М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 3, № 1 (2026), с. 1–10.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 3, No. 1 (2026), pp. 1–10.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.9

Клас додатно визначених ядер із кубічною симетризацією

Іванна Андрусяк[1], Оксана Бродяк[2]

[1]Національний університет "Львівська політехніка
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
andrusyak.ivanna@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6601-4374

[2]Національний університет "Львівська політехніка
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
oksana.y.brodiak@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0002-9886-3589

Анотація. Досліджується клас додатно визначених ядер $K(x, y)$, що породжуються цілою функцією k за допомогою симетризації, пов'язаної з кубічним коренем з одиниці. Для ядер, узгоджених із спектральною структурою задачі третього порядку $u''' = \lambda u$, отримано явне інтегральне подання функції k через невід'ємну спектральну міру $d\rho(\lambda)$ з компактним носієм. Отримана формула задає конструктивну параметризацію допустимих ядер у розглянутому класі та встановлює прямий зв'язок між додатною визначеністю і спектральними даними.

Ключові слова: інтегральні зображення, ядро, додатно визначені функції.

1. Вступ

Теорія додатно визначених функцій та ядер становить фундаментальне підґрунтя сучасного математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної фізики. Завдяки своїм структурним властивостям ці об'єкти забезпечують універсальний математичний апарат для опису коваріаційних ядер випадкових процесів, гармонічного аналізу на групах та функціональних просторів Гільберта з відтворювальним ядром (Reproducing Kernel Hilbert Spaces, RKHS). Сучасний стан теорії RKHS, з особливим акцентом на

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-01
2020 Mathematics Subject Classification: 47N20.

її конструктивні аспекти та широке коло прикладних застосувань, детально висвітлено у фундаментальних працях [1, 2].

У контексті функціонального аналізу інтегральні зображення додатно визначених ядер відіграють роль, аналогічну спектральним розкладам у теорії Фур'є. Зокрема, для класу зсувно-інваріантних ядер такі зображення безпосередньо пов'язані зі спектральними мірами згідно з класичними результатами типу теореми Бохнера. Для більш загальних структур ефективним інструментом дослідження виступає операторний підхід, що базується на спектральній теорії самоспряжених операторів. У межах цього підходу додатно визначені ядра допускають подання через власні функції відповідних диференціальних операторів, що встановлює глибокий зв'язок між теорією ядер та теорією крайових задач і спеціальних функцій (див., зокрема, [3, 4]).

Методологія ядер отримала значний розвиток у задачах обчислювальної математики та аналізу даних (Data-Driven Science). Вагомий внесок у розробку методів наближення на основі радіально-базисних функцій та статистичного навчання зроблено у працях М. Д. Бюмана [5] та Б. Шолкопфа [6]. Фундаментальні аспекти застосування RKHS у ймовірнісних моделях та спектральній теорії операторів також систематизовано у класичній роботі Ю. М. Березанського [9].

Спираючись на методи спектральної теорії, видається природним пошук аналітичних виразів для додатно визначених ядер у формі розкладів за власними функціями диференціальних операторів. Фундаментальну теоретичну базу для такого аналізу створює спектральна теорема для необмежених самоспряжених операторів [3, 4].

Метою даної роботи є виведення явного інтегрального зображення для специфічного класу додатно визначених ядер, що генеруються цілою функцією, асоційованих з лінійним диференціальним рівнянням третього порядку $u''' = \lambda u$. Основним об'єктом дослідження є інтегральне зображення вигляду:

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=0}^{r-1} \chi_j(x; \lambda)\overline{\chi_k(y; \lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda),$$

де $\chi_0(x; \lambda), \chi_1(x; \lambda), \ldots, \chi_{r-1}(x; \lambda)$ — фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння $Lu = \lambda u$. Отримано інтегральні зображення ядер типу $K(y - x), K(x - y), K(x + y)$, пов'язаних з диференціальними операторами $\frac{d}{dx}, -\frac{d^2}{dx^2}, i\frac{d}{dx}$, а також доведена теорема про інтегральне представлення додатно визначених ядер, пов'язаних з диференціальним оператором третього порядку $\frac{d^3}{dx^3}$.

2. Побудова ядра та основний результат

У даному розділі вводиться формальне означення додатно визначеної цілої функції, що використовується в подальших теоретичних побудовах, та формулюється головне твердження про інтегральне зображення досліджуваного класу ядер. Розглядається ядро $K(x, y)$, побудоване на основі скалярної функції k шляхом композиції її значень на трьох афінних формах від (x, y), які індуковані кубічними коренями з одиниці. Пропонована процедура симетризації є внутрішньо узгодженою зі специфікою спектрального аналізу диференціальних рівнянь третього порядку вигляду $u''' = \lambda u$.

Означення 1. Цілу функцію $\mathbb{C} \ni s \mapsto k(s) \in C^\infty$ будемо називати додатно визначеною, якщо

$$\sum_{i,j=1}^{N} K(x_i, x_j)\xi_i\xi_j \geq 0, \qquad \forall x_1, \ldots, x_N;\ \xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де

$$K(x,y) = \frac{1}{3}\left[k(x+y) + k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right) + k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\right],$$

а також виконується

$$\begin{gathered} K(0,0) = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial x}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial y}(0,0) = 0; \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}(0,0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Наступна теорема становить центральний результат цієї роботи. У ній отримано явне інтегральне зображення породжувальної функції k (а отже, і ядра K) через спектральну міру $d\rho(\lambda)$. Подання такого типу є принципово важливими з двох причин: по-перше, вони забезпечують конструктивну параметризацію всіх допустимих додатно визначених ядер у межах розглядуваного класу; по-друге, встановлюють безпосередній зв'язок між властивістю додатної визначеності та спектральними характеристиками рівняння $u''' = \lambda u$.

Теорема 2. *Нехай ціла додатно визначена функція $k(s)$ ($s \in \mathbb{Z}$) задовольняє умову*

$$k(s) + k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}s\right) + k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}s\right) = 0, \tag{3}$$

та оцінку

$$|k(s)| \leq Ce^{|s|} \qquad (C > 0). \tag{4}$$

Тоді має місце зображення

$$\begin{aligned} k(x) = \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} - \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda) + \\ + \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

де $d\rho(\lambda)$ — деяка міра, причому

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda) < \infty. \tag{6}$$

Навпаки, функція вигляду (5) є додатно визначеною і задовольняє (2)–(4).

3. Доведення основної теореми

Доведення. Оскільки для додатно визначеного ядра (1) виконується рівність

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}K\left(x,y\right)=\frac{\partial^3}{\partial y^3}K\left(x,y\right),$$

то для ядра $K(x,y)$ можна застосувати Теорему 3.7 ([9], с.659) і використати зображення (3.20).

Для цього нам потрібно знайти фундаментальну систему розв'язків $\chi_0(x;\lambda)$, $\chi_1(x;\lambda)$, $\chi_2(x;\lambda)$ рівняння

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\lambda u, \tag{7}$$

які задовольняють умови

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_j\left(x;\lambda\right)\big|_{x=0}=\delta_{jk}\quad\left(j,k=0,1,2\right).$$

Оскільки коренями характеристичного рівняння $K^3-\lambda=0$ є $K_1=\sqrt[3]{\lambda}$, якщо $\lambda\ge 0$ та $K_1=-\sqrt[3]{|\lambda|}$, якщо $\lambda<0$, $K_{2,3}=\dfrac{-\sqrt[3]{\lambda}\pm i\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}}{2}$, то загальний розв'язок (7), якщо $\lambda\ge 0$ матиме вигляд

$$y=C_1e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+C_3e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x.$$

Якщо ж $\lambda<0$, то загальний розв'язок рівняння (7) буде мати вигляд

$$y=C_1e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+C_2e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+C_3e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x.$$

Тому фундаментальна система розв'язків рівняння (7) матиме такий вигляд:

$$\chi_0\left(x;\lambda\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+\dfrac{2}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}\,x\quad\left(\lambda<0\right),\\ \dfrac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\dfrac{2}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\quad\left(\lambda\ge 0\right);\end{cases}$$

$$\chi_1(x;\lambda)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ \left(\lambda<0\right),\\ \left(\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ \left(\lambda\ge 0\right);\end{cases}$$

$$\chi_2(x;\lambda)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ (\lambda<0),\\ \left(\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ (\lambda\ge 0).\end{cases}$$

Зображення (3.7) з теореми 3.1 ([9], с.643)

$$K\left(x,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Omega_{\lambda}\left(x,y\right)d\rho\left(\lambda\right),$$

де

$$\Omega_{\lambda}\left(x,y\right)=\sum_{j,k=0}^{2}\left(\frac{\partial^{j+k}\Omega_{\lambda}}{\partial x^{j}\partial y^{k}}\right)\left(0,0\right)\chi_{j}\left(x;\lambda\right)\overline{\chi_{k}\left(y;\lambda\right)};\qquad d\sigma_{jk}\left(\lambda\right)=\left(\frac{\partial^{j+k}\Omega_{\lambda}}{\partial x^{j}\partial y^{k}}\right)\left(0,0\right)d\rho\left(\lambda\right)$$

буде мати такий вигляд:

$$K\left(x,y\right)=\sum_{j,k=0}^{2}\chi_{j}(x;\lambda)\overline{\chi_{k}(y;\lambda)},\tag{8}$$

Оскільки $K(x,y)$ задовольняє умову (2), то міри $d\sigma_{jk}(\lambda)=0$ ($j,k=\overline{0,2}$, крім $j=k=2$) і зображення (8) матиме вигляд:

$$K(x;y)=\int\limits_{R^1}\chi_2(x;\lambda)\overline{\chi_2(y;\lambda)}d\sigma_{22}(\lambda)=\int\limits_{R^1}\chi_2(x;\lambda)\overline{\chi_2(y;\lambda)}d\rho(\lambda).\tag{9}$$

Далі, якщо у ядро $K(x,y)$ покласти $y=x$, то умову (9) перепишемо

$$\frac{1}{3}[k(2x)+k(-x)+k(-x)]=\frac{1}{3}[k(2x)+2k(-x)]=\int\limits_{R^1}\chi_2^2(x;\lambda)d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right]^{2}\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^{2}}}+\tag{10}$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]^{2}\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^{2}}}.$$

Праву частину (10) можна спростити наступним чином. Нехай $\lambda\geq 0$, то маємо

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]^{2}\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^{2}}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-2\frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-$$
$$-2\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+2\frac{1}{3\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^{2}}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\left(\frac{1+\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x}{2}\right)+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\left(\frac{1-\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x}{2}\right)-$$
$$-\frac{2}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^{2}}}=$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{2}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} - \right.$$
$$\left. -\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x - \frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Отже, вираз (10), якщо $\lambda \geq 0$, має вигляд

$$\frac{1}{3}[k(2x)+2k(-x)] = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \right.$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{2}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x - \tag{11}$$
$$\left. -\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda),$$

звідки випливає, що

$$k(x)=\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda),$$

а це співвідношення (5) для випадку $\lambda \geq 0$.

Аналогічно з (10) можна отримати зображення (5) для випадку $\lambda < 0$.

З умови (6) випливає, що міра $d\rho(\lambda)$ зосереджена на проміжку $[-1, 1]$.

Завдяки тому, що носій міри $d\rho(\lambda)$ є компактним (обмеженим), функція $k(x)$ допускає аналітичне продовження на всю комплексну площину, тобто до функції $k(s)$ ($s \in \mathbb{C}$).

Останнє твердження теореми доводиться наступним чином. Із зображення (5) знаходимо всі члени ядра $K(x; y)$.

Отже, для $\lambda \geq 0$ маємо

$$\frac{1}{3}k(x+y)=\int\limits_0^1 \left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} - \frac{1}{9}\left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} + e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2}\right] + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} - e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2i}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda); \tag{12}$$

$$\frac{1}{3}k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right) = \int\limits_0^1 \left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} - \right.$$
$$-\frac{1}{18}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}y} + e^{\sqrt[3]{\lambda}x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}\right] + \tag{13}$$
$$\left. +\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}y} - e^{\sqrt[3]{\lambda}x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}}{2i}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda);$$

$$\frac{1}{3}k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_0^1\left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-\right.$$
$$-\frac{1}{18}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}\right]+ \tag{14}$$
$$\left.+\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}}{2i}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Тепер якщо додати рівності (12), (13) та (14), то з урахуванням того, що

$$\frac{1}{9}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}\right]=$$
$$=\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\right),$$

отримаємо

$$K(x,y)=$$
$$=\frac{1}{3}\left[k(x+y)+k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\right]=$$
$$=\int\limits_0^1\left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+\frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\right.$$
$$+\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y-\frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}-$$
$$-\frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}-$$
$$\left.-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}y}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho\left(\lambda\right)=\int\limits_0^1\chi_2(x)\chi_2(y)d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Підставляючи (15) в (1), отримуємо додатну визначеність ядра $K(x,y)$ для випадку $\lambda\geq 0$.

Аналогічно, перевіряється додатна визначеність ядра $K(x,y)$ для випадку $\lambda<0$.

Умова (2) випливає з (15).

Підставляючи $y=0$ у співвідношення (15), отримуємо виконання умови (3). Далі, з урахуванням умови (6), безпосередньо перевіряємо, що виконується й умова (4).

$$|k(x)|\leq\int\limits_{-1}^0\left|\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right|\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)+$$

$$+\int_0^1 \left|\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right|\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda) \leq$$

$$\leq \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3}e^{|x|} + \frac{1}{3}e^{\frac{|x|}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda) + \int_0^1 \left(\frac{1}{3}e^{|x|} + \frac{1}{3}e^{\frac{|x|}{2}} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda) \leq C_1 e^{|x|}\int_{-1}^1 \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = Ce^{|x|}.$$

Теорему доведено

Висновки. У роботі отримано інтегральні зображення для класу додатно визначених ядер $K(x, y)$, що породжуються цілою функцією k та узгоджені зі спектральною структурою рівняння третього порядку $u''' = \lambda u$. Зображення задано через невід'ємну спектральну міру $d\rho(\lambda)$ з компактним носієм, що забезпечує конструктивну параметризацію ядер у розглянутому класі та дозволяє перевіряти додатну визначеність через спектральні дані.

З погляду сучасної літератури з теорії ядер та просторів RKHS, зокрема [1, 10], даний результат доповнює загальні підходи конкретною операторно-узгодженою побудовою ядра і явною формулою інтегрального зображення. На відміну від апроксимаційно-чисельних підходів [2, 7] та прикладної перспективи в задачах машинного навчання [6], у центрі уваги тут — ядра, що виникають із розкладів за власними функціями диференціальних операторів.

Порівняно з операторно-спектральним тлом [3, 4], основний внесок статті полягає в отриманні явної формули для породжувальної функції k (і, відповідно, ядра K) через спектральний параметр λ, адаптованої до кубічно-кореневої структури задачі третього порядку. Отримані формули можуть бути використані для побудови прикладів і як основа для подальших узагальнень на споріднені оператори вищих порядків та різні крайові умови.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Paulsen V. I., Raghupathi M. An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 192 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781316219232
2. Fasshauer G. E., McCourt M. J. Kernel-based Approximation Methods Using MATLAB. New Jersey: World Scientific, 2015. 536 p. DOI: https://doi.org/10.1142/9335
3. Davies E. B. Linear Operators and Their Spectra. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 464 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511618864
4. Teschl G. Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrödinger Operators. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2014. 356 p. DOI: https://doi.org/10.1090/gsm/157

5. Buhmann M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 272 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241
6. Schölkopf B., Smola A. J. Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond. Cambridge: MIT Press, 2001. 648 p. DOI: https://doi.org/10.7551/mitpress/4175.001.0001
7. Wendland H. Scattered Data Approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 348 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511617539
8. Bakry D., Gentil I., Ledoux M. Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators. Cham: Springer, 2014. 552 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9
9. Березанський Ю. М. Розклад самоспряжених операторів за власними функціями. Київ: Наукова Думка, 1965. 798 с.
10. Berlinet A., Thomas-Agnan C. Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics. Boston—Dordrecht—London: Kluwer Academic Publishers. 2004. 344 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9096-9

UDC 517.9

A Class of positive definite kernels with cubic symmetrization

Ivanna Andrusyak, Oksana Brodyak

Abstract. The class of positive definite kernels $K(x, y)$ generated by an entire function k by means of symmetrization associated with cube roots of unity is investigated. For kernels consistent with the spectral structure of the third-order problem $u''' = \lambda u$, an explicit integral representation of the function k in terms of a nonnegative spectral measure $d\rho(\lambda)$ with compact support is obtained. The obtained formula determines the constructive parameterization of admissible kernels in the considered class and establishes a direct connection between positive definiteness and spectral data.

Keywords: integral representation, kernels, positive definite function.

References

1. Paulsen, V. I., Raghupathi, M. (2016). *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781316219232
2. Fasshauer, G. E., McCourt, M. J. (2015). *Kernel-based Approximation Methods Using MATLAB*, World Scientific, New Jersey. https://doi.org/10.1142/9335
3. Davies, E. B. (2010). *Linear Operators and Their Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511618864
4. Teschl, G. (2014). *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrödinger Operators*, 2nd ed., American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/gsm/157
5. Buhmann, M. D. (2003). *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press,Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241
6. Schölkopf, B., Smola, A. J. (2001). *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*, MIT Press, Cambridge. https://doi.org/10.7551/mitpress/4175.001.0001
7. Wendland, H. (2005). *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511617539
8. Bakry, D., Gentil, I., Ledoux, M. (2014). *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9
9. Berezansky, Yu. M. (1965). *Decomposition by eigenfunctions of self-adjoint operators*, Naukova Dumka, Kyiv. [in Ukrainian]
10. Berlinet, A., Thomas-Agnan, C. (2004). *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer Academic Publishers, Boston—Dordrecht—London. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9096-9

Про авторів / About the authors

Іванна Андрусяк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Національний університет "Львівська політехніка вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

Ivanna Andrusyak, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine;

Оксана Бродяк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Національний університет "Львівська політехніка вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

Oksana Brodyak, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 02.03.2026
Прийнято до друку / Accepted 03.04.2026
Опубліковано / Published 27.05.2026