896
5. Bertram, W. (2008). *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings*, Memoirs of the American Mathematical Society, AMS, Providence. https://hal.science/hal-00004190v2
6. Lagno, V. I., Spichak, S. V., Stogniy, V. I. (2002). *Symmetrical analysis of evolutionary type equations*, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv. [in Ukrainian]
7. Serov, M., Karpalyuk, T. (2010). *Invariance of the system of equations of convection diffusion with respect to the generalized Galilean algebra in the case of a three-dimensional vector field*, Mathematical Bulletin of the Scientific Society named after Shevchenko, **7**, 267-288. [in Ukrainian]. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Mvntsh_2010_7_19

Про авторів / About the authors

Олександр Тимошенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Oleksandr Tymoshenko, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Іванна Леонова, асистент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Ivanna Leonova, Assistant, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 16.08.2024
Доопрацьовано / Revised 08.10.2024