

УДК 517.925.4

Дослідження розв'язків зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу

Мар'яна Ковтонюк¹, Олена Соя²

¹ Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukmm@vspu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7444-1234>

² Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-0937-299X>

Анотація. Побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній у резонансному і нерезонансному випадках, досліджено його асимптотичний характер через використання методу «укорочення» зчисленної системи диференціальних рівнянь.

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь, малий параметр, формальний розв'язок, асимптотичний характер розв'язку, метод укорочення.

1. Вступ

Систематичне вивчення диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами починається в 50-70-х роках XX століття у працях багатьох українських та зарубіжних учених, зокрема С. Фещенка, М. Шкіля [9] та їхніх учнів. Асимптотику за параметром при розв'язуванні диференціальних рівнянь використовували І. Конет, Т. Мейлієв [7], С. Кондакова [6], Л. Ніколенко, М. Рашевський [8], М. Сотніченко, В. Яковець та М. Стрельников [10], інші учені-математики.

Зчисленні системи диференціальних рівнянь досліджували К. Валєєв [1], О. Жаутиков [2], М. Ковтонюк [3-5], К. Персидський, інші учені-математики.

2. Постановка проблеми

Мета статті: визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній має розв'язок; побудувати формальний розв'язок та довести його асимптотичний характер.

Розглянемо в нескінченному просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей однорідну систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\varepsilon^q \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A(\tau, \varepsilon)x = 0, \quad (1)$$

де $x(\tau, \varepsilon)$ – шуканий нескінченний вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ – дійсна нескінченна матриця, елементами якої є дійсні функції дійсної змінної, $\tau \in [0, L]$, ε – малий дійсний параметр ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$), p і q – взаємно прості натуральні числа, причому $q \neq 1$.

Будемо шукати розв'язок системи (1) у просторі m , який задовольняє початковим умовам $x(\tau, \varepsilon)|_{\tau=0} = x_0$, $x_0 \in m$. (2)

Відносно коефіцієнтів рівняння (1) припустимо, що:

$$1) \text{ матрицю } A(\tau, \varepsilon) \text{ можна подати у вигляді ряду } A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad (3)$$

$$2) A_0(\tau) = \text{diag}\{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots\}, \lambda_j(\tau) \neq \lambda_k(\tau), j \neq k, j, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

3) матриці $A_s = \|a_{s,j,k}(\tau)\|_{j,k=1}^{\infty}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ нескінченне число разів диференційовні на $[0, L]$;

4) ряди $\frac{d^s a_j(\tau, \varepsilon)}{d\tau^s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d^s |a_{jl}(\tau, \varepsilon)|}{d\tau^s}$ збігаються рівномірно $\forall \tau \in [0, L]$, $s = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$.

$$5) \left| \frac{d^s a_j(\tau, \varepsilon)}{d\tau^s} \right| \leq \gamma_s, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots; \quad 6) |\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)| \geq d > 0, \quad \forall j = 2, 3, \dots$$

За допомогою підстановки $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{2q}}$ або $\varepsilon = \mu^{2q}$ систему диференціальних рівнянь (1) зводимо до вигляду

$$\mu^{2p} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A(\tau, \mu^{2q})x = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } A(\tau, \mu^{2q}) = A_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{2qs} A_s(\tau). \quad (6)$$

$$\text{Якщо ввести заміну } y_{2k-1} = x_k, \quad y_{2k} = \frac{dx_k}{d\tau}, \quad k \in N, \quad (7)$$

то зчисленну систему диференціальних рівнянь (5) другого порядку можна звести до зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mu^{2p} \frac{dy}{d\tau} = B(\tau, \mu^{2q})y, \quad (8)$$

де $y = \text{colon}\{y_1, y_2, \dots\}$, $B(\tau, \mu)$ – зчисленна матриця.

Тоді така система рівнянь задовольняє умовам теореми існування і єдиності [1]. Отже, через задану точку $(\tau_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$ області H проходить єдиний розв'язок $v(\tau, \mu) = \{v_1(\tau, \mu), v_2(\tau, \mu), \dots\}$ даної системи, причому цей розв'язок є обмежений, одностайно неперервний відносно τ і μ , а також відносно своїх початкових значень.

Далі, для нашої зчисленної системи диференціальних рівнянь розглянемо так звану «укорочену» систему

$$\begin{cases} \mu^{2p} \frac{dy_1}{d\tau} = b_{11}(\tau, \mu^{2q})y_1 + b_{12}(\tau, \mu^{2q})y_2 + \dots + b_{1,2n}(\tau, \mu^{2q})y_{2n}, \\ \mu^{2p} \frac{dy_2}{d\tau} = b_{21}(\tau, \mu^{2q})y_1 + b_{22}(\tau, \mu^{2q})y_2 + \dots + b_{2,2n}(\tau, \mu^{2q})y_{2n}, \\ \dots \\ \mu^{2p} \frac{dy_{2n}}{d\tau} = b_{2n,1}(\tau, \mu^{2q})y_1 + b_{2n,2}(\tau, \mu^{2q})y_2 + \dots + b_{2n,2n}(\tau, \mu^{2q})y_{2n}, \end{cases} \quad (9)$$

яка отримується з (8), якщо прирівняти до нуля всі шукані функції, починаючи з $(2n+1)$ -ої, і відкинути всі рівняння, починаючи з $(2n+1)$ -го.

Нехай $y(\tau, \mu) = \{y_{1,2n}(\tau, \mu), y_{2,2n}(\tau, \mu), \dots, y_{2n,2n}(\tau, \mu)\}$ – розв'язок «укороченої» системи диференціальних рівнянь (9), який задовольняє початкову умову: при $\tau = \tau_0$ маємо точку $(y_1^{(0)}, \dots, y_{2n}^{(0)})$. Тоді згідно відомих теорем О. Жаутикова [2] розв'язок «укороченої» системи рівнянь задовольняє умову $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{s,2n}(\tau, \mu) = y_s(\tau, \mu)$, $s = 1, 2, \dots, 2n$, або $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 \text{ і } \forall \tau \in [0; L]$ виконується нерівність

$$|y_{s,2n}(\tau, \mu) - y_s(\tau, \mu)| < \varepsilon, \quad s = 1, 2, \dots, 2n,$$

причому граничний перехід є рівномірним по τ . А до «укороченої» системи, яка є системою $2n$ рівнянь з $2n$ невідомими, можна застосувати теорію, розроблену у працях М. Шкіля, Т. Мейлієва [7], тобто знайти формальний розв'язок та встановити його асимптотичний характер.

3. Основні результати

Формальним розв'язком системи (1) будемо називати розв'язок, який відповідає певному власному значенню матриці $A_0(\tau)$, наприклад, $\lambda_1(\tau)$. Частинний розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$x(\tau, \mu) = u(\tau, \mu) \exp \left(i \mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau \right), \quad (10)$$

де $i = \sqrt{-1}$, а нескінченний вектор $u(\tau, \mu)$ подається формальним степеневим рядом

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau). \quad (11)$$

Формально підставимо вираз (10)-(11) в (1). При цьому нам потрібні будуть похідні:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\tau} &= u'(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) + i\mu^{-p} \sqrt{\lambda_1(\tau)} u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right), \\
 \frac{d^2x}{d\tau^2} &= u''(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) + 2i\mu^{-p} u'(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) + \\
 &+ i\mu^{-p} \frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) - \mu^{-2p} \lambda_1(\tau) u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) \\
 u'(\tau, \mu) &= \sum \mu^s u_s'(\tau), \quad u''(\tau, \mu) = \sum \mu^s u_s''(\tau).
 \end{aligned}$$

Тоді отримаємо тотожність

$$\begin{aligned}
 &\mu^{2p} u''(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) + 2i\mu^p u'(\tau, \mu) \sqrt{\lambda_1(\tau)} \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) + \\
 &+ i\mu^{-p} \frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) - \lambda_1(\tau) u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) + \\
 &+ A(\tau, \mu^{2q}) u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right) = 0,
 \end{aligned}$$

або, після скорочення на множник $\exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right)$, матимемо

$$\begin{aligned}
 &\mu^{2p} u''(\tau, \mu) + 2i\mu^p \sqrt{\lambda_1(\tau)} u'(\tau, \mu) + i\mu^p \frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u(\tau, \mu) - \lambda_1(\tau) u(\tau, \mu) + \\
 &+ A(\tau, \mu^{2q}) u(\tau, \mu) = 0
 \end{aligned}$$

В останній рівності відділимо коефіцієнти при однакових степенях параметра μ (враховуючи дистрибутивний закон для нескінчених матриць):

$$\mu^0 : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau) E_\infty) u_0(\tau) = 0, \quad (12)$$

$$\mu^s : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau) E_\infty) u_s(\tau) = F_s(\tau), \quad (13)$$

$$\text{де } F_s(\tau) = -\sum_{r=1}^{\left[\frac{s}{2q}\right]} A_r(\tau) u_{s-2qr}(\tau) - \frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u_{s-p}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} u_{s-p}'(\tau) - u_{s-2p}''(\tau), \quad (14)$$

причому $F_s(\tau) = 0, 1 \leq s \leq k, k = \min(p, 2q)$.

Можливі два випадки:

$$\text{А. } p < 2q, \text{ то } F_s(\tau) = 0, 1 \leq s \leq p-1, \quad F_p(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u_0(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} u_0'(\tau).$$

$$\text{В. } p > 2q, \text{ то } F_s(\tau) = 0, 1 \leq s \leq 2q-1, \quad F_{2q}(\tau) = -A_1(\tau) u_0(\tau).$$

Випадок А. Якщо $0 \leq s \leq p-1$, то рівняння (12)-(13) розпадаються на скалярні рівняння:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)) u_{sj}(\tau) = 0,$$

звідки $u_{sj}(\tau) \equiv 0$, $j = 2, 3, \dots$, а перші компоненти поки-що невизначені.

Рівняння (13) ми використаємо для визначення невідомих векторів $u_s(\tau)$, $p \leq s \leq 2q - 1$ і перших компонент векторів $u_s(\tau)$, $0 \leq s \leq p - 1$.

Нехай $s = p$, тоді, переходячи в (13) до координатної форми запису, отримаємо

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)) \cdot u_{pj}(\tau) = \frac{-i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u_{0j}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} u_{0j}'(\tau),$$

звідки випливає, що

$$u_{pj}(\tau) = \frac{F_{pj}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)} = 0.$$

Оскільки для $j = 2, 3, \dots$: $u_{0j}(\tau) \equiv 0$, $u_{0j}'(\tau) \equiv 0$, а $F_{pj}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} \cdot 0 - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} \cdot 0 = 0$.

Таким чином, перша координата $u_{p1}(\tau)$ вектора $u_p(\tau)$ невизначена. Якщо $j = 1$, то

$$0 \cdot u_{p1}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u_{01}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} u_{01}'(\tau).$$

Це лінійне однорідне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Його можна проінтегрувати в квадратурах:

$$\begin{aligned} \frac{du_{01}(\tau)}{u_{01}(\tau)} &= -\frac{\lambda_1'(\tau)d\tau}{4\lambda_1(\tau)}; \quad \int \frac{du_{01}(\tau)}{u_{01}(\tau)} = -\frac{1}{4} \int \frac{d\lambda_1(\tau)}{\lambda_1(\tau)}; \\ \ln \frac{u_{01}(\tau)}{c} &= -\frac{1}{4} \ln \lambda_1(\tau); \quad u_{01}(\tau) = C(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Покладемо сталу $C = 1$, остаточно отримаємо

$$u_{01}(\tau) = (\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}. \quad (15)$$

Отже, вектор $u_0(\tau)$ має вигляд

$$u_0(\tau) = colon \left((\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}, 0, 0, \dots \right). \quad (16)$$

Цей вектор належить простору m . Аналогічно визначаються і вектори $u_s(\tau)$, $p \leq s \leq 2p - 1$, тобто їх можна подати у вигляді

$$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), 0, 0, \dots), \quad (17)$$

а перші координати векторів $u_s(\tau)$, $0 \leq s \leq p - 1$ мають вигляд (15).

Покладемо в рівняннях (13) $s = 2p$:

$$A_0(\tau)u_{2p}(\tau) - \lambda_1(\tau)u_{2p}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u_p(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} u_p'(\tau) - u_0''(\tau).$$

Якщо $j = 2, 3, \dots$, то $(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{2p,j}(\tau) = 0$, тобто $u_{2p,j}(\tau) = 0$. Нехай $j = 1$, тоді попереднє рівняння набуде вигляду

$$-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}} u_{p1}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)} u_{p1}'(\tau) - u_{01}''(\tau) = 0. \quad (18)$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, яке можна проінтегрувати в квадратурах і отримаємо

$$u_{p1}(\tau) = i(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} \int_0^\tau \frac{u_{01}''(\tau)}{2(\lambda_1(\tau))^{\frac{1}{4}}} d\tau. \quad (19)$$

Таким чином, і вектори $u_s(\tau)$, $2p \leq s \leq 2q-1$ мають вигляд (17), а перші компоненти векторів $u_s(\tau)$, $p \leq s \leq 2q-p-1$ можна подати у вигляді (19).

Залишаються невизначеними координати $u_{s1}(\tau)$ векторів $u_s(\tau)$, $2q-p \leq s \leq 2q-1$. З (17) випливає, що вектори $u_s(\tau)$, $0 \leq s \leq 2q-1$ належать простору m і є достатньо нескінченно диференційовними по $\tau \in [0; L]$.

Нехай в співвідношеннях (13) - (14), тоді вони записуються у вигляді

$$A_0(\tau)u_{2q}(\tau) - \lambda_1(\tau)u_{2q}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{2q-p}'(\tau) - u_{2q-2p}''(\tau) - A_1(\tau)u_0(\tau).$$

Відмітимо, що добуток $A_1(\tau)u_0(\tau)$ існує, оскільки вектор $u_0(\tau)$ має відмінну від нуля тільки першу компоненту. Доданок $A_1(\tau)u_0(\tau)$ при знаходженні елементів вектора $u_{2q}(\tau)$ нічого істотно не змінює, оскільки при знаходженні першої координати векторів отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, яке інтегрується у квадратурах.

Отже, при $j=1$:

$$-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p,1}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{2q-p,1}'(\tau) - u_{2q-2p,1}''(\tau) - a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau) = 0,$$

або

$$u_{2q-p,1}'(\tau) + \frac{\lambda_1'(\tau)}{4\lambda_1(\tau)}u_{2q-p,1}(\tau) = -\frac{u_{2q-2p,1}''(\tau) + a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}}. \quad (20)$$

Аналогічно до (18) координату $u_{2q-p,1}(\tau)$ будемо шукати у вигляді

$$u_{2q-p,1}(\tau) = (\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} C(\tau). \quad (21)$$

Підставляючи (21) в (20), отримаємо

$$u_{2q-p,1}'(\tau) = -\frac{1}{4}(\lambda_1(\tau))^{-\frac{5}{4}}\lambda_1'(\tau)C(\tau) + (\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C'(\tau),$$

$$-\frac{1}{4}(\lambda_1(\tau))^{-\frac{5}{4}}\lambda_1(\tau)C(\tau) + (\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C'(\tau) + \frac{\lambda_1'(\tau)}{4\lambda_1(\tau)}(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C(\tau) = -\frac{u_{2q-2p,1}''(\tau) + a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}},$$

або

$$(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}C'(\tau) = -\frac{u_{2q-2p,1}''(\tau) + a_{1,11}(\tau)u_{01}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}}, \quad C'(\tau) = -\frac{u_{2q-2p,1}''(\tau)(\lambda_1(\tau))^{\frac{1}{4}} + a_{1,11}(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}}.$$

Враховуючи початкові умови, знаходимо

$$C(\tau) = -\int_0^\tau \frac{u_{2q-2p,1}''(s)(\lambda_1(s))^{\frac{1}{4}} + a_{1,11}(s)}{2i\sqrt{\lambda_1(s)}} ds. \quad (22)$$

Інші координати вектора $u_{2q}(\tau)$ визначаються співвідношеннями

$$u_{2q,j}(\tau) = -\frac{a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)} = -\frac{a_{1,j1}(\tau)(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (23)$$

Аналогічно вектори $u_s(\tau)$, $2q \leq s < 4q$ мають вигляд (23), а перші координати векторів $u_s(\tau)$, $2q - p \leq s \leq 4q - p - 1$ знаходимо у вигляді

$$u_{s1}(\tau) = -(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} \int_0^\tau \frac{u_{s-2p,1}''(t) + a_{1,11}(t)u_{s-2q,1}(t)}{2i(\lambda_1(t))^{\frac{1}{4}}} dt. \quad (24)$$

Таким чином, нами визначені вектори:

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), 0, 0, \dots)$, $0 \leq s \leq p - 1$, $u_{s1}(\tau)$ визначаються з умови (15);

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), 0, 0, \dots)$, $p \leq s \leq 2q - p - 1$, $u_{s1}(\tau)$ мають вигляд (19);

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), 0, 0, \dots)$, $2q - p \leq s \leq 2q - 1$, $u_{s1}(\tau)$ мають вигляд (24);

$u_s(\tau) = colon\left(u_{s1}(\tau), -\frac{a_{1,21}(\tau)u_{01}(\tau)}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)}, -\frac{a_{1,31}(\tau)u_{01}(\tau)}{\lambda_3(\tau) - \lambda_1(\tau)}, \dots\right)$, $2q \leq s \leq 4q$, $u_{s1}(\tau)$ мають вигляд (24).

Враховуючи умови 3)–6), можна переконатись, що побудовані вектори $u_s(\tau)$, $2q \leq s \leq 4q$ є елементами простору m , крім того, вони мають неперервні похідні по $\tau \in [0; L]$ достатньо великих порядків.

Таким чином, побудований формальний розв'язок рівняння (5), а, отже, і рівняння (1), який відповідає кореню $\lambda_1(\tau)$ спектру головної частини матриці $A(\tau, \varepsilon)$.

Аналогічно можна побудувати формальні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь (1), які відповідають іншим кореням $\lambda_2(\tau)$, $\lambda_3(\tau)$,... спектру матриці $A_0(\tau)$.

Отримані результати сформулюємо у вигляді теореми:

ТЕОРЕМА 1. Якщо виконуються умови 1)–6), то у випадку $p < q$ існує формальний частинний розв'язок системи (5), який можна подати у вигляді

$$x(\tau, \mu) = u(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(\tau)} d\tau\right), \quad \text{де } u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau).$$

Випадок Б. Назвемо цей випадок резонансним. Припустимо, що при деяких значеннях k виконуються умови:

$$\lambda_k(\tau) - \lambda_1(\tau) = 0, \quad (25)$$

а для всіх інших власних значень $\lambda_j(\tau)$ ця умова не має місця, тобто

$$\lambda_j(\tau) \neq \lambda_1(\tau), \quad j = 1, 2, \dots; j \neq k.$$

Для зручності запису покладемо $k = 2$. Тоді з умов (12)–(13) отримаємо таку систему рівнянь (в координатній формі):

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{sj}(\tau) = 0, \quad 0 \leq s \leq p - 1,$$

звідки видно, що, $u_{sj}(\tau) \equiv 0$, $j = 3, 4, \dots$, а компоненти $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ залишаються поки що невизначеними функціями.

Нехай $s = p$. Тоді з рівнянь (13) випливає, що

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{pj}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{0j}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}\frac{du_{0j}(\tau)}{d\tau}. \quad (26)$$

Оскільки $u_{0j}(\tau) \equiv 0, j = 3, 4, \dots$, то $u_{pj}(\tau) = 0$, а координати $u_{p1}(\tau)$ і $u_{p2}(\tau)$ залишаються поки що невизначеними.

Якщо $j = 1, 2$, то (26) запишемо у вигляді

$$-\frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{0j}(\tau) - 2\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{0j}'(\tau) = 0.$$

Це лінійне однорідне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке інтегрується у квадратурах:

$$\frac{du_{0j}(\tau)}{u_{0j}(\tau)} = -\frac{\lambda_1'(\tau)}{4\lambda_1(\tau)}, j = 1, 2, \quad u_{0j}(\tau) = (\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} C_j, C_j = u_{0j}(0),$$

$j = 1, 2$ – деякі сталі, покладемо їх рівними, наприклад, 1.

Отже, вектор $u_0(\tau)$ визначений і має вигляд

$$u_0(\tau) = colon\left((\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}, (\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}, 0, 0, \dots\right). \quad (27)$$

Координати $u_{p1}(\tau)$ і $u_{p2}(\tau)$ визначаються з рівнянь (13) при $s = 2p$.

Аналогічно визначаються і вектори $u_s(\tau)$, $p \leq s \leq 2p-1$, тобто їх можна подати у вигляді

$$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), u_{s2}(\tau), 0, 0, \dots). \quad (28)$$

Перші координати цих векторів мають вигляд (27). Покладемо у рівнянні (13) $s = 2p$. Отримаємо

$$A_0(\tau)u_{2p}(\tau) - \lambda_1(\tau)u_{2p}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_p(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_p'(\tau) - u_0''(\tau),$$

або в координатній формі

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{2p,j}(\tau) = -\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{pj}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{pj}'(\tau) - u_{0j}''(\tau),$$

звідки випливає, що $u_{2p,j}(\tau) \equiv 0, j = 3, 4, \dots$, а функції $u_{2p,1}(\tau)$ і $u_{2p,2}(\tau)$ залишаються поки що невизначеними.

Нехай $j = 1$. Тоді попереднє рівняння набуде вигляду

$$-\frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{p1}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{p1}'(\tau) - u_{01}''(\tau) = 0,$$

або

$$2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{p1}'(\tau) + i\frac{\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{p1}(\tau) = -u_{01}''(\tau).$$

Маємо лінійне неоднорідне рівняння відносно $u_{p1}(\tau)$, інтегруючи яке у квадратурах, і враховуючи початкові умови, знаходимо

$$u_{p1}(\tau) = -(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} \int_0^\tau \frac{u_{01}''(t)}{2i(\lambda_1(t))^{\frac{1}{4}}} dt. \quad (29)$$

Аналогічно можна знайти

$$u_{p2}(\tau) = -(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} \int_0^\tau \frac{u_{02}''(t)}{2i(\lambda_1(t))^{\frac{1}{4}}} dt. \quad (30)$$

Таким чином, і вектори $u_s(\tau)$, $2p \leq s \leq 2q-1$ мають вигляд (28), а перші координати векторів $u_s(\tau)$, $p \leq s \leq 2q-p-1$ можна подати у вигляді (29)-(30).

Залишаються невизначеними компоненти $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ векторів $u_s(\tau)$, $2q - p \leq s \leq 2q - 1$.

З побудови даних векторів випливає, що вони належать простору m і є достатню кількість разів диференційовними по τ .

Покладемо тепер $s = 2q$, тоді співвідношення (14) можна записати у вигляді

$$A_0(\tau)u_{2q}(\tau) - \lambda_1(\tau)u_{2q}(\tau) = -A_1(\tau)u_0(\tau) - \frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{2q-p}'(\tau) - u_{2q-2p}''(\tau),$$

або в координатній формі

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{2q,j}(\tau) = -a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau) - a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau) - \frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p,j}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{2q-p,j}'(\tau) - u_{2q-2p,j}''(\tau).$$

Звідки легко бачити, що при $j = 3, 4, \dots$

$$u_{2q,j}(\tau) = -\frac{a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau) + a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)}. \quad (31)$$

Враховуючи (15), маємо

$$u_{2q,j}(\tau) = -\frac{a_{1,j1}(\tau)(\lambda_1(\tau))^{\frac{1}{4}} + a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)}. \quad (32)$$

При $j = 1, 2$ отримаємо рівняння

$$\frac{du_{2q-p,j}}{d\tau} + \frac{1}{4} \frac{\lambda_1'(\tau)}{\lambda_1(\tau)} u_{2q-p,j}(\tau) = -\frac{a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau) + a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau) + u_{2q-2p,j}''(\tau)}{2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}},$$

яке можна записати у вигляді

$$-a_{1,j1}(\tau)u_{01}(\tau) - a_{1,j2}(\tau)u_{02}(\tau) - \frac{i\lambda_1'(\tau)}{2\sqrt{\lambda_1(\tau)}}u_{2q-p,j}(\tau) - 2i\sqrt{\lambda_1(\tau)}u_{2q-p,j}'(\tau) - u_{2q-2p,j}''(\tau) = 0$$

Це лінійне неоднорідне відносно $u_{2q-p,j}(\tau)$, інтегруючи яке в квадратурах і використовуючи початкові умови, знаходимо

$$u_{2q-p,j}(\tau) = -(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}} \int_0^\tau \frac{a_{1,j1}(s)u_{01}(s) + a_{1,j2}(s)u_{02}(s) + u_{2q-2p,j}''(s)}{2i(\lambda_1(s))^{\frac{1}{4}}} ds \quad j = 1, 2. \quad (33)$$

Аналогічно вектори $u_s(\tau)$, $2q \leq s \leq 4q$ мають вигляд (28), а перші дві компоненти векторів $u_s(\tau)$, $2q - p \leq s \leq 4q - p - 1$ виражаються співвідношеннями

$$u_{s1}(\tau) = -\frac{1}{(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}} \int_0^\tau \frac{a_{1,11}(s)u_{s-2q,1}(s) + a_{1,12}(s)u_{s-2q,2}(s) + u_{s-2p,1}''(s)}{2i(\lambda_1(s))^{\frac{1}{4}}} ds, \quad (34)$$

$$u_{s2}(\tau) = -\frac{1}{(\lambda_1(\tau))^{-\frac{1}{4}}} \int_0^\tau \frac{a_{1,21}(s)u_{s-2q,1}(s) + a_{1,22}(s)u_{s-2q,2}(s) + u_{s-2p,2}''(s)}{2i(\lambda_1(s))^{\frac{1}{4}}} ds. \quad (35)$$

Враховуючи умови 1)–6), бачимо, що побудовані вектори $u_s(\tau)$, $2q \leq s \leq 4q$ є елементами простору m , крім того вони мають похідні по τ достатньо високих порядків на відрізку $[0; L]$.

Таким чином, нами визначені вектори

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), u_{s2}(\tau), 0, 0, \dots)$, $0 \leq s \leq p-1$, $u_{s1}(\tau)$, $u_{s2}(\tau)$ визначаються з (27);

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), u_{s2}(\tau), 0, 0, \dots)$, $p \leq s \leq 2q-p-1$, $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ мають вигляд (29)-(30).

$u_s(\tau) = colon(u_{s1}(\tau), u_{s2}(\tau), 0, 0, \dots)$, $2q-p \leq s \leq 2q-1$, $u_{s1}(\tau)$ і $u_{s2}(\tau)$ мають вигляд (33),

$u_s(\tau) = colon\left(u_{s1}(\tau), u_{s2}(\tau), -\frac{a_{1,31}(\tau)u_{2q-2p,1}(\tau) + a_{1,32}(\tau)u_{2q-2p,2}(\tau)}{\lambda_3(\tau) - \lambda_1(\tau)}, \dots\right)$, $2q \leq s \leq 4q$, $u_{s1}(\tau)$

і $u_{s2}(\tau)$ мають вигляд (34)-(35).

Продовжуючи міркування аналогічним чином, можна визначити всі останні вектори $u_s(\tau)$, $s \geq 4q$ і довести їх диференційовність по τ , оскільки дані вектори є скінченними сумами векторів, які мають похідні достатньо великих порядків.

Отже, і у випадку Б теорема 1 має місце.

Для доведення асимптотичного характеру формальних розв'язків використаємо метод «укорочення» [1-2].

У нашому випадку для зчисленої системи диференціальних рівнянь (6) побудуємо «укорочену» систему

$$\mu^{2p} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A_n(\tau, \mu^{2q}) x = 0, \quad (36)$$

де $x = colon\{x_1(\tau, \mu), x_2(\tau, \mu), \dots, x_n(\tau, \mu)\}$, $A_n(\tau, \mu^{2q})$ – квадратна матриця порядку n , яка отримана з нескінченної матриці $A(\tau, \mu^{2q})$, яка отримана відкиданням всіх рядків і стовпців, починаючи з $(n+1)$ -го. Скінченні системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром цілого рангу виду (36) розглядались в роботах М. Шкіля і Т. Мейлієва [7]. Зокрема, для систем вигляду (36) побудовано формальний частинний

розв'язок $x(\tau, \mu) = u(\tau, \mu) e^{i\mu^{-h} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(t)} dt}$, де $u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau)$ – n -мірний вектор.

Формальний розв'язок відповідає характеристичному кореню $\lambda_1(\tau)$.

Якщо виконати заміну $y_s = x_s$, $y_{n+s} = \frac{dx_s}{d\tau}$, $s = 1, 2, \dots, n$, то систему (36) зведемо до скінченної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mu^{2p} \frac{dy}{d\tau} + B(\tau, \mu^{2q}) y = 0, \quad (37)$$

$$B(\tau, \mu^{2q}) = \begin{bmatrix} 0_n & -\mu^{2p} E_n \\ A_n(\tau, \mu^{2q}) & 0_n \end{bmatrix}, \quad (2n \times 2n),$$

характеристичне рівняння якої $\det(B_0(\tau) - \omega(\tau)E) = 0$ має $2n$ простих коренів вигляду $\omega_j(\tau) = \pm i\sqrt{\lambda_j(\tau)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, а $\lambda_j(\tau)$ – корінь рівняння $\det(A_{0n}(\tau) - \lambda(\tau)E) = 0$. Тоді вектор-розв'язок $y(\tau, \mu)$ має вигляд

$$y(\tau, \mu) = \bar{u}(\tau, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(t)} dt\right), \quad (38)$$

де $\bar{u}(\tau, \mu) - 2n$ – мірний вектор такого вигляду

$$\bar{u}(\tau, \mu) = \begin{bmatrix} u(\tau, \mu) \\ u'(\tau, \mu) + i\mu^{-p}u(\tau, \mu) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

$$y_m(\tau, \mu) = \overline{u_m}(\tau, \mu) e^{i\mu^{-p} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(t)} dt}, \quad (40)$$

$$\overline{u_m}(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^m \mu^s \overline{u_s}(\tau), \quad m \geq 1.$$

Тоді асимптотичний характер формальних розв'язків виражається теоремою [7].

ТЕОРЕМА 2. Нехай при $\tau = 0$ $y(0, \mu) = y_m(0, \mu)$. (41)

Тоді $\forall t \in [0; L]$ і $\forall \mu \in (0; \mu_0]$ існує стала $C > 0$, яка не залежить від μ , що правильна нерівність

$$\|y(\tau, \mu) - y_m(\tau, \mu)\| \leq \mu^{m+2p} \cdot C. \quad (42)$$

Отже, для точного розв'язку $v(\tau, \mu) = colon\{v_1(\tau, \mu), v_2(\tau, \mu), \dots\}$ зчисленної системи диференціальних рівнянь (6), який відповідає характеристичному числу $\lambda_1(\tau)$, має місце оцінка

$$\begin{aligned} |v_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu)| &= |(v_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}(\tau, \mu)) + (y_{s,2n}(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu))| \leq \\ &\leq |v_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}(\tau, \mu)| + |y_{s,2n}(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu)| < \varepsilon_0 + C\mu^{m+2p}, \end{aligned}$$

або $|v_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu)| < \varepsilon_0 + C\mu^{m+2p}, \quad s = 1, 2, \dots$ (43)

$$\|v(\tau, \mu) - y_m(\tau, \mu)\| < \varepsilon_0 + C\mu^{m+2p}.$$

Таким чином, нами доведена теорема:

ТЕОРЕМА 3. Якщо $v(\tau, \mu) = colon\{v_1(\tau, \mu), v_2(\tau, \mu), \dots\}$ розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1); $y(\tau, \mu)$ – розв'язок «укороченої» системи диференціальних рівнянь (37), $y_m(\tau, \mu)$ – m -наближений розв'язок системи (37), тоді $\forall \varepsilon_0 > 0$ існує стала $C > 0$, яка не залежить від μ така, що $\forall \tau \in [0; L], \forall \mu \in (0; \mu_0]$ правильна нерівність $|v_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu)| < \varepsilon_0 + C\mu^{m+2p}, \quad n \rightarrow \infty, s = 1, 2, \dots$.

Висновки. Авторами статті визначено умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу вигляду (1) має розв'язок; побудовано формальний розв'язок такої системи у нерезонансному і резонансному випадках, коли головна матриця має простий дискретний спектр; доведено асимптотичний характер побудованих розв'язків методом «укорочення».

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у вивченні розв'язків системи вигляду (1), коли головна матриця є нескінченною клітиною Жордана або інші випадки дискретного спектру.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Valeev K. G., Zhautikov O. A. Infinite systems of differential equations. Alma-Ata: Nauka, 1974. 413 p.
2. Жаутиков О. С Розв'язок крайової задачі для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*. 1960. Т. 12. С. 157–164.
3. Ковтонюк М. М. Асимптотична поведінка розв'язку однієї нескінченної системи лінійних диференціальних рівнянь. *Український математичний журнал*. 1983. Т. 35. С. 630–636.

4. Ковтонюк М. М. Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика: колективна монографія / за заг. ред. М. М. Ковтонюк, С. М. Бака. Вінниця: ВНТУ, 2023. С. 54–79. URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811>
5. Ковтонюк М. М. Асимптотичне інтегрування зчислених систем диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній. *Проблеми вищої математичної освіти : виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. Інтернет-конф. (м. Вінниця, 01–03 червня 2020 р.). Вінниця, 2020. С.127–129. URL: https://conferences.vntu.edu.ua/public/files/pmovc/pmovc-2020_netpub.pdf
6. Кондакова С. В. Про асимптотичні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь, яка при похідних містить параметр з дробовим показником. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова*, 2001, №2. С. 262–272.
7. Мейлієв Т. К., Шкіль М. І. Про асимптотичне подання розв'язків систем диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром при похідній дробового рангу. *Доповіді академії наук УРСР*. 1979. № 4. С. 264–267.
8. Шкіль М. І., Рашевський М. О. Асимптотичне інтегрування лінійних систем другого порядку з нестабільним спектром. *Доповіді НАН України*. 2002. № 3. С. 39–43.
9. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. Київ: Вища школа, 1971. 226 с.
10. Яковець В. П., Стрельников М. А. Побудова асимптотичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. *Український математичний журнал*. 2003. Т. 55. № 7. С. 961–976.

УДК 517.925.4

Investigation of solutions of the countable system of second-order differential equations with small parameter of fractional rank

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia

Abstract. A formal solution to a countable system of second-order differential equations with a small parameter of fractional rank in the derivative is constructed for both resonant and non-resonant cases. Its asymptotic behavior is investigated using the «reduction» method of the countable system of differential equations.

The aim of the article is to determine the conditions under which a countable system of second-order linear differential equations with a small parameter of fractional rank in the derivative admits a solution; to construct a formal solution and to prove its asymptotic nature.

Keywords: countable systems of differential equations, small parameter, formal solution, asymptotic nature of the solution, reduction method.

References

1. Valeev, K. G., Zhautikov, O. A. (1974). *Infinite systems of differential equations*, Nauka, Alma-Ata.
2. Zhautikov, O. S. (1960). *Solution of the boundary value problem for an infinite system of ordinary differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **12**, 157–164. [in Ukrainian]
3. Kovtoniuk, M. M. (1983). *The asymptotic behavior of the solution of an infinite system of linear differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **35**, 630–636. [in Ukrainian]
4. Kovtoniuk, M. M. (2023). *Asymptotic solutions of a countable system of differential equations with two small parameters*, Problems of Mathematics and Computer Science in Pedagogical Institutions of Higher Education: Theory and Practice: A Collective Monograph, VNTU, Vinnytsia, 54–79. [in Ukrainian]. <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/811>
5. Kovtoniuk, M. M. (2020). *Asymptotic integration of countable systems of second-order differential equations with a small parameter of fractional order in the derivative*, Problems of Higher Mathematical Education: Challenges of Modernity, VNTU, Vinnytsia, 127–129. [in Ukrainian]. https://conferences.vntu.edu.ua/public/files/pmovc/pmovc-2020_netpub.pdf
6. Kondakova, S. V. (2001). *Asymptotic Solutions of Systems of Linear Differential Equations Involving Derivatives with a Fractional Parameter*, Scientific Notes of M. P. Drahomanov National Pedagogical University, **2**, 262–272. [in Ukrainian]

7. Meiliev, T. K., Shkil, N. I. (1979). *Asymptotic Representations of Solutions for Second-Order Systems of Differential Equations with a Small Parameter and a Derivative of Fractional Order*. Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, **4**, 264–267. [in Ukrainian]
8. Shkil, M. I., Rashevskiy, M. O. (2002). *Asymptotic integration of second-order linear systems with an unstable spectrum*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, **3**, 39–43. [in Ukrainian]
9. Shkil, M. I. (1971). *Asymptotic Methods in Differential Equations*, Vyshcha shkola, Kyiv. [in Ukrainian]
10. Iakovets, V. P., Strelnikov, M. A. (2003). *Construction of Asymptotic Solutions to Linear Systems of Differential Equations with Two Small Parameters*, Ukrainian Mathematical Journal. **55** (7), 961–976. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Мар'яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Sciences in Pedagogy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 17.04.2025

Прийнято до друку / Accepted 16.05.2025

Опубліковано / Published 21.05.2025