М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 1–8.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 1–8.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.612

Алгоритм дослідження нерозв'язності рівняння $z^n = x^n + y^n, n \geq 3$ у цілих додатних числах

Василь Абрамчук[1], **Ігор Абрамчук**[2]

[1] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
abramchuk.doc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1053-6373

[2] Вінницький національний технічний університет,
кафедра вищої математики, м. Вінниця, Україна
abramchuk@vntu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7291-5566

Анотація. Визначені необхідні умови, за яких рівняння може мати розв'язок у цілих додатних числах. Параметри рівняння x,y,n узгоджені з z і належать обмеженим замкненим множинам. Показники степенів і змінні розділені на класи. Доведено, що у просторі змішаних змінних, зв'язаних рівнянням, де одна із змінних дійсна, а інші цілі числа, значення дійсної змінної ірраціональне, що є достатньою умовою нерозв'язності рівняння у цілих додатних числах для всіх показників степенів більших трьох. На кривих Ферма існує лише дві раціональні точки. Побудована матрична (лінійна) модель степенів цілих додатних чисел.

Ключові слова: необхідні умови, класи параметрів, ірраціональні числа, послідовність Ферма, матрична модель степенів.

1. Вступ

Значення теореми Ферма для математики полягає у тому, що при намаганні її доведення була створена «теорія алгебраїчних чисел» [1; 4]. Складність методу Ейлера-Куммера, започаткованого Ейлером при дослідженні рівняння $z^3 = x^3 + y^3$, для розв'язування рівнянь вищих степенів полягає у тому, що у кільцях D_n, $n \geq 3$, з комплексними одиницями $\varepsilon^n = 1$ повинна виконуватись основна теорема арифметики.

1. Необхідні умови існування рівності $z^n = x^n + y^n, n \in N, n \geq 2$, у цілих додатних числах x, y, z.

1.1 Для всіх $n \in N, n \geq 2, z \in N, z \geq 5, x, y \in N$, числа $x = y$ не можуть бути розв'язками рівняння

$$z^n = x^n + y^n, n \in N, n \geq 2. \tag{1}$$

Допустимо, що $x = y$, тоді $z^n = 2x^n \Rightarrow x = \frac{z}{\sqrt[n]{2}}$ – число ірраціональне.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-01

1.2 Оскільки рівняння (1) симетричне відносно змінних x, y, то достатньо розглядати випадок $y < x$. Якщо $y > x$, то присвоїти $x_1 := y, y_1 := x$ і досліджувати рівняння $z^n = x_1^n + y_1^n$ за умови $y_1 < x_1$.

1.3 **Лема 1**. Для існування рівності (1) у цілих додатних числах x, y, z необхідно, щоб виконувались нерівності:

$$x < z, y < z, z < x + y, z \in N, z \geq 5. \quad (2)$$

Доведення. Умова $z \geq 5$ випливає з найменшого (примітивного) розв'язку $x = 4, y = 3$ рівняння $z^2 = x^2 + y^2, z = 5$.

Для існування рівності (1) у цілих додатних числах x, y, z нерівності $x < z, y < z$ очевидні, Параметри x, y обмежені зверху: $x \leq z - 1, y \leq z - 1$. Доведемо нерівність $z < x + y$. Допустимо протилежне $z \geq x + y$. Тоді для всіх $n \in N, n \geq 2$, матимемо $z^n \geq (x + y)^n > x^n + y^n$, що протирічить рівності (1). Із нерівності $z < x + y$ випливає обмеженість параметрів x, y знизу: $x \geq 2, y \geq 2$.

Лему доведено.

1.4 Для виконання рівності (1) у цілих додатних числах x, y, z необхідно, щоб параметр n був обмеженим зверху для кожного $z \in N, z \geq 5$. Оскільки $z^n = x^n + y^n < 2(z - 1)^n$, то $n \ln z < \ln 2 + n \ln(z - 1)$. Позначимо $n_0(z) = \left[\frac{\ln 2}{\ln\frac{z}{(z-1)}}\right]$, де $[a]$ – ціла частина числа a. Отже, всі цілі додатні числа n, що належать відрізку $[2; n_0(z)]$ є показниками, узгодженими з z. Для $n > n_0(z)$ матимемо $z^n > 2(z - 1)^n > x^n + y^n$ і рівність (1) не виконуватиметься.

Висновок. Щоб виконувалась рівність (1) у цілих додатних числах необхідно, щоб для всіх $z \in N, z \geq 5$, параметри x, y, n були узгодженими з z (підпорядкованими z). Позначимо через $K(z)$ обмежену замкнену множину параметрів x, y, n: $K(z) = \{(x, y, n) \in N: 2 \leq x \leq z - 1, 2 \leq y \leq z - 1, 2 \leq n \leq n_0(z)\}$.

2. Класи параметрів x, y, z, n.

Показники n степенів $a^n, a \in N, a \geq 2$, розділимо на два класи $P, P^{(2)}$. За базис класу P виберемо всі прості натуральні числа $n \geq 3$, матимемо клас непарних натуральних показників. До базиса P добавимо просте число $n = 2$ і утворимо клас парних показників $P^{(2)}$. З класу $P^{(2)}$ виділимо підклас $P^{(4)}$ – множина цілих додатних чисел, що діляться на чотири. Дослідження нерозв'язності рівнянь з показниками підкласу $P^{(4)}$ належить Ферма.

Степені з показниками підкласу $P^{(4)}$ записуватимемо: $a^n = b^4$, наприклад, $a^{40} = a^{8\cdot 5} = (a^{10})^4 = b^4$. Степені a^n з показниками класу P записуватимемо як степені з найменшим простим дільником показника n, наприклад, $a^{51} = a^{3\cdot 17} = (a^{17})^3 = b^3$. Степені з складеними показниками класу $P^{(2)}$ записуватимемо або як степені з показником 2, або як степені з показником, що є найменшим простим дільником $d \geq 3$ показника n, наприклад, $a^{2\cdot 5\cdot 17} = (a^{5\cdot 17})^2 = b_1^2 = (a^{2\cdot 17})^5 = b_2^5$.

Попарно взаємно прості трійки цілих додатних чисел $(x, y, z) \in N$ простору R^3 розіб'ємо на три класи C, D, E. Якщо показник $n \in P$, то до класу C віднесемо трійки чисел, для яких виконуються умови: 1) $z \in N, z \geq 5$. 2) $(x, y) \in N, 2 \leq x \leq z - 1, 2 \leq y \leq z - 1$. 3) $(x + y, z) = d > 1$; до класу D віднесемо трійки чисел, для яких виконуються умови 1), 2) і $(x + y, z) = 1$. Якщо показник $n = 2$, то до класу E віднесемо трійки взаємно простих цілих додатних чисел, які є розв'язками рівняння $z^2 = x^2 + y^2$, яке шляхом заміни $t = \frac{y}{x}$ приводиться до рівняння першого порядку

$$t = \frac{y}{x} = \frac{2\frac{m}{y}}{1-\left(\frac{m}{y}\right)^2}, m = z - x, y > m.$$

Підставивши на місце $\frac{m}{y}$ нескоротний дріб $\frac{p}{q} = \frac{m}{y}$, дістанемо аналітичний розв'язок

$$\frac{y}{x} = \frac{2pq}{q^2-p^2}, y = 2pq, x = q^2 - p^2, z = p^2 + q^2. \quad (3)$$

Якщо $(p,q) = 1$ і p, q – різних парностей, то формули (3) задають найменший (примітивний) розв'язок. Якщо $(p,q) = 1$ і p, q – непарні числа, то найменший розв'язок дістанемо після скорочення чисел x, y, z на два. Розширимо область задання рівняння (1), а саме, прийнявши, що $x, z \in N, y \in R$ – простір змішаних параметрів $R^3(x, z \in N, y \in R)$. [6; 7] Перепишемо рівняння (1) у формі $y = \sqrt[n]{z^n - x^n} = z(1-q^n)^{\frac{1}{n}}, 0 < q < 1$. Оскільки $\alpha = (1-q^n)^{\frac{1}{n}}, 0 < q < 1, n \in N, n \geq 3$, є неперервною монотонною функцією на замкненій обмеженій множині $K(z)$, то розв'язок рівняння (1) у просторі $R^3(x, z \in N, y \in R)$ існує і єдиний для всіх $z \in N, z \geq 5, n \in [3; n_0(z)]$. Якщо для всіх $z \in N, z \geq 5$, і параметрів x, n узгоджених з z, числа $y = \sqrt[n]{z^n - x^n}$ є ірраціональними, то це означатиме, що рівняння (1) не має розв'язків у цілих додатних числах. Позначимо $m(n,z) = \left[\sqrt[n]{z^n - x^n}\right], x < z$.

2. Постановка проблеми

Довести, що рівняння $z^n = x^n + y^n$ не має розв'язків у цілих додатних числах x, y, z для всіх $n \in N, n \geq 3$.

Мета статті. 1. Довести, що значеннями функції $y = \sqrt[n]{z^n - x^n}$ є ірраціональні числа для всіх $z \in N, z \geq 5, n \in [3; n_0(z)], x \in [m(n,z); z-1]$. 2. Побудувати матричну модель степенів цілих додатних чисел.

3. Основні результати

Виділимо ті класи множин, для яких рівність (1) неможлива у цілих додатних числах. Для показників підкласу $P^{(4)}$ доведено Ферма.

Лема 2. Для всіх цілих додатних чисел (x, y, z) з простими числами $z \in N, z \geq 5$, і показниками $n \in P$ рівність $z^n = x^n + y^n$ неможлива.

Доведення. Допустимо, що існує трійка цілих додатних чисел (x, y, z) з простими $z \geq 5$ і показник $m \in N$, що виконується рівність $z^m = x^m + y^m, m \geq 3$. Тоді $z^m = x^m + y^m = (x+y)P_{m-1}(x,y)$, отже, $z^m \vdots (x+y)$. Оскільки $x \geq 2, y \geq 2$, то $(x+y, z) = d > 1$, але $z < x + y < 2(z-1)$, тому $(x+y, z) = 1, (x,y,z) \in D$. Отримане протиріччя доводить, що в класі $(x,y,z) \in D$, z просте число, не може існувати рівність $z^m = x^m + y^m$ для всіх показників $m \in P, m \geq 3$.

Лему доведено.

3. **Оцінка залишку біноміального ряду розкладу функції** $\varphi(q) = (1-q^n)^{\frac{1}{n}}, n \in N, n \geq 3, q = \frac{r}{p}, r < p,\ r, p \in N, (r,p) = 1$.

Оскільки біноміальний ряд розкладу функції $\varphi(q), 0 < q < 1$, збігається до $\varphi(q)$, то позначивши суму ряду символом α, матимемо [2]

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n}q^n - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)q^{2n} - \dots - \frac{1}{k!}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(k-1-\frac{1}{n}\right)q^{kn} - \dots = 1 - \frac{1}{n}q^n - \dots - \frac{1}{k}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k-1)n}\right)q^{kn} - \dots \quad (4)$$

Нехай $S_k - k$-та частинна сума ряду (4):

$S_k = 1 - \frac{1}{n}q^n - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)q^{2n} - \dots - \frac{1}{k}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k-1)^n}\right)q^{kn}$. Оцінимо залишок ряду

$$|r_k| = |\alpha - S_k| = \left|\frac{1}{k+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{kn}\right)q^{(k+1)n} + \cdots\right| = \frac{1}{k+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{kn}\right)q^{(k+1)n} + \frac{1}{k+2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)n}\right)q^{(k+2)n} + \cdots < \frac{1}{k}\frac{1}{n}\left(q^{(k+1)n} + q^{(k+2)n} + \cdots\right) = \frac{1}{k}\frac{1}{n}\frac{q^{(k+1)n}}{1-q^n} = \frac{r^n}{n(p^n-r^n)}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn} = \sigma_k \quad . \tag{5}$$

Оскільки $0 < q < 1, n \in N, n \geq 3$, то при $k \to \infty, \sigma_k \to 0$. З нерівності $|r_k| < \sigma_k$ випливає $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$.

4. **Ірраціональність α.**

Лема 3. Для всіх $n \in N, n \geq 3$, і додатних нескоротних раціональних дробів $0 < q = \frac{r}{p} < 1$, числа $\alpha = (1-q^n)^{\frac{1}{n}}$ є ірраціональними, де r, p – цілі додатні взаємно прості числа.

Доведення. Для доведення леми використаємо висновки теореми теорії чисел [1, с. 193]: якщо для будь якого додатного c можна знайти хоча б одну пару цілих чисел a і b таких, що

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{b}\,, \tag{6}$$

то α ірраціональне.

Якщо раціональний дріб $S_k = \frac{a}{b}$, де a – деяке символьне ціле додатне число, $b = n(p^n - r^n)$, то з нерівності (5) випливатиме

$$|\alpha - S_k| = \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{r^n}{n(p^n-r^n)} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn}.$$

Виберемо k настільки великим, щоб для довільної додатної константи c виконувалась нерівність

$$\frac{r^n}{n(p^n-r^n)} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn} < \frac{c}{n(p^n-r^n)} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{n(p^n-r^n)}. \tag{7_1}$$

В силу нерівності (6) робимо висновок, що α – число ірраціональне. Якщо $b \neq n(p^n - r^n)$, то додатний раціональний дріб S_k дозволяє перейти від пари чисел a, b до нової пари шляхом заміни $\frac{a}{b}$ на $\frac{a_1 s}{t}$. Тоді $S_k = \frac{a_1 s}{n(p^n-r^n)t}$, де a_1, s, t – цілі додатні взаємно прості числа. Для старої константи c матимемо $|\alpha - S_k| = \left|\alpha - \frac{a_1 s}{n(p^n-r^n)t}\right| < \sigma_k < \frac{ct}{n(p^n-r^n)t} = \frac{c_1}{n(p^n-r^n)t}$, де $c_1 = ct$. Щоб нерівність виконувалась для нової довільної константи c_1, необхідно стару константу зменшити у t разів. Для цього достатньо збільшити k: $\frac{r^n t}{n(p^n-r^n)t} \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{r}{p}\right)^{kn} < \frac{c_1}{n(p^n-r^n)t}$. Отже для нової довільної додатної константи c_1 виконуватиметься нерівність

$$|\alpha - S_k| = \left|\alpha - \frac{a_2}{n(p^n-r^n)t}\right| < \frac{c_1}{n(p^n-r^n)t}\,, \tag{7_2}$$

що означатиме – α число ірраціональне.

Таким чином, для довільних додатних констант c (або c_1) існують цілі додатні числа a і b, для яких виконуватиметься нерівність (6), що означає, що значеннями функції $\varphi(q), 0 < q < 1$, є ірраціональні числа для всіх $n \in N, n \geq 3$.

Лему доведено.

5. **Теорема про нерозв'язність рівняння $z^n = x^n + y^n, n \in N, n \geq 3$, у цілих додатних числах**.

Оскільки параметри $(x, y, n) \in K(z)$, то рівняння $z^n = x^n + y^n$ запишемо в еквівалентній формі $y = \sqrt[n]{z^n - x^n} = z\sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{z}\right)^n}, x < z$, де змінна x належить проміжку $[m(n, z); z-1], n \in [3; n_0(z)]$. Для показника $n = 2$ розв'язок (x, y, z) рівняння належить класу E.

Позначимо $\varphi(q) = (1 - q^n)^{\frac{1}{n}}, 0 < q < 1, n \in N, n \geq 3$, і використаємо лему 3, з якої, як наслідок, матимемо, що для всіх нескоротних раціональних дробів $q = \frac{x}{z}$, значеннями функції $\varphi(q)$ є ірраціональні числа. Тому значеннями функції $y = z \cdot \varphi(q), q = \frac{x}{z}$, будуть ірраціональні числа для всіх $z \in N, z \geq 5$, і параметрів x, n узгоджених з z. Таким чином, має місце теорема.

Теорема. Рівняння $z^n = x^n + y^n$ для всіх $z \in N, z \geq 5$, немає розв'язків у цілих додатних числах x, y, n узгоджених з z: $n \in [3; n_0(z)], 2 \leq x \leq z - 1, 2 \leq y \leq z - 1$.

Зауваження. Якщо опустити у формулюванні теореми «у цілих додатних числах x, y, n узгоджених з z», то необхідні умови існування розв'язків у цілих додатних числах – не виконуватимуться.

Як наслідок, з теореми випливає, що на кривих Ферма [5], заданих рівнянням $1 = x^n + y^n, n \in N, n \geq 3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, x, y - раціональні числа, існують лише дві раціональні точки $(0; 1), (1; 0)$.

6. **Лінійні (матричні) моделі для степенів a^n цілих додатних чисел a з довільними показниками $n \in N, n \geq 3$.**

Оскільки розв'язання рівнянь у цілих додатних числах не залежить від того, у якій системі числення будуть записані числа, то виберемо позиційну двійкову систему числення (з основою $q = 2_{10} = 10_2$). Тоді довільне ціле додатне число $a > 2$ запишемо однозначно, як многочлен $a = P^{(1)} = d_m 10^m + \cdots + d_1 10 + d_0$, де $d_i = 0 \vee 1, \forall i = 0,1, \ldots, m, m \in N, m \geq 2$, або як вектор-рядок $\vec{a} = [d_m, \ldots, d_1, d_0]$. Степенем a^2 є добуток $a \cdot a = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i P^{(1)} = P^{(2)}(\vec{a})$ (позначення: $P^{(2)}(\vec{a})$ – многочлен, що відповідає степеню a^2 числа $a \in N, a \geq 2$, двійковий код якого є вектор $\vec{a}$). Отже, якщо числу a у відповідність поставити вектор $\vec{a}$, то природно степеню a^2 у відповідність поставити таблицю (модель), складену з $(m+1)$-го вектора $\left[d_i 10^i d_m, \ldots, d_i 10^i d_1, d_i 10^i d_0\right], i = 0,1, \ldots, m$. Оскільки $d_i = 0 \vee 1$, то стандартною формою моделі a^2 є таблиця складена з нуль-векторів, якщо $d_i = 0$, та векторів $\vec{a}$, зміщених вліво на i позицій, якщо $d_i = 1, i = 0,1, \ldots, m$. Значення a^2 є значенням многочлена $P^{(2)}(\vec{a})$, якому у стандартній формі моделі однозначно відповідатиме значення суми, отримане порозрядним додаванням елементів у стовпцях таблиці за правилами позиційної двійкової системи числення. Оскільки при порозрядному додаванні значення суми не зміниться, якщо таблицю, записану в стандартній формі, доповнити нулями нижче правої піддіагоналі і вище лівої наддіагоналі, то матричною формою моделі a^2 буде прямокутна матриця $A^{(2)}[(m+1) \times (2m+1)]$.

У загальному, степенем a^n є многочлен $a^n = a \cdot a^{n-1} = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i P^{(n-1)}(\vec{a}) = P^{(n)}(\vec{a})$. Замінивши $P^{(n-1)}(\vec{a})$ на $A^{(n-1)}$, дістанемо матричну форму моделі степеня a^n, яку позначимо $A^{(n)}$. Елементами $A^{(n)}$ є матриці $A_{n,i} = d_i 10^i A^{(n-1)}, i = 0,1, \ldots, m$. Матричні елементи $A_{n,i}$ матриці $A^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} A_{n,i}$, рекурентно формуються для вектора $\vec{a} = [d_m, \ldots, d_1, d_0]$ за формулою:

$$A_{n,i} == d_i 10^i \sum_{j_1=0}^{m} d_{j_1} 10^{j_1} \sum_{j_2=0}^{m} d_{j_2} 10^{j_2} \ldots \sum_{j_{n-3}=0}^{m} d_{j_{n-3}} 10^{j_{n-3}} A^{(2)}, \quad n \in N, n \geq 3, i = 0,1, \ldots, m. \tag{8}$$

Значення степеня a^n є значенням многочлена $P^{(n)}(\vec{a})$, яке отримується порозрядним додаванням елементів стовпців усіх матриць $A_{n,i}, n \in N, n \geq 3, i = 0,1, \ldots, m$.

Підставивши у формулу $A^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} A_{n,i}$ вираз (8), звівши подібні, дістанемо правило формування матриці $A^{(n)}$:

$$A^{(n)} = L_{P_n}(q)A^{(2)} , \tag{9}$$

де $L_{P_n}(q)$ – многочлен відносно двійкової основи $q = 10_2$ з коефіцієнтами 0 або 1. Многочлен $L_{P_n}(q)$ визначає послідовне зміщення вліво матриці $A^{(2)}$ на n_j позицій, де n_j – показники степенів основи $q = 10_2, p_n$ – порядок многочлена. Многочлен $L_{P_n}(q)$ обчислюється рекурентно $L_{P_n}(q) = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i L_{P_{n-1}}(q)\,, n \in N, L_{P_2} = 1, n \geq 3$, на основі формування матриці $A^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i A^{(n-1)}$ за правилами позиційної двійкової системи числення. Позначимо через $S\big(A^{(n)}\big)$ значення многочлена $P^{(n)}(\vec{a})$, що є значенням степеня $a^n, a \in N, a \geq 2$, і визначається порозрядним додаванням елементів у стовпцях матриці $A^{(n)}$:

$$S\big(A^{(n)}\big) = L_{P_n}(q)S\big(A^{(2)}\big). \tag{10}$$

На основі формул (9), (10) побудуємо алгоритм обчислення степенів цілих додатних чисел.

Алгоритм обчислення степенів.

А1. Записати ціле додатне число a у двійково-позиційній системі як вектор $\vec{a} = (d_m, \dots, d_1, d_0)$.

А2. Обчислити вектор $\vec{a}^2$ – значення степеня a^2. Оскільки стандартною формою моделі степеня a^2 є таблиця (матриця) складена з нуль-векторів, якщо $d_i = 0$ і векторів $\vec{a}$, зміщених вліво на i позицій, якщо $d_i = 1$, то опустивши нульові вектор-рядки, отримаємо стиснуту форму матричної моделі a^2. Вектор $\vec{a}^2$ отримується порозрядним додаванням елементів вектор-стовпців матриці $A^{(2)}$ за правилами двійково-позиційної арифметики.

А3. Обчислити вектор $\vec{a}^3$ – значення степеня a^3. Застосуємо рекурентність формули $a^3 = a \cdot a^2$: присвоїти $\vec{b} \coloneqq \vec{a}^2$ і застосувати правило А2 – послідовно зміщуючи вліво вектор $\vec{b}$ на i позицій, якщо $d_i = 1$ (d_i – i-та координата (i-ий розряд) вектора $\vec{a}$). Результатом $\vec{a}^3$ порозрядне додавання елементів вектор-стовпців матриці $A^{(3)}$.

А4. Процес рекурентно повторити для всіх степенів a^n: присвоїти $\vec{b} \coloneqq \vec{a}^{(n-1)}$ і виконати правило 3.

Степінь a^n для довільного цілого додатного числа $a \geq 2$, точно реалізується на ЕОМ, оскільки єдиною операцією є порозрядне додавання елементів стовпців матриць $A^{(n)}$. [3]

7. Послідовність Ферма. На елементах x, y, z, що задовільняють умовам леми 1, визначимо функціональну послідовність

$$\xi_n = \frac{x^n + y^n}{z^n}, n \in N, n \geq 2, \xi_1 = \frac{x+y}{z} > 1. \tag{11}$$

Лема 4.Послідовність (11) строго монотонно спадає з ростом n .

Доведення. Для довільного $k \in N, k \geq 1$, маємо

$$\xi_k = \frac{x^k + y^k}{z^k} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x^{k+1} + y^k x}{z^k x} > \frac{x^{k+1} + y^{k+1}}{z^k x} > \frac{x^{k+1} + y^{k+1}}{z^{k+1}} = \xi_{k+1},$$

оскільки $y < x, z > x, x \geq 2$. Таким чином, для всіх $k \in N, k \geq 1, \xi_k > \xi_{k+1}$. Якщо існує $m \geq 2$ таке, що $\xi_m = 1$, то це означає, що виконується рівність $z^m = x^m + y^m$ для цілих додатних чисел x, y, z.

Лему доведено.

Висновки. Визначені необхідні умови, за яких рівняння $z^n = x^n + y^n$, $n \in N, n \geq 3$, може мати розв'язки у цілих додатних числах – параметри x, y, n повинні бути узгодженими з z і належати обмеженим замкненим множинам $K(z)$. Область задання рівняння розширимо: наприклад, z, x – цілі додатні числа, y – дійсна змінна, яка приймає ірраціональні значення для всіх $n \in N, n \geq 3$, – достатня умова нерозв'язності рівняння у цілих додатних числах.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бородін О. І. Теорія чисел: підручник. Київ: Вища школа, 1970. 370 с.
2. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Вища школа, 1992. 496 с.
3. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to ALGORITHMS. 3rd ed. Cambridge: The MIT Press, 2009. 1292 p.
4. Wiles, Andrew. Modular elliptic curves and Fermat`s last theorem. *Annals of Mathematics: journal*. 1995. Vol. 141, No. 3. P. 443-551.
5. Lang S. Fundamentals of Diophantine Geometry. New York: Springer-Verlag. 1983. 370 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1810-2
6. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В. Алгоритми розкладу цілих чисел і гладкого наближення функцій. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки.* 2022. Випуск 23. С. 6-13. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2022-23.5-13
7. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В. Двоїстий алгоритм пошуку простих чисел на відрізках великих розмірностей. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки*. 2024. Випуск 25. С. 6-19. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.6-19

UDC 519.612

Algorithm for investigating the unsolvability of the equation $z^n = x^n + y^n, n \geq 3$ in integers

Vasyl Abramchuk, Ihor Abramchuk

Abstract. The necessary conditions under which an equation can have a solution in positive integers are determined. The parameters of the equation x,y,n are consistent with z and belong to bounded closed sets. The exponents and variables are divided into classes. It is proved that in the space of mixed variables connected by an equation, where one of the variables is real and the others are integers, the value of the real variable is irrational, which is a sufficient condition for the unsolvability of the equation in positive integers for all exponents of powers greater than three. A matrix (linear) model of powers of positive integers is constructed.

Keywords: necessary conditions, classes of parameters, irrational numbers, Fermat's sequence, matrix model of powers.

References

1. Borodin, O. I. (1970). *Theory of numbers:* A Textbook, Higher School, Kyiv. [in Ukrainian]
2. Lyashko, I. I., Emelyanov, V. F., Boyarchuk, O. K. (1992). *Mathematical analysis. Part 1:* A Textbook, Higher School, Kyiv. [in Ukrainian]
3. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*, 3rd ed., The MIT Press, Cambridge.
4. Wiles, A. (1995). *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Annals of Mathematics: journal, **141** (3), 443–551.
5. Lang, S. (1983). *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1810-2.
6. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V. (2022). *Algorithm for the decomposition of integers and smooth approximation of functions*, Mathematical and computer modelling, Series: Phys.-Math. sciences, **23**, 6–13. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2022-23.5-13
7. Abramchuk, V. S., Abramchuk, I. V. (2024). *Dual algorithm for finding prime numbers on segments of large dimensions*, Mathematical and computer modelling, Series: Phys.-Math. sciences, **25**, 6–19. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.6-19

Про авторів / About the authors

Василь Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Vasyl Abramchuk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Ігор Абрамчук, старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21000, Україна;

Ihor Abramchuk, senior lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, 95 Khmelnytske highway Str., Vinnytsia 21000, Ukraine.

Отримано / Received 26.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025