М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 1–12.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 1–12.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.97

Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона з нелокальною взаємодією

Сергій Бак[1], Галина Ковтонюк[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
sergiy.bak@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1508-2144

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukgm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3352-0358

Анотація. Стаття присвячена дискретним рівнянням типу Клейна–Ґордона, які описують нескінченні ланцюги нелінійних осциляторів з нелокальною взаємодією. Це означає, що кожен осцилятор взаємодіє з декількома своїми сусідами з обох обоків. Основний результат статті стосується існування періодичних біжучих хвиль в таких рівняннях. Достатні умови існування таких хвиль встановлено за допомогою варіаційного методу і теореми про гірський перевал.

Ключові слова: періодичні біжучі хвилі, рівняння типу Клейна–Ґордона, нелокальна взаємодія, критичні точки, теорема про гірський перевал.

1. Вступ

У цій статті будемо вивчати дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона з нелокальною взаємодією

$$\ddot{q}_n(t) - \sum_{j=1}^{l} c_j[q_{n+j}(t) + q_{n-j}(t) - 2q_n(t)] - dq_n(t) + f(q_n(t)) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-01

де $f(r) = V'(r)$ — неперервна функція на $\mathbb{R}$, $c_j, d > 0$, $j = 1, 2, ..., l$. Зауважимо, що рівняння (1) є зліченною системою звичайних диференціальних рівнянь та описують динаміку ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з нелокальною взаємодією кожного n-го осцилятора з l своїми найближчими сусідами з кожного боку та зовнішнім потенціалом V. Тут $q_n(t)$ позначає узагальнену координату n-го осцилятора в момент часу t.

Такі системи належать до широкого класу так званих дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем. Їх прикладами також є системи типу Фермі–Пасти–Улама і дискретні рівняння типу синус–Ґордона. Подібні системи представляють інтерес, в тому числі, з огляду на їх фізичні застосування (див. [1, 9, 10, 13, 18]). Зокрема, в останніх двох працях вивчалися дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона.

Також є багато праць, в яких такі системи вивчаються з математичної точки зору. Так в статтях [2, 3, 4, 7, 12, 14, 21, 23, 24, 25] досліджувалося питання існування біжучих хвиль, зокрема, періодичних, в системах лінійно і нелінійно зв'язаних осциляторів з локальним зв'язком на одновимірній і двовимірній ґратках. Тут розглядалися моделі, в яких осцилятори зв'язані з найближчими своїми сусідами. Умови існування періодичних біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама з локальною і нелокальною взаємодією, як на одновимірній, так і на двовимірній ґратках, встановлено в працях [5, 6, 15, 16, 19, 26] та ін. В статті [27] досліджено умови існування періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона на двовимірній ґратці. Для неперервного рівняння типу Клейна–Ґордона в [8] вивчалися біжучі хвилі, а в [11] — стоячі хвилі. Питання існування останніх для дискретних рівнянь типу Клейна–Гордона з насичуваними нелінійностями вивчено в статті [28], а зі степеневими нелінійностями — в [29].

2. Постановка задачі та основні припущення

Нас цікавлять розв'язки системи (1) у вигляді *біжучих хвиль:*

$$q_n(t) = u(n - ct), \tag{2}$$

де функцію $u(s)$ називають *профільною функцією* або *профілем* хвилі, при цьому стала $c \neq 0$ є *швидкістю* хвилі.

Тоді, підставивши (2) в (1), отримуємо рівняння

$$c^2 u''(s) - \sum_{j=1}^{l} c_j [u(s+j) + u(s-j) - 2u(s))] - du(s) + V'(u(s)) = 0, \tag{3}$$

де $s = n - ct$.

Будемо вивчати періодичні розв'язки рівняння (3), які задовольняють умову

$$u(s + 2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $k > 0$ — деяке фіксоване число.

Щодо потенціалу V зробимо таке припущення:

(h) $V \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $V(0) = V'(0) = 0$, $V'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \leq V'(r) r, \quad r \neq 0.$$

Зауважимо, що за виконання умови (h) існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\nu(r)$, $r \geq 0$ (див. [22], Лема 3.2), що

$$\nu(0) = 0, \lim_{r \to +\infty} \nu(r) = +\infty$$

і

$$V'(r)r \leq \nu(|r|)r^2. \tag{5}$$

Розглянемо множину

$$\Omega := \left\{ c > 0 \mid \min_{\xi \in \mathbb{R}} \sigma(\xi) \geq 0 \right\},$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4\sum_{j=1}^{l} c_j \sin^2 \frac{j\xi}{2} + d.$$

При $d > 0$ множина Ω непорожня.

Введемо величину

$$c_0 := \inf_{c>0} \Omega,$$

яку будемо називати *швидкістю звуку* в даній системі.

3. Варіаційне формулювання задачі

У певному розумінні рівняння (3) є рівнянням Ейлера-Лагранжа для функціоналу дії

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} \frac{c_j}{2}|u(s+j) - u(s)|^2 + \frac{d}{2}|u(s)|^2 - V(u(s)) \right\} ds, \tag{6}$$

який визначений на соболєвському просторі періодичних функцій

$$E_k := \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \mid u(s+2k) = u(s))\}$$

з нормою

$$\|u\|_k = \left(\int_{-k}^{k} \left[|u(s)|^2 + |u'(s)|^2 \right] ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються такі три леми (див. [22], Леми 4.2–4.4):

Лема 1. *За зроблених припущень функціонал J_k є неперервно-диференційовним на просторі E_k, а його похідна визначається формулою*

$$J'_k(u)h =$$

$$= \int_{-k}^{k} \left\{ c^2u'(s)h'(s) + \sum_{j=1}^{l} c_j[u(s+j) + u(s-j) - 2u(s)]h(s) + du(s)h(s) - V'(u(s))h(s) \right\} ds,$$

де $u, h \in E_k$.

Лема 2. *За зроблених припущень критичні точки функціоналу J_k є є розв'язками рівняння (3), що задовольняють умову (4).*

Запишемо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - S_k(u),$$

де

$$\Psi_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j) - u(s)|^2 + d|u(s)|^2 \right\} ds,$$

$$S_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} V(u(s))ds.$$

Лема 3. *Нехай $c > c_0$. Тоді виконуються нерівності*

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \le \Psi_k(u) \le \lambda_1\|u\|_k^2, \tag{7}$$

де

$$\lambda_0 = \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2},\ \lambda_1 = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2}.$$

Лема 4. *Нехай виконується умова (h) і $c > c_0$. Тоді існують такі додатні сталі ε_0 і γ, незалежні від k, що для ненульових критичних точок функціоналу J_k виконуються нерівності*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le \gamma J_k(u). \tag{8}$$

Доведення. Нехай $u \in E_k$ — критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u) = 0$ і за умовою (h) маємо

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{\mu}J_k'(u)u =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left\{ c^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j) - u(s)|^2 + d|u(s)|^2 \right\} ds -$$

$$- \int\limits_{-k}^{k} \left\{ V(u(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u(s))u(s) \right\} ds \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\Psi_k(u).$$

Враховуючи лему 3, маємо

$$J_k(u) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\lambda_0\|u\|_k^2.$$

Звідки отримуємо праву нерівність.

Доведемо тепер ліву нерівність. Оскільки для критичної точки $u \in E_k : J_k'(u)u = 0$, то

$$\int\limits_{-k}^{k} \left\{ c^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j) - u(s)|^2 + d|u(s)|^2 \right\} ds = \int\limits_{-k}^{k} V'(u(s))ds.$$

Тоді, як і вище,

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \le \int\limits_{-k}^{k} V'(u(s))ds,$$

і, враховуючи нерівність (5), одержуємо, що

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \leq \nu\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^2ds.$$

За теоремою вкладення, $\|u\|_{C([-k,k])} \leq C\|u\|_k$ зі сталою C, незалежною від k.

Таким чином, $\lambda_0\|u\|_k^2 \leq \nu\left(C\|u\|_k\right)\|u\|_k^2$. Оскільки $u \neq 0$, то $\nu\left(C\|u\|_k\right) \geq \lambda_0$, звідки одержуємо ліву нерівність з $\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1}\nu^{-1}(\lambda_0)$.

Лему доведено. □

Для доведення основного результату статті знадобиться теорема про гірський перевал, за допомогою якої встановимо існування нетривіальних (ненульових) критичних точок функціоналу J_k. Останні, згідно леми 2, і є шуканими періодичними біжучими хвилями.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1.

Означення 5. Кажуть, що функціонал I задовольняє *умову Пале–Смейла*, якщо виконується така умова:

(PS) *якщо* $\{u_n\} \subset H$ *така послідовність, що* $\{I(u_n)\}$ *обмежена та* $I'(u_n) \to 0$, $n \to \infty$, *то* $\{u_n\}$ *містить збіжну підпослідовність.*

Зауважимо, що оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність, то без обмеження загальності можна вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається.

Означення 6. Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b, якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Означення 7. Кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію гірського перевалу,* якщо існують $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e).$$

Наведемо теорему про гірський перевал (див. [15, 17, 20]).

Твердження 8. ***(Теорема про гірський перевал).*** *Нехай на гільбертовому просторі* H *з нормою* $\|\cdot\|$ *заданий функціонал* $I : H \to \mathbb{R}$ *класу* C^1, *який задовольняє умову Пале–Смейла та геометрію гірського перевалу. Тоді існує критична точка* $u \in H$ *функціоналу* I *така, що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. *При цьому*

$$I(u) \leq \sup_{\tau\geq 0} I(\tau e).$$

4. Основний результат

Основним результатом цієї статті є теорема:

Теорема 9. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c > c_0$. *Тоді для будь-якого* $k > 0$ *рівняння (3) має ненульовий розв'язок* u, *який задовольняє умову (4). Крім того, існують додатні сталі* ε_0, ε, C *і* C_0, *незалежні від* k, *такі, що виконуються нерівності*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0, \quad \varepsilon \leq J_k(u) \leq C. \tag{9}$$

Більше того, для досить великих значень k *цей розв'язок не є сталим.*

Покажемо, що для функціоналу J_k виконуються умови теореми про гірський перевал.

Лема 10. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c > c_0$. *Тоді функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Позначимо для функціоналу J_k послідовність Пале-Смейла на деякому рівні b через $\{u_n\}$. Легко бачити, що $\|J_k'(u_n)\|_{k,*} \leq 1$ і $|J_k(u_n)| \leq b+1$ для всіх досить великих n, а отже, для таких n

$$b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}J_k'(u_n)u_n =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left\{ c^2|u_n'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u_n(s+j) - u_n(s)|^2 + d|u_n(s)|^2 \right\} ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s)) \right\} ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \Psi_k(u_n) + \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s)) \right\} ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \lambda_0 \|u_n\|_k^2.$$

З останньої нерівності робимо висновок, що послідовності $\{u_n\}$ є обмеженою. А отже, переходячи до підпослідовності з тим самим позначенням, $u_n \to u$ слабко в E_k. В силу компактності вкладення $E_k \subset C([-k,k])$, $u_n \to u$ сильно в $C([-k,k])$.

Тоді для будь-яких натуральних n і m маємо

$$(J_k'(u_n) - J_k'(u_m))(u_n - u_m) =$$

$$= \Psi_k(u_n - u_m) - \int\limits_{-k}^{k} \{V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))\} ds.$$

Звідки, в силу нерівностей (8), отримуємо

$$(J_k'(u_n) - J_k'(u_m))(u_n - u_m) \geq \lambda_0\|u_n - u_m\|_k^2 - \int\limits_{-k}^{k} \{V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))\} ds,$$

тобто

$$\lambda_0\|u_n - u_m\|_k^2 \le (J_k'(u_n) - J_k'(u_m))(u_n - u_m) + \int\limits_{-k}^{k} \{V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))\}ds. \tag{10}$$

Оскільки при $n, m \to \infty$, $u_n - u_m \to 0$ слабко в E_k, а $J_k'(u_n) \to 0$ сильно в E_k^*, то перший доданок в правій частині нерівності (10) прямує до нуля. Крім того, $u_n \to u$ в $C([-k, k])$. Тоді підінтегральний вираз в правій частині тієї ж нерівності прямує до нуля рівномірно на $[-k, k]$. А отже, другий доданок в правій частині також прямує до нуля. Звідси маємо, що й ліва частина нерівності (10) прямує до нуля, тобто $\|u_n - u_m\|_k \to 0$ при $n, m \to \infty$. А це означає, що $\{u_n\}$ — фундаментальна послідовність в E_k і, отже, $u_n \to u$ сильно в E_k.

Лему доведено. □

Лема 11. *Нехай виконується умова (h) і $c > c_0$. Тоді функціонал J_k задовольняє геометрію гірського перевалу.*

Доведення. Розіб'ємо доведення леми на два кроки.

Крок 1. Покажемо, що за виконання умов леми існують такі додатні сталі r_0 і α_0, незалежні від k, що

$$\inf_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0.$$

Справді, за нерівністю (5), враховуючи умову (h), маємо

$$V(r) \le \mu^{-1}\nu(|r|)r^2.$$

Тоді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - \int\limits_{-k}^{k} V(u(s))ds \ge$$

$$\ge \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\int\limits_{-k}^{k} \nu(|u(s)|)(u(s))^2 ds \ge \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\nu\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\|u\|_{L^2(-k,k)}^2 \ge$$

$$\ge \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\nu\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\|u\|_k^2.$$

Проте за теоремою вкладення, $\|u\|_{C([-k,k])} \le C\|u\|_k$. Тому

$$J_k(u) \ge \left(\frac{\lambda_0}{2} - \frac{1}{\mu}\nu(C\|u\|_k)\right)\|u\|_k^2.$$

Далі вибираємо $r_0 > 0$ таким, що $\frac{1}{\mu}\nu(Cr_0) = \frac{\lambda_0}{4}$. Тоді, якщо $\|u\|_k = r_0$, то

$$J_k(u) \ge \frac{\lambda_0 r_0^2}{4},$$

що й дає необхідне.

Крок 2. Для доведення леми залишається показати, що за виконання її умов існує елемент $e \in E_k$ з нормою $\|e\|_k > r_0$ такий, що $J_k(e) \le 0$.

Справді, нехай $u \in E_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. З умови (h) випливає, що існують такі сталі $a > 0$ та $a_0 \ge 0$, що для всіх r

$$V(r) \ge a|r|^\mu - a_0.$$

Тоді

$$J_k(ru) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}\left\{c^2r^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j r^2|u(s+j)-u(s)|^2 + dr^2|u(s)|^2\right\}ds-$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} V(ru(s))ds \le$$

$$\le \frac{r^2}{2}\int\limits_{-k}^{k}\left\{c^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j)-u(s)|^2 + d|u(s)|^2\right\}ds-$$

$$-ar^\mu\int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^\mu + 2ka_0.$$

Враховуючи, що $\mu > 2$, $J_k(ru) \to -\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, існує таке $r_0 = r_0(u) > 0$, що $J_k(ru) \le 0$ для всіх $r > r_0$.

Лему доведено. □

Доведення теореми 9. З лем 10 та 11, випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал, а отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2 вона є розв'язком рівняння (3), який задовольняє умову(4).

Нижні оцінки (9) для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають з нерівностей (8). З теореми про гірський перевал маємо, що $J_k(u) \le \sup\limits_{\tau\ge 0} J_k(\tau e) = C$, звідки, враховуючи знову (8), отримуємо верхню оцінку і для $\|u\|_k$.

І на завершення методом від супротивного доведемо, що цей розв'язок не є сталим для досить великих k. Дійсно, припустимо, що $u(s) = a > 0$ сталий розв'язок рівняння (3) (доведення у випадку $a < 0$ аналогічне). Підставивши його в рівняння (3) одержуємо, що $da - V'(a) \equiv 0$. За умовою (h): $V'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, а тому знайдеться таке $a_0 > 0$, що $dr - V'(r) > 0$ при $0 < r < a_0$. Зазначимо, що з умови (h) випливає, що $V'(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, згідно теореми про проміжне значення сталий розв'язок існує. Отже, $a \ge a_0$. Тоді $\|u\|_k = (2k)^{\frac{1}{2}}|a| \ge (2k)^{\frac{1}{2}}|a_0| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, а це суперечить верхній оцінці для $\|u\|_k$ в (9). Одержана суперечність і доводить необхідне.

Теорему доведено. □

Висновки. Таким чином, в даній статті встановлено умови існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона, які описують нескінченні ланцюги лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з нелокальною їх взаємодією. Перспективи подальших досліджень вбачаємо у встановленні існування дозвукових періодичних і надзвукових відокремлених біжучих хвиль в таких рівняннях.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють про відсутність конфліктів інтересів і повне дотримання всіх правил етики журнальних статей.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D.* 1997. Vol. 103. P. 201–250. DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-2789(96)00261-8
2. Bak S. Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice. *Archivum Mathematicum.* 2022. Vol. 58, № 1. P. 1–13. DOI: https://doi.org/10.5817/AM2022-1-1
3. Bak S. Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.* 2022. Vol. 91, № 3. P. 225–234.
4. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D-lattice with saturable nonlinearities. *J. Math. Sci.* 2022. Vol. 260, № 5. P. 619–629. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-022-05715-0
6. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. *Mat. Stud.* 2023. Vol. 60, № 2. P. 180-190. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.60.2.180-190
7. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4. P. 916–920. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-011-0310-1
8. Bates P., Zhang C. Traveling pulses for the Klein–Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2006. Vol. 16, № 1. P. 235–252. DOI: https://doi.org/10.3934/dcds.2006.16.235
9. Braun O. M., Kivshar Y. S. Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. *Physics Reports.* 1998. Vol. 306. P. 1–108. DOI: https://doi.org/10.1016/S0370-1573(98)00029-5
10. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel–Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
11. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2013. Vol. 33, № 6. P. 2389–2401. DOI: https://doi.org/10.3934/dcds.2013.33.2389
12. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464. DOI: https://doi.org/10.1007/s002200050821
13. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D.* 2006. Vol. 216. P. 327–345. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.03.012
14. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices. *Nonlinear Analysis.* 2011. Vol. 74. P. 2071–2086. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.011
15. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta—Ulam Lattices. London—Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
16. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097–2113. DOI: https://doi.org/10.3934/dcdss.2019135
17. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence, R. I.: American Math. Soc. 1986. 100 p.
18. Rapti Z. Multibreather stability in discrete Klein–Gordon equations: Beyond nearest neighbor interactions. *Physics Letters A.* 2013. Vol. 377. P. 1543–1553. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.04.035
19. Wattis J. A. D. Approximations to solitary waves on lattices: III. The monoatomic lattice with second-neighbour interaction. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. Vol. 29. P. 8139–8157. DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/24/035
20. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser. 1996. 162 p.
21. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії.* 2006. Т. 26, № 2. С. 140–153.
22. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
23. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2014. Вип. 10. С. 17–23.

24. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2015. Вип. 12. С. 5–12.
25. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2011. Т. 35, № 1. С. 60–65.
26. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76–88.
27. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2013. Вип. 9. С. 5–10.
28. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2021. Вип. 22. С. 5-19. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2021-22.5-19
29. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету.* Серія: Математика та інформатика. 2021. Том 39, № 2. С. 7-21. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).7-21

UDC 517.97

Existence of supersonic periodic traveling waves in discrete Klein–Gordon type equations with nonlocal interaction

Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk

Abstract. The article is devoted to discrete Klein-Gordon type equations that describe infinite chains of nonlinear oscillators with nonlocal interactions. This implies that each oscillator interacts with several of its neighbors on both sides. The main result of the article concerns the existence of periodic traveling waves in such equations. Sufficient conditions for the existence of such waves were established using the variational method and the mountain pass theorem.

Keywords: periodic traveling waves, Klein-Gordon type equations, nonlocal interaction, critical points, mountain pass theorem.

References

1. Aubry, S. (1997). *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization,* Physica D., **103**, 201–250. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(96)00261-8
2. Bak, S. (2022). *Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice,* Archivum Mathematicum, **58** (1), 1–13. https://doi.org/10.5817/AM2022-1-1
3. Bak, S. (2022). *Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice,* Acta Mathematica Universitatis Comenianae, **91** (3), 225–234.
4. Bak, S. M. (2007). *Peridoc traveling waves in chains of oscillators,* Communications in Mathematical Analysis, **3** (1), 19–26.
5. Bak, S. M., Kovtonyuk, G. M. (2022). *Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D-lattice with saturable nonlinearities,* J. Math. Sci., **260** (5), 619–629. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05715-0
6. Bak, S. M., Kovtonyuk, G. M. (2023). *Periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice,* Mat. Stud., **60** (2), 180-190. https://doi.org/10.30970/ms.60.2.180-190
7. Bak, S. N., Pankov, A. A. (2011). *Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices,* J. Math. Sci., **174** (4), 916–920. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0310-1
8. Bates, P., Zhang, C. (2006). *Traveling pulses for the Klein–Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **16** (1), 235–252. https://doi.org/10.3934/dcds.2006.16.235

9. Braun, O. M., Kivshar, Y. S. (1998). *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model,* Physics Reports, **306**, 1–108. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(98)00029-5
10. Braun, O. M., Kivshar, Y. S. (2004). *The Frenkel–Kontorova model,* Springer, Berlin, 2004.
11. Ghimenti, M., Le Coz, S., Squassina, M. (2013). *On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime,* Discr. Cont. Dyn. Sys., **33** (6), 2389–2401. https://doi.org/10.3934/dcds.2013.33.2389
12. Iooss, G., Kirschgässner, K. (2000). *Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators,* Commun. Math. Phys., **211**, 439–464. https://doi.org/10.1007/s002200050821
13. Iooss, G., Pelinovsky, D. (2006). *Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices,* Physica D, **216**, 327–345. https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.03.012
14. Makita, P. D. (2011). *Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices,* Nonlinear Analysis, **74**, 2071–2086. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.011
15. Pankov, A. (2005). *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta—Ulam Lattices,* Imperial College Press, London-–Singapore.
16. Pankov, A. (2019). *Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction,* Discr. Cont. Dyn. Sys., **12** (7), 2097–2113. https://doi.org/10.3934/dcdss.2019135
17. Rabinowitz, P. (1986). *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,* American Math. Soc., Providence, R. I.
18. Rapti, Z. (2013). *Multibreather stability in discrete Klein–Gordon equations: Beyond nearest neighbor interactions,* Physics Letters A, **377**, 1543–1553. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.04.035
19. Wattis, J. A. D. (1996). *Approximations to solitary waves on lattices: III. The monoatomic lattice with second-neighbour interaction,* J. Phys. A: Math. Gen., **29**, 8139–8157. https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/24/035
20. Willem, M. (1996). *Minimax theorems,* Birkhäuser, Boston.
21. Bak, S. M. (2006). *Traveling waves in chains of oscillators,* Mat. Stud., **26** (2), 140–153. [in Ukrainian]
22. Bak, S. M. (2020). *Discrete infinite-dimensional Hamiltonian systems on a two-dimensional lattice, Doctor's thesis,* VSPU, Vinnytsia. [in Ukrainian]
23. Bak, S. M. (2014). *Existence of subsonic periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice,* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **10**, 17–23. [in Ukrainian]
24. Bak, S. M. (2015). *Existence of supersonic periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice,* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **12**, 5–12. [in Ukrainian]
25. Bak, S. M. (2011). *Existence of periodic traveling waves in a system of nonlinear oscillators placed on a two-dimensional lattice,* Mat. Stud., **35** (1), 60–65. [in Ukrainian]
26. Bak, S. M. (2012). *Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam system on a two-dimensional lattice,* Mat. Stud., **37** (1), 76–88. [in Ukrainian]
27. Bak, S. M. (2013). *Periodic traveling waves in discrete sine-Gordon equation on a two-dimensional lattice,* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **9**, 5–10. [in Ukrainian]
28. Bak, S. M. (2021). *Standing waves in discrete Klein–Gordon type equations with saturable nonlinearities.* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **22**, 5-19. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2021-22.5-19
29. Bak, S. M. (2021). *Standing waves in discrete Klein–Gordon type equations with power nonlinearities,* Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, **39** (2), 7-21. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).7-21

Про авторів / About the authors

Сергій Бак, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Serhii Bak, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Галина Ковтонюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Halyna Kovtoniuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 01.04.2024
Доопрацьовано / Revised 12.05.2024