МІФ
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 2, № 1 (2025), с. 9–23.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 2, No. 1 (2025), pp. 9–23.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.5

Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору

Уляна Гудима[1], Василь Гнатюк[2]

[1] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, кафедра математики, м. Кам'янець-Подільський, Україна
ulag2107@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2291-6111

[2] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, кафедра математики, м. Кам'янець-Подільський, Україна
gnatuk@kpnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7782-3377

Анотація. В статті розглянуто задачу відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору. Встановлено умови екстремальності допустимого елемента для цієї задачі, основані на двоїстому поданні похідної за напрямком цільової функції еквівалентної задачі.

Ключові слова: полінормований простір, гаусдорфова відстань, узагальнений чебишовський центр, екстремальний елемент, умови екстремальності.

1. Вступ

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на X, $a_i \in X$, $i=\overline{1,m}$, $V \subset X$. У праці [1] для задачі відшукання величини

$$\beta_V^*(a_1,\dots,a_m) = \inf_{x\in V} \max_{1\le i\le m} \|a_i - x\|_i \tag{1}$$

за умови, що V є опуклою множиною, отримано співвідношення двоїстості та доведено критерій екстремальності її допустимого елемента, оснований на цьому співвідношенні.

Якщо в задачі відшукання величини (1) замість точок a_i, $i=\overline{1,m}$, розглядати замкнені кулі лінійних нормованих просторів $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, а в якості відстаней між

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-09

цими кулями та точками множини V використати гусдорфові відстані між ними, породжені відповідними нормами $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, то одержимо задачу відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль полінормованого простору $\left(X;\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини цього простору, яка розглядається в статті. Частковими випадками цієї задачі є, зокрема, задача відшукання величини (1), задача відшукання узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно множини цього простору, задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору (див., наприклад, [1, 2]).

Мета статті – встановлення умов екстремальності допустимого елемнта для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль полінормованого простору $\left(X;\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно опуклих та деяких інших множин простору X, основаних на двоїстому поданні похідної за напрямком цільової функції еквівалентної задачі.

2. Постановка задачі

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на X, і, отже, $\left(X;\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ є полінормованим простором; $B_{r_i}(a_i)=\left\{y\in X:\|y-a_i\|_i\le r_i\right\}$, $i=\overline{1,m}$, – замкнені кулі лінійних нормованих просторів $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$ з центрами в точках $a_i\in X$ та радіусами r_i; $V\subset X$; для $x\in X$ та $B_{r_i}(a_i)$ $H_i\left(\{x\},B_{r_i}(a_i)\right)$ – гаусдорфова відстань між множинами $\{x\}$ та $B_{r_i}(a_i)$ лінійного нормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$. Поставимо задачу відшукання величини

$$\gamma_V^*\left(B_{r_i}(a_i), i=\overline{1,m}\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}(a_i)\right). \tag{2}$$

Якщо існує елемент $x^*\in V$ такий, що

$$\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x^*\},B_{r_i}(a_i)\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}(a_i)\right)=\gamma_V^*\left(B_{r_i}(a_i), i=\overline{1,m}\right),$$

то його будемо називати узагальненим чебишовським центром замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору або просто екстремальним елементом для величини (2).

З урахуванням зазначеного задачу відшукання величини (2) будемо називати задачею відшукання узагальненого чебишовського центра замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору.

3. Допоміжні поняття та твердження

В подальшому будемо використовувати наступні поняття та твердження.

Означення 1 (див., наприклад, [3, с. 2]). *Нехай $\left(X,\|\cdot\|\right)$ є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором, $M\subset X$, $x^*\in X$. Вектор $y\in X$ називається внутрішнім напрямком для множини M з точки x^*, якщо існують окіл $O(y)$ точки* *у простору* $(X,\|\cdot\|)$ *та число* $\varepsilon>0$ *такі, що* $x^*+\alpha z\in M$ *для всіх* $\alpha\in(0,\varepsilon)$, $z\in O(y)$. *Множину всіх внутрішніх напрямків для множини* M *з точки* x^* *називають конусом внутрішніх напрямків для множини* M *з точки* x^* *та позначають через* $\Gamma(M,x^*)$.

Означення 2 (див., наприклад, [3, с. 3]). *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $M\subset X$, $x^*\in X$. *Вектор* $y\in X$ *називається граничним напрямком для множини* M *з точки* x^*, *якщо для будь-якого околу* $O(y)$ *точки* y *простору* $(X,\|\cdot\|)$ *та будь-якого числа* $\varepsilon>0$ *існують* $z\in O(y)$ *та* $\alpha\in(0,\varepsilon)$ *такі, що* $x^*+\alpha z\in M$. *Множину всіх граничних напрямків для множини* M *з точки* x^* *називають конусом граничних напрямків для множини* M *з точки* x^* *та позначають через* $\Gamma^*(M,x^*)$.

Означення 3 (див., наприклад, [4]). *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $M\subset X$, $x^*\in M$. *Кажуть, що множина* M *є* Γ^*-*множиною простору* $(X,\|\cdot\|)$ *відносно* x^*, *якщо для всіх* $x\in M$ $x-x^*\in\Gamma^*(M,x^*)$.

Означення 4 (див., наприклад, [5]). *Нехай* X *є лінійним над полем дійсних чисел простором,* $M\subset X$, $x^*\in M$. *Кажуть, що множина* M *є* Γ-*множиною простору* X *відносно* $x^*\in M$, *якщо для кожного* $x\in M$ *та будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує* $\alpha\in(0,\varepsilon)$ *таке, що* $x^*+\alpha(x-x^*)\in M$.

Твердження 1. *Нехай* $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором,* $x\in X$, $B_r(x_0)=\{y\in X:\|y-x_0\|\le r\}$ *– замкнена куля простору* $(X,\|\cdot\|)$ *з центром в точці* x_0 *радіуса* r, $S_r(x_0)=\{y\in X:\|y-x_0\|=r\}$ *– сфера з центром в точці* x_0 *радіуса* r. *Має місце рівність*

$$H(\{x\},B_r(x_0))=\max_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|=\|x-x_0\|+r, \tag{3}$$

причому

$$\arg\max_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|=\begin{cases} y^*, \text{де } y^* \text{будь}-\text{яка точка } S_r(x_0), \text{якщо } x=x_0,\\ y^*=x_0+\dfrac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0), \text{якщо } x\ne x_0,\end{cases} \tag{4}$$

а $H(\{x\},B_r(x_0))$ *– гаусдорфова відстань між* $\{x\}$ *та* $B_r(x_0)$.

Доведення. Маємо (див., наприклад, [6, с. 38]), що

$$H(\{x\},B_r(x_0))=\max\left\{\sup_{x\in\{x\}}\inf_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|,\ \sup_{y\in B_r(x_0)}\inf_{x\in\{x\}}\|x-y\|\right\}. \tag{5}$$

Оскільки множина $\{x\}$ є одноелементною, то згідно з (5)

$$H(\{x\},B_r(x_0))=\max\left\{\inf_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|,\ \sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\right\}=\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|. \tag{6}$$

Для всіх $y\in B_r(x_0)$ маємо, що

$$\|x-y\|=\|(x-x_0)+(x_0-y)\|\le\|x-x_0\|+\|x_0-y\|\le\|x-x_0\|+r.$$

Тому

$$\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\le\|x-x_0\|+r. \tag{7}$$

Якщо $x=x_0$ і $y^*\in S_r(x_0)$, то з урахуванням (7) одержимо, що

$$\|x-y^*\|=\|x_0-y^*\|=r=\|x-x_0\|+r\le\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\le\|x-x_0\|+r.$$

Звідси та з (6) випливає, що при $x=x_0$ співвідношення (3), (4) мають місце.

Нехай тепер $x\ne x_0$. Оскільки $\left\|x_0+\frac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0)-x_0\right\|=\frac{r}{\|x-x_0\|}\|x-x_0\|=r$, то $y^*=x_0+\frac{r}{\|x-x_0\|}(x_0-x)\in S_r(x_0)\subset B_r(x_0)$. Для цієї точки y^* маємо, що

$$\|x-y^*\|=\left\|x-x_0+\frac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0)\right\|=\|x-x_0\|\left(1+\frac{r}{\|x-x_0\|}\right)=\|x-x_0\|+r.$$

З урахуванням цього та (7) одержимо, що

$$\|x-y^*\|=\|x-x_0\|+r\le\sup_{y\in B_r(x_0)}\|x-y\|\le\|x-x_0\|+r.$$

Звідси та з (6) випливає, що при $x\ne x_0$ співвідношення (3), (4) також мають місце.

Твердження доведено.

Також легко переконатися у справедливості наступних тверджень.

Твердження 2. *Нехай $(X,\|\cdot\|)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $M\subset X$, $x^*\in M$. Для того щоб вектор y належав $\Gamma^*(M,x^*)$, необхідно і достатньо, щоб існували послідовності $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, де $x^k\in M$, $k=1,2,...$; $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $\alpha_k\in R$, $\alpha_k>0$, $k=1,2,...$, і $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$, такі, що $\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k-x^*}{\alpha_k}-y\right\|=0$, тобто, щоб $\frac{x^k-x^*}{\alpha_k}\to y$ при $k\to\infty$ у розумінні норми $\|\cdot\|$.*

Твердження 3. Нехай $(X,\|\cdot\|)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Кожна Γ- множина M простору X відносно $x^*\in M$ є Γ^*- множиною простору $(X,\|\cdot\|)$ відносно x^*. Якщо множина M є зірковою множиною лінійного над полем дійсних чисел простору X відносно точки $x^*\in M$, то M є Γ- множиною простору X відносно x^* і, отже, Γ^*- множиною лінійного нормованого простору $(X,\|\cdot\|)$ відносно x^*.*

Кожна опукла множина M лінійного над полем дійсних чисел простору X є зірковою множиною простору X відносно кожного свого елемента x^* і, отже, Γ- множиною простору X та Γ^*- множиною лінійного нормованого простору $(X,\|\cdot\|)$ відносно x^*.

Твердження 4. *Нехай $(X,\|\cdot\|)$ є лінійним нормованим простором, $X^*=(X,\|\cdot\|)^*$ – простір, спряжений з $(X,\|\cdot\|)$; $B_{X^*}=\{f\in X^*:\|f\|_{X^*}\le 1\}$, $x^*\in X$; $p(x)=\|x-a\|$, $x\in X$; $\partial p(x^*)$ – субдиференціал функції $p(x)$, $x\in X$, в точці x^* (див., наприклад, [7,с.74]).*

Тоді p *є опуклою ліпшицевою і, отже, неперервною на* $\left(X,\|\cdot\|\right)$ *функцією та має місце рівність*

$$\partial p\left(x^*\right)=B_{X^*}\left(x^*-a\right),$$

де $B_{X^*}\left(x^*-a\right)=\left\{f\in B_{X^*}:\left\|x^*-a\right\|=\max\limits_{f\in B_{X^*}} f\left(x^*-a\right)=f\left(x^*-a\right)\right\}$.

4. Задачі, еквівалентні задачі відшукання величини (2)

Теорема 1. *Має місце рівність*

$$\gamma_V^*\left(B_{r_i}\left(a_i\right),i=\overline{1,m}\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right). \tag{8}$$

Для того щоб елемент x^* *був екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо, щоб цей елемент був екстремальним елементом (оптимальним розв'язком) задачі відшукання величини*

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right). \tag{9}$$

Доведення. Відповідно до твердження 1 для $x\in X$ та $B_{r_i}\left(a_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, одержуємо, що

$$H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\left\|x-a_i\right\|_i+r_i. \tag{10}$$

Звідси випливає справедливість рівність (8). Припустимо, що x^* є екстремальним елементом для величини (2). Тоді $x^*\in V$ та внаслідок (8), (10)

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\max_{1\le i\le m}H_i\left(\left\{x^*\right\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=$$
$$=\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right).$$

Це й означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (9).

Нехай тепер x^* є екстремальним елементом для величини (9). Тоді $x^*\in V$ та внаслідок (8), (10)

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right)=\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=$$
$$=\max_{1\le i\le m}H_i\left(\left\{x^*\right\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}H_i\left(\{x\},B_{r_i}\left(a_i\right)\right)=\gamma_V^*\left(B_{r_i}\left(a_i\right),i=\overline{1,m}\right).$$

Це означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

В m-арному декартовому (прямому) добутку $X^m=\{\left(x_1,...,x_m\right):x_i\in X,i=\overline{1,m}\}$ лінійного над полем дійсних чисел простору X покладемо для $x=\left(x_1,...,x_m\right)$, $y=\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$, $\alpha\in R$: $x+y=\left(x_1+y_1,...,x_m+y_m\right)$, $\alpha x=\left(\alpha x_1,...,\alpha x_m\right)$.

Легко переконатися, що декартів добуток X^m з означеними вище операціями додавання його елементів і множення їх на дійсні числа є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Справедливе таке твердження.

Твердження 5 (див., наприклад, [1]). *Якщо для кожного* $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$ *покласти* $\left\|\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\left\|x_i\right\|_i$, *то* $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ *буде лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Для того щоб елемент* φ *належав простору*

$\left(X^m\right)^* = \left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)^*$, *спряженому з* $X^m = \left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб існували однозначно визначені функціонали* $f_i \in X_i^* = \left(X, \|\cdot\|_i\right)^*$, *де* $X_i^* = \left(X, \|\cdot\|_i\right)^*$ – *простір, спряжений з лінійними нормованим простором* $X_i = \left(X, \|\cdot\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$, *такі, що* $\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(x_i\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, *причому справедлива рівність*

$$\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*} = \sup_{\substack{\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m, \\ \left(x_1,...,x_m\right)\neq 0}} \frac{\left|\varphi\left(x_1,...,x_m\right)\right|}{\left\|\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}} = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{X_i^*}, \tag{11}$$

де $\|f_i\|_{X_i^*} = \sup\limits_{\substack{x\in X, \\ x\neq 0}} \dfrac{\left|f_i\left(x\right)\right|}{\|x\|_i}$, $i = \overline{1,m}$.

Позначимо через $\Phi\left(x_1,...,x_m\right) = \max\limits_{1\le i\le m}\left(\|x_i - a_i\|_i + r_i\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $D = \left\{\left(x,...,x\right) : x \in V\right\}$ та розглянемо задачу відшукання величини

$$\inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \Phi\left(x_1,...,x_m\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \max_{1\le i\le m}\left(\|x_i - a_i\|_i + r_i\right). \tag{12}$$

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$\inf_{x\in V} \max_{1\le i\le m}\left(\|x - a_i\|_i + r_i\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \Phi\left(x_1,...,x_m\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D} \max_{1\le i\le m}\left(\|x_i - a_i\|_i + r_i\right).$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо, щоб елемент* $\left(x^*,...,x^*\right)$ *був екстремальним елементом для величини (12).*

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

Зауважимо, що згідно з теоремами 1, 2 задачу відшукання величини (2) можна вважати еквівалентною задачам відшукання величин (9), (12).

5. Двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (12)

Нехай $\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) = \|x_i - a_i\|_i + r_i$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $i = \overline{1,m}$; $p_i\left(x\right) = \|x - a_i\|_i$, $x \in X$, $i = \overline{1,m}$; $B_{X_i^*}^* = \left\{f \in X_i^* : \|f\|_{X_i^*} \le 1\right\}$, $i = \overline{1,m}$; для $x^* \in X$

$$B_{X_i^*}\left(x^* - a_i\right) = \left\{f \in B_{X_i^*} : \|x^* - a_i\|_i = \max_{f\in B_{X_i^*}} f\left(x^* - a_i\right) = f\left(x^* - a_i\right)\right\},\ i = \overline{1,m}.$$

Твердження 6. *Функції* $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$, $i = \overline{1,m}$, *є опуклими на* X^m *та неперервними на лінійному нормованому просторі* $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$.

Справедливість цього твердження випливає з критерію опуклості власної функції (див., наприклад, [7,с.56]) та властивостей норми.

Твердження 7. *Нехай* $i \in \left\{1,...,m\right\}$, $\left(x_1^*,...,x_m^*\right) \in X^m$. *Справедлива рівність*

$$\partial\Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\}. \tag{13}$$

Доведення. Нехай для $i \in \{1,...,m\}$ $\varphi \in \partial\Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right)$. Тоді для всіх $\left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m$

$$\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) - \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left\|x_i - a_i\right\|_i + r_i - \left(\left\|x_i^* - a_i\right\|_i + r_i\right) =$$

$$= \left\|x_i - a_i\right\|_i - \left\|x_i^* - a_i\right\|_i \geq \varphi\left(\left(x_1,...,x_m\right) - \left(x_1^*,...,x_m^*\right)\right) = \varphi\left(x_1 - x_1^*,...,x_m - x_m^*\right). \qquad (14)$$

Згідно з твердженням 5 існують однозначно визначені функціонали f_j^φ із X_j^*, $j = \overline{1,m}$, такі, що

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = \sum_{j=1}^{m} f_j^\varphi\left(x_j\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m. \qquad (15)$$

З урахуванням (14) та (15) одержимо, що

$$\left\|x_i - a_i\right\|_i - \left\|x_i^* - a_i\right\|_i \geq f_i^\varphi\left(x_i - x_i^*\right) + \sum_{j \in I \setminus \{i\}}^{m} f_j^\varphi\left(x_j - x_j^*\right),\quad \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m, \qquad (16)$$

де $I = \{1,...,m\}$.

Переконаємося, що $f_j^\varphi = 0$, $j \in I \setminus \{i\}$. Припустимо, що $f_{j_0}^\varphi \neq 0$ для деякого $j_0 \in I \setminus \{i\}$. Тоді існує елемент $x_0 \in X$, для якого $f_{j_0}^\varphi\left(x_0\right) > 0$. З (16) при $x_i = x_i^*$, $x_{j_0} = x_{j_0}^* + x_0$, $x_j = x_j^*$, $j \in I \setminus \{i, j_0\}$, одержимо, що $0 \geq f_{j_0}^\varphi\left(x_0\right) > 0$. Одержана суперечність доводить, що $f_j^\varphi = 0$, $j \in I \setminus \{i\}$. Внаслідок цього та співвідношень (11), (15), (16) одержимо, що

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f_i^\varphi\left(x_i\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m\ ,\ \left\|\varphi\right\|_{\left(X^m\right)^*} = \left\|f^\varphi{}_i\right\|_{X_i^*}, \qquad (17)$$

$$p_i\left(x_i\right) - p_i\left(x_i^*\right) \geq f_i^\varphi\left(x_i - x_i^*\right) \text{ для всіх } x_i \in X. \qquad (18)$$

Зі співвідношень (17), (18) випливає, що

$$\varphi \in \left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\}.$$

Тому

$$\partial\Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) \subset \left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\}. \qquad (19)$$

Нехай тепер $i \in \{1,...,m\}$ та $f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)$. Згідно з твердженням 5 функціонал

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right) = 0\left(x_1\right) + ... + 0\left(x_{i-1}\right) + f\left(x_i\right) + 0\left(x_{i+1}\right) + ... + 0\left(x_m\right) = f(x_i),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m,$$

належить $\left(X^m\right)^*$. Для цього функціонала маємо, що

$$\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right) - \Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left\|x_i - a_i\right\|_i + r_i - \left(\left\|x_i^* - a_i\right\|_i + r_i\right) = \left\|x_i - a_i\right\|_i -$$

$$- \left\|x_i^* - a_i\right\|_i = p_i\left(x_i\right) - p_i\left(x_i^*\right) \geq f\left(x_i - x_i^*\right) = \varphi\left(x_1 - x_1^*,...,x_m - x_m^*\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \mathrm{O}\, X^m.$$

Звідси випливає, що $\varphi \in \partial\Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right)$. Тому

$$\left\{\varphi \in \left(X^m\right)^* : \varphi\left(x_1,...,x_m\right) = f\left(x_i\right), \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, f \in \partial p_i\left(x_i^*\right)\right\} \subset \partial\Phi_i\left(x_1^*,...,x_m^*\right). \qquad (20)$$

Зі співвідношень (19), (20) випливає справедливість рівності (13).

Твердження доведено.

Теорема 3. *Для будь-яких* $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$, $\left(y_1,...,y_m\right) \in X^m$ *має місце рівність*

$$\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in\partial p_i\left(x^*\right)} f\left(y_i\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right), \tag{21}$$

де $\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)$ *– похідна за напрямком* $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ *функції* $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, *в точці* $\left(x^*,...,x^*\right)$,

$$I\left(x^*\right)=I\left(x^*,...,x^*\right)=\left\{i\in\{1,..,m\}:\Phi\left(x^*,...,x^*\right)=\max_{1\le i\le m}\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)=\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)\right\}=$$

$$=\left\{i\in\{1,..,m\}:\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x_i^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x_i^*-a_i\right\|_i+r_i\right\}.$$

Доведення. Згідно з введеними вище позначеннями має місце рівність

$$\Phi\left(x_1,...,x_m\right)=\max_{1\le i\le m}\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right),\ \left(x_1,...,x_m\right)\in X^m . \tag{22}$$

Згідно з твердженням 6 функції $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, $\Phi_i\left(x_1,...,x_m\right)=\left\|x_i-a_i\right\|_i+r_i$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, $i=\overline{1,m}$, є опуклими та неперервними на лінійному нормованому просторі $X^m=\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$. Тому існують їх скінченні похідні в будь-якій точці $\left(x_1^*,...,x_m^*\right)\in X^m$ за будь-яким напрямком $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ (див., наприклад, [3,c.354]). З урахуванням цього, співвідношень (22) та теореми 1 [6] для $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$, $y=\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ одержимо, що

$$\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\Phi_i'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right). \tag{23}$$

Відомо (див., наприклад, теорему 6.4.8 [3, c.354]), що для $i=\overline{1,m}$

$$\Phi_i'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{\varphi\in\partial\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)}\varphi\left(y_1,...,y_m\right). \tag{24}$$

Згідно з твердженням 7 для $i\in\{1,...,m\}$

$$\max_{\varphi\in\partial\Phi_i\left(x^*,...,x^*\right)}\varphi\left(y_1,...,y_m\right)=\max_{f\in\partial p_i\left(x^*\right)} f\left(y_i\right), \tag{25}$$

де $p_i\left(x\right)=\left\|x-a_i\right\|_i$, $x\in X$.

Зі співвідношень (23)-(25) випливає, що для всіх $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$, $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$

$$\Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in\partial p_i\left(x^*\right)} f_i\left(y_i\right). \tag{26}$$

Згідно з твердженням 4 для $i\in\{1,...,m\}$ $\partial p_i\left(x^*\right)=B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)$.Внаслідок цього та (26) отримуємо, що для будь-якого $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$, $\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m$ має місце рівність (21).

Теорему доведено.

6. Двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (12)

Нехай $x^*\in V$ і, отже, $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$. Позначимо через $Q\left(x^*,...,x^*\right)$ таку лебегову множину цільової функції $\Phi\left(x_1,...,x_m\right)=\max\limits_{1\le i\le m}\left(\left\|x_i-a_i\right\|_i+r_i\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m$, задачі відшукання величини (12): $Q\left(x^*,...,x^*\right)=\left\{\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m:\Phi\left(x_1,...,x_m\right)<\Phi\left(x^*,...,x^*\right)\right\}$.

Будемо позначати через $\varGamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ – конус внутрішніх напрямків для множини $Q\left(x^*,...,x^*\right)$ з точки $\left(x^*,...,x^*\right)$ простору $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. означення 1).

Теорема 4. *Нехай* $x^* \in V$ *і, отже,* $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$. *Позначимо через*

$$I\left(x^*\right)=I\left(x^*,...,x^*\right)=\left\{i\in\{1,...,m\}:\varPhi\left(x^*,...,x^*\right)=\max_{1\le i\le m}\varPhi_i\left(x_1,...,x_m\right)=\right.$$
$$\left.=\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right\}.$$

Має місце рівність

$$\varGamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)=\left\{\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m:\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)}f\left(y_i\right)<0\right\}. \tag{27}$$

Доведення. Згідно з твердженням 6 функція $\varPhi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\mathrm{O}\,X^m$, є опуклою та неперервною на $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$. Відповідно до твердження 6.9.1 [3, с.383]

$$\varGamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)=\left\{\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m:\varphi\left(y_1,...,y_m\right)<0,\ \varphi\in\partial\varPhi\left(x^*,...,x^*\right)\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\varGamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)=\left\{\left(y_1,...,y_m\right)\in X^m:\max_{\varphi\in\partial\varPhi\left(x^*,...,x^*\right)}\varphi\left(y_1,...,y_m\right)<0\right\}. \tag{28}$$

Оскільки $\displaystyle\max_{\varphi\in\partial\varPhi\left(x^*,...,x^*\right)}\varphi\left(y_1,...,y_m\right)=\varPhi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right)=\max_{i\in I\left(x^*\right)}\max_{f\in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)}f\left(y_i\right)$ (див. теорему 6.4.8 [3, с.354] та теорему 3), то звідси і з (28) отримаємо рівність (27).

Теорему доведено.

7. Основні результати

Нехай $x^*\in V$. В подальшому будемо використовувати конус $\varGamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ граничних напрямків для множини D з точки $\left(x^*,...,x^*\right)$ простору $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. означення 2).

Теорема 5 (*необхідна умова екстремальності елемента* $x^*\in V$ *для задачі відшукання (2)*). *Нехай* $x^*\in V$ *і, отже,* $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$. *Для того щоб елемент* x^* *був екстремальним елементом (узагальненим чебишовським центром) для задачі відшукання величини (2), необхідно, щоб для кожного* $y=\left(y_1,...,y_m\right)\in\varGamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ *існували індекс* $i_y\in\{1,...,m\}$, *функціонал* $f^y\in B_{X_{i_y}^*}$, *такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x^*-a_{i_y}\right\|_{i_y}+r_{i_y}=\max_{f\in B_{X_{i_y}^*}}f\left(x^*-a_{i_y}\right)+r_{i_y}=f^y\left(x^*-a_{i_y}\right)+r_{i_y}, \tag{29}$$

$$f^y\left(y_{i_y}\right)\ge 0. \tag{30}$$

Доведення. Нехай, як і вище,

$$Q\left(x^*,...,x^*\right)=\left\{\left(x_1,...,x_m\right)\in X^m:\varPhi\left(x_1,...,x_m\right)<\varPhi\left(x^*,...,x^*\right)\right\}.$$

Припустимо, що $Q\left(x^*,...,x^*\right)\ne\varnothing$. Оскільки функція $\varPhi\left(x_1,...,x_m\right)$, $\left(x_1,...,x_m\right)\mathrm{O}\,X^m$, є опуклою та неперервною на лінійному нормованому просторі

$\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. твердження 6), то відповідно до теореми 1.3.4 [3, с.10] можна зробити висновок, що $\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) \neq \varnothing$. За умовою x^* є екстремальним елементом для величини (2). Тому $\left(x^*,...,x^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (12) (див. теорему 2). Згідно з теоремою 1.4.1 [3, с.13] тоді $\Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right) \cap \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right) = \varnothing$.

Звідси випливає, що для кожного $\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ має місце співвідношення $\left(y_1,...,y_m\right) \notin \Gamma\left(Q\left(x^*,...,x^*\right),\left(x^*,...,x^*\right)\right)$. З урахуванням цього та теореми 4 робимо висновок, що для кожного $\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ $\max\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \max\limits_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) \geq 0.$ Тому існує $i_y \in I\left(x^*\right)$ та функціонал $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ такі, для яких $\max\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \max\limits_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) = f^y\left(y_{i_y}\right) \geq 0$. Зі співвідношень $i_y \in I\left(x^*\right)$ та $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ випливає, що $i_y \in \{1,...,m\}$, $f^y \in B_{X_{i_y}^*}$ та має місце рівність (29). Співвідношення (29), (30) встановлено. Отже у випадку, коли $Q\left(x^*,...,x^*\right) \neq \varnothing$, теорему доведено.

Переконаємося у справедливості цієї теореми у випадку, коли $Q\left(x^*,...,x^*\right) = \varnothing$. В цьому випадку для кожного $\left(x_1,...,x_m\right) \in X^m$ $\Phi\left(x_1,...,x_m\right) \geq \Phi\left(x^*,...,x^*\right)$. Звідси випливає, що

$$\lim_{\substack{t \to 0,\\ t>0}} \frac{\Phi\left(\left(x^*,...,x^*\right)+t\left(y_1,...,y_m\right)\right)-\Phi\left(x^*,...,x^*\right)}{t} = \Phi'\left(\left(x^*,...,x^*\right),\left(y_1,...,y_m\right)\right) \geq 0. \quad (31)$$

З урахуванням нерівності (31) та теореми 3 робимо висновок, що для всіх $y=\left(y_1,...,y_m\right) \in X^m$, в тому числі і для $y=\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ має місце нерівність

$$\max_{i \in I\left(x^*\right)} \max_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) \geq 0. \quad (32)$$

Нехай $y=\left(y_1,...,y_m\right) \in \Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$, $i_y \in I\left(x^*\right)$ та $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ такі, що

$$\max_{i \in I\left(x^*\right)} \max_{f \in B_{X_i^*}\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right) = \max_{f \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)} f\left(y_{i_y}\right) = f^y\left(y_{i_y}\right). \quad (33)$$

Зі співвідношень $i_y \in I\left(x^*\right)$ та $f^y \in B_{X_{i_y}^*}\left(x^*-a_{i_y}\right)$ випливає, що $i_y \in \{1,...,m\}$, $f^y \in B_{X_{i_y}^*}$ та має місце рівність (29), а з (32) та (33) одержуємо нерівність (30).

Справедливість теореми встановлено і у випадку, коли $Q\left(x^*,...,x^*\right) = \varnothing$.

Теорему доведено.

Теорема 6 (*достатня умова екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукання величини (2)*). *Нехай в задачі відшукання величини (2) $x^* \in V$. Якщо для будь-якого $x \in V$ існують індекс $i_x \in \{1,...,m\}$, функціонал $f^x \in B_{X_{i_x}^*}$ такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x^*-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}=\max_{f\in B_{X^*_{i_x}}} f\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}=f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}, \tag{34}$$

$$f^x\left(x-x^*\right)\ge 0, \tag{35}$$

то x^* *є екстремальним елементом для величини (2).*

Доведення. Нехай $x\in V$, індекси $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, що мають місце співвідношення (34), (35). З урахуванням цих співвідношень одержимо, що

$$0\le f^x\left(x-x^*\right)=f^x\left(x-a_{i_x}\right)-f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)=\left(f^x\left(x-a_{i_x}\right)+r_{i_x}\right)-\left(f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}\right)=$$

$$=f^x\left(x-a_{i_x}\right)+r_{i_x}-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le\left\|f^x\right\|_{X^*_{i_x}}\left\|x-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le$$

$$\le\left\|x-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right)-\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right).$$

Звідси випливає, що $\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)\le\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x-a_i\right\|_i+r_i\right)$, $x\in V$. Отже, x^* є екстремальним елементом для величини (9). Згідно з теоремою 1 $x^*\in V$ є екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

Теорема 7 *(критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величин (2)). Нехай в задачі відшукання величини (2)* $x^*\in V$ *та* D *є* Γ^**-множиною відносно* $\left(x^*,...,x^*\right)$*, тобто* $\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)=\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ *для всіх* $\left(x,...,x\right)\in D$ *і, отже, для всіх* $x\in V$ *(див. означення 3). Для того щоб елемент* x^* *був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $x\in V$ *існували індекс* $i_x\in\{1,...,m\}$*, функціонал* $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ *такі, що*

$$\max_{1\le i\le m}\left(\left\|x^*-a_i\right\|_i+r_i\right)=\left\|x^*-a_{i_x}\right\|_{i_x}+r_{i_x}=\max_{f\in B_{X^*_{i_x}}} f\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}=f^x\left(x^*-a_{i_x}\right)+r_{i_x}, \tag{36}$$

$$f^x\left(x-x^*\right)\ge 0. \tag{37}$$

Доведення. Необхідність. Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (2) і D є Γ^*-множиною відносно $\left(x^*,...,x^*\right)$, тобто

$$\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)=\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right).$$

Згідно з теоремою 5 для $\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ існують індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються співвідношення (36), (37).

Необхідність доведено.

Справедливість достатності випливає з теореми 6.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай в задачі відшукання величини (2) норми* $\|\cdot\|_i$*,* $i=\overline{1,m}$*, задані на* X*, є попарно еквівалентними,* $x^*\in V$ *і* V *є* Γ^**-множиною відносно* x^* *в деякому лінійному нормованому просторі* $\left(X,\|\cdot\|_{i_0}\right)$*, де* $i_0\in\{1,...,m\}$*. Тоді* V *є* Γ^**-множиною відносно* x^* *в усіх лінійних нормованих просторах* $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$*,* $i=\overline{1,m}$*. Для того щоб елемент* x^* *був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і* *достатньо, щоб для будь-якого* $x \in V$ *існували індекс* $i_x \in \{1,...,m\}$, *функціонал* $f^x \in B_{X^*_{i_x}}$ *такі, для яких виконуються умови (36), (37) теореми 7.*

Доведення. Нехай V є Γ^*-множиною відносно x^* в деякому лінійному нормованому просторі $\left(X, \|\cdot\|_{i_0}\right)$. Тоді для всіх $x \in V$ $x - x^* \in \Gamma_{i_0}{}^*\left(V, x^*\right)$, де $\Gamma_{i_0}{}^*\left(V, x^*\right)$ – конус граничних напрямків для множини V лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_{i_0}\right)$. Згідно з твердженням 2 існують послідовності $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $x^k \in V$, $k = 1,2,...$; $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in R$, $\alpha_k > 0,\ k = 1,2,...,\ \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, такі, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_{i_0} = 0. \tag{38}$$

Нехай $i \in \{1,...,m\} \setminus \{i_0\}$. Оскільки норми $\|\cdot\|_i$ та $\|\cdot\|_{i_0}$ за умовою є еквівалентними, то існує число $c_{ii_0} > 0$, для якого $\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i \le c_{ii_0}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_{i_0}$.

З урахуванням (38) з цієї нерівності одержуємо, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i = 0,\ i \in \{1,...,m\} \setminus \{i_0\}. \tag{39}$$

Згідно з твердженням 2 тоді $x - x^*$ належить конусу $\Gamma_i^*\left(V, x^*\right)$ граничних напрямків для множини V лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_i\right)$ для всіх $x \in V$. Це означає, що V є Γ^*-множиною відносно x^* кожного лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_i\right), i = \overline{1,m}$.

Переконаємося далі, що множина D є Γ^*-множиною відносно $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$. Для цього доведемо, що $(x,...,x) - \left(x^*,...,x^*\right) = \left(x - x^*,...,x - x^*\right) \in \Gamma^*\left(D, \left(x^*,...,x^*\right)\right)$ для всіх $(x,...,x) \in D$ і, отже, для всіх $x \in V$. Вище встановлено, що за умов наслідку для кожного $x \in V$ існують послідовності $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $x^k \in V$, $k = 1,2,...$; $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in R$, $\alpha_k > 0,\ k = 1,2,...,\ \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, такі, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i = 0 \text{ для всіх } i \in \{1,...,m\} \tag{40}$$

(див (38), (39)). Зі співвідношення (40) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k_0 \in N$, що для всіх $k > k_0$ $\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i < \varepsilon$, $i = \overline{1,m}$. Звідси випливає, що для всіх $k > k_0$

$$\left\|\frac{\left(x^k,...,x^k\right) - \left(x^*,...,x^*\right)}{\alpha_k} - \left((x,...,x) - \left(x^*,...,x^*\right)\right)\right\|_{X^m} = \max_{1\le i\le m}\left\|\frac{x^k - x^*}{\alpha_k} - \left(x - x^*\right)\right\|_i < \varepsilon.$$

Тому $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\frac{\left(x^k,...,x^k\right)-\left(x^*,...,x^*\right)}{\alpha_k}-\left(\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)\right)\right\|_{X^m}=0$. Згідно з твердженням 2 $\left(x,...,x\right)-\left(x^*,...,x^*\right)=\left(x-x^*,...,x-x^*\right)\in\Gamma^*\left(D,\left(x^*,...,x^*\right)\right)$ для всіх $\left(x,...,x\right)\in D$. Це означає, що D є Γ^*-множиною простору $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ відносно $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$. Згідно з теоремою 7 для екстремальності елемента $x^*\in V$ для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються умови (36), (37).

Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Нехай в задачі відшукання величини (2) $x^*\in V$ і V є Γ-множиною лінійного над полем дійсних чисел простору X відносно x^* (зірковою відносно x^*, опуклою множиною). Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються умови (36), (37) теореми 7.*

Справедливість наслідку 2 випливає з твердження 3 та теореми 7.

Наслідок 3. *Нехай в задачі відшукання величини (2) V є підпростором простору X. Для того щоб елемент $x^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували індекс $i_x\in\{1,...,m\}$, функціонал $f^x\in B_{X^*_{i_x}}$ такі, для яких виконуються умови (36), (37) теореми 7.*

Справедливість наслідку 3 випливає з наслідку 2, оскільки підпростір V є опуклою множиною.

Висновки. В статті для задачі (2) відшукання узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента цієї задачі, основані на двоїстому поданні похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (12), еквівалентної до (2), доведено низку допоміжних тверджень, окремі з яких представляють самостійний інтерес.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого полінормованого простору відносно множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. Вип.25. С. 52–69. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.52-69
2. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб.

наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 17. С. 33–48. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2018-17.33-48
3. Laurent P.-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Paris: Herman, 1972. 531 p.
4. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень. Укр. мат. журн., 2005. Т. 57. № 12. С. 1601–1618.
5. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2005. №6. С.19–23.
6. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності заданої неточно з допомогою багатозначного відображення. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип.12. С.37–55. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2015-12.37-55
7. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Опуклий аналіз : навчальний посібник. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112 с.

UDC 517.5

Extremality conditions for an admissible element in the problem of finding a generalized Chebyshev center of several closed balls in a polynormed space with respect to a subset of this space

Uliana Hudyma, Vasyl Gnatyuk

Abstract. The paper considers the problem of finding a generalized Chebyshev center of several closed balls in a certain polynormed space with respect to a subset of this space. Extremality conditions for an admissible element of this problem are established, based on the dual representation of the directional derivative of the objective function of an equivalent problem.

Keywords: polynormed space, Hausdorff distance, generalized Chebyshev center, extremal element, extremality conditions.

References

1. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2024). *The existence conditions of the extremality of the admissible element for the problem of finding the generalized Chebyshov's center of several points of some polynormated space relative to the set of this space*, Mathematical and computer modelling, Series: Physical and mathematical sciences, **25**, 52–69. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.52-69
2. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2018). *The criterias at the sense of the weighted distances of the generalized center of chebyshev of several points of a linear normed space relatively to the convex set of this space*, Mathematical and computer modelling, Series: Physical and mathematical sciences, **17**, 33–48. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2018-17.33-48
3. Laurent, P.-J. (1972). Approximation and Optimization. Scientific and Medical University of Grenoble, Hermann, Paris.
4. Hudyma, U. (2005). *Best uniform approximation of a continuous compact-valued mapping by sets of continuous single-valued mappings*, Ukrainian Mathematical Journal, **57** (12), 1601–1618. [in Ukrainian]
5. Gnatyuk, U., Hudyma, U. (2025). *Criteria for an extremal element and its uniqueness in the problem of best uniform approximation of a continuous set-valued mapping by sets of single-valued mappings*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 6, 19–23. [in Ukrainian]
6. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2015). *The problem of the best in the sense of weighted distance approximation from a point to a set of uniform reconstruction of a functional dependence given inaccurately via a multivalued mapping*, Mathematical and computer modelling, Series: Physical and mathematical sciences, **12**, 37–55. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2015-12.37-55
7. Hudyma, U., Gnatyuk, V. (2019). *Convex Analysis*: tutorial, Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University, Kamianets-Podilsky. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Уляна Гудима, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300, Україна;

Uliana Hudyma, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, 61 Ohiienko Str., Kamianets-Podilskyi, 32300, Ukraine;

Василь Гнатюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математики, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, *вул.* Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300, Україна;

Vasyl Gnatyuk, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, 61 Ohiienko Str., Kamianets-Podilskyi, 32300, Ukraine.

Отримано / Received 29.04.2025
Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025
Опубліковано / Published 21.05.2025