М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 3, № 1 (2026), с. 55–64.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 3, No. 1 (2026), pp. 55–64.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.925.4

Застосування зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду до розв'язування вибраних задач математичної фізики

Мар'яна Ковтонюк[1], Олена Соя[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukmm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-7444-1234

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
soia.om@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

Анотація. Розглянуто задачу про побудову асимптотичних розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду, на основі якої побудовано розв'язок змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі, досліджено його асимптотичний характер.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду, асимптотичний характер розв'язку, змішана задача для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі.

1. Вступ

Дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків лінійних диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду у скінченних просторах присвячені праці О. Перона, Г. Шпета, Р. Бельмана, С. Фаедо, Н. Левінсона. Українські вчені М. Шкіль та Г. Завізіон асимптотично звели сингулярно-збурену систему диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду [8]. Я. Плоткін та А. Турбін досліджували

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-05
2020 Mathematics Subject Classification: 34E05, 35L20, 34C20.

асимптотичну поведінку розв'язку сингулярно збуреного квазілінійного диференціального рівняння у банаховому просторі [7]. В. Євтухов представив асимптотичне подання розв'язків двомірної системи диференціальних рівнянь [1]. О. Кочерга, В. Яковець для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи розробили асимптотику розв'язку задачі Коші [5]. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь розглядаються у працях М. Перестюка, О. Капустян, П. Фекети, Н. Касімової [6], М. Шкіля [10] та ін. У працях М. Ковтонюк та О. Сої [4], [3] побудовано розв'язки зчисленних систем диференціальних рівнянь з малими параметрами й встановлено їх асимптотичну поведінку.

2. Постановка проблеми

Мета статті: визначити умови і побудувати розв'язок змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі, використовуючи асимптотичні розклади для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду.

Зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду досліджувалися у працях М. Ковтонюк [2] та М. Шкіля й М. Ковтонюк [9]. Зокрема у роботах [2], [9] розглянуто системи

$$\frac{dy}{dt} = [W(t) + C(t)] \cdot y, \tag{1}$$

де $W(t), C(t) = \|c_{ij}(t)\|_1^\infty$ — дійсні нескінченні матриці, y — нескінченний вектор, $t \geq t_0$ — дійсна змінна, матриця $W(t)$ складається із жорданових клітин $W_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ із власним числом відповідно $w_j(t)$ розмірності r_j, тобто

$$W(t) = \{W_1(t), W_2(t), \ldots\}. \tag{2}$$

причому $1 \leq r_j < +\infty$ і послідовність $\{r_j\}$ кратності клітин Жордана обмежена зверху: $r = \sup\limits_j \{r_j\}$.

Розв'язок системи (1) шукаємо у просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей. Припустимо, що коефіцієнти L-діагональної системи (1)–(2) задовольняють умовам:

а) $w_k(t), c_{km}(t), c_k(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_{km}(t) \cdot t^2$ неперервні при $t \geq t_0$,

б) $\sup\limits_k \max\limits_t c_k(t) = \gamma < +\infty \quad \forall k = 1, 2, \ldots$, де $\gamma > 0$ — стала, що не залежить від t,

в) елементи матриці $C(t)$ такі, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{jk}^2(t) < M,\ j = 1, 2, \ldots;\quad \int\limits_t^{\infty} t^2 \|C(t)\| dt < +\infty$,

г) позначимо через $D_{km}(t) = \mathrm{Re}(w_k(t) - w_m(t))$. Припустимо, що всі $r_k < \infty$ попадають в один із двох класів I_1, I_2, де $r_k \in I_1$, якщо,

$$t^{-r} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} D_{km}(s) ds \right) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty, \tag{3}$$

$$|t - \tau|^2 \exp\left(- \int\limits_{\tau}^{t} D_{km}(s) ds \right) < M < +\infty,\ r_k \in I_2,\ \text{якщо}\ \int\limits_{\tau}^{t} D_{km}(s) ds < N. \tag{4}$$

Тоді має місце теорема [2].

Теорема 1. *Якщо система (1)–(2) задовольняє умовам а)–г), то існує таке достатньо велике $T \geq t_0 \geq 0$, що при $t \geq T$ дана система диференціальних рівнянь має розв'язок $y_j(t),\ j = 1, 2, \ldots$ асимптотично рівний*

$$y_j(t) = \psi_j(t)(1 + o(1)), \quad (t \to \infty), \tag{5}$$

де $\psi_j(t)$ — розв'язок скінченної системи диференціальних рівнянь $\frac{d\psi}{dt} = W_j(t)\psi$.

Цю теорему можна використати при знаходженні розв'язків змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі

$Ц_\infty = [0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq m] \times [0 \leq t \leq \infty)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(t, x, y)u, \tag{6}$$

$$|u|_L = 0, \quad L \text{ — межа області } G = [0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq m], \tag{7}$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y),$$

$$u_t(0, x, y) = u_1(x, y), \quad x, y \in G, \tag{8}$$

де $a(t, x, y)$ — функція, яка має неперервні похідні по t, x, y до третього порядку включно, абсолютно інтегровна в області G, тобто невласний інтеграл по змінній t збіжний

$$\int\limits_0^\infty a(t, x, y)dt < +\infty,$$

а функції $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ достатнє число раз диференційовні.

3. Основні результати

Поряд з (6) розглянемо рівняння

$$t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon a(t, x, y)u, \tag{9}$$

ε — деякий параметр ($0 < \varepsilon \leq 1$).

При $\varepsilon = 1$ рівняння (9) співпадає з (6). За допомогою підстановки $t = \varepsilon\tau$, (τ — нова незалежна змінна) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$, приходимо до рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon a(t, x, y)u. \tag{10}$$

Для побудови формального розв'язку змішаної задачі (6)–(7)–(8) використовуємо метод Фур'є. У відповідності з цим методом розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x, y) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{kj}} T_{kj}(t) X_k(x) Y_j(y), \tag{11}$$

де $X_k(x), Y_j(y),\ k, j = 1, 2, \ldots$ власні функції відповідних крайових задач

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu X(x); \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -\upsilon Y(y), \quad Y(0) = Y(m) = 0, \quad \omega = \mu + \upsilon, \tag{13}$$

$\{\mu_k\}$, $\{\upsilon_j\}$ — відповідні власні значення:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2; \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

$$\upsilon_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2; \quad Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{m}}\sin\frac{j\pi y}{m}; \quad j = 1, 2, \ldots$$

$\omega_{kj} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}\right)$; $\quad \upsilon_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi y}{m}$ — повна ортонормована система функцій. Після підстановки (12) в рівняння (10) отримаємо

$$\sum_{k,j}\frac{1}{\omega_{kj}}\frac{d^2T_{kj}}{d\tau^2}X_k(x)Y_j(y) = \sum_{k,j}\frac{1}{\omega_{kj}}T_{kj}(\tau)\frac{d^2X_k}{dx^2}Y_j(y) +$$

$$+ \sum_{k,j}\frac{1}{\omega_{kj}}T_{kj}(\tau)X_k(x)\frac{d^2Y_j(y)}{dy^2} + \sum_{k,j}\frac{1}{\omega_{kj}}a(t, x, y)T_{kj}(\tau)X_k(x)Y_j(y).$$

Останню рівність помножимо на $X_{k'}(x)Y_{j'}(y)$, $k', j' = 1, 2, \ldots$ і проінтегруємо послідовно два рази по x та y в межах від 0 до l і від 0 до m. Використовуючи співвідношення (14), приходимо до зчисленної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{\omega_{k'j'}}\frac{d^2T_{k'j'}}{d\tau^2} = -T_{k'j'}(\tau) + \varepsilon\sum_{k,j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{kj}}a_{kj,k'j'}(\tau)T_{kj}(\tau) \tag{15}$$

де $a_{kj,k'j'}(\tau) = \int\limits_0^l\int\limits_0^m a(\tau, x, y)\underbrace{X_k(x)Y_j(y)}_{\upsilon_{kj}(x,y)}\underbrace{X_{k'}(x)Y_{j'}(y)}_{\upsilon_{k'j'}(x,y)}dxdy, k', j' = 1, 2, \ldots$

Початкові умови набирають вигляду

$$T_{k'j'}(0) = \int_0^l\int_0^m u_0(x, y)\upsilon_{k'j'}(x, y)dxdy \tag{16}$$

$$\left.\frac{dT_{k'j'}}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \int_0^l\int_0^m u_1(x, y)\upsilon_{k'j'}(x, y)dxdy, k', j' = 1, 2, \ldots$$

У рівнянні (15) індекси k' і j' рівноправні, вони змінюються незалежно один від одного. Поставимо індексам k' і j' у відповідність натуральне число $r = k' + j'$. Якщо змінюються k' і j', або один із індексів, то відповідно змінюється і r.

Тоді рівняння (15) можна переписати у вигляді:

$$\frac{1}{\omega_r}\frac{d^2T_r}{d\tau^2} = -T_r(\tau) + \varepsilon\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{r_1}}a_{r,r_1}(\tau)T_{r_1}(\tau)$$

або

$$\frac{d^2T_r}{d\tau^2} = -\omega_r T_r(\tau) + \varepsilon\omega_r\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{r_1}}a_{r,r_1}(\tau)T_{r_1}(\tau) \tag{17}$$

За допомогою підстановки $T_r(\tau) = Z_{2r-1}(\tau)$, $\frac{dT_r(\tau)}{d\tau} = Z_{2r}(\tau)$, $r = 1, 2, \ldots$, початкову задачу (16)–(17) приводимо до зчисленної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\omega_1}{\omega_1} a_{11} & 0 & \frac{\omega_1}{\omega_2} a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{21} & 0 & \frac{\omega_2}{\omega_2} a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

або у векторно-матричній формі

$$\frac{dz}{d\theta} = AZ + \varepsilon B(\tau) Z. \tag{18}$$

Елементи нескінченних матриць $A, B(t)$ є достатнє число разів диференційовними функціями по t. Приводимо дану систему (18) до L-діагональному вигляду за допомогою підстановки

$$Z = U(t)W, \tag{19}$$

причому $U(t) = \|u_{pq}(t)\|_1^\infty$ — нескінченна матриця, яка задовольняє умову $\sum\limits_{q=1}^{\infty} u_{pq}^2(t) < M$, W — нескінченний вектор. Рівняння (18), використовуючи (19), набуває вигляду

$$U(t)\frac{dW}{d\tau} + \varepsilon U'(t)W = AU(t)W(t) - \varepsilon B(t)U(t)W(t).$$

Матрицю $U(t)$ будуємо так, щоб виконувалась матрична рівність

$$AU(t) - \varepsilon U'(t) - \varepsilon B(t)U(t) = U(t)(\Lambda(t) + \varepsilon C(t)),$$

$\Lambda(t) = diag\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots\}$, $C(t) = \|c_{ij}(t)\|_1^\infty$ — нескінченна матриця.

Прирівняємо в останньому матричному рівнянні коефіцієнти при однакових степенях ε. Отримаємо матричну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} AU(t) - U(t)\Lambda(t) = 0, \\ -U'(t) - B(t)U(t) = U(t)C(t). \end{cases} \tag{20—21}$$

З рівнянь (20—21) знаходимо $U(t)$ і $\Lambda(t)$. Проаналізувавши матрицю A, бачимо, що матрицю U потрібно шукати у квазідіагональному вигляді. Перше матричне рівняння (20—21) розпадається на зчисленну множину скінченних систем другого порядку

$$\begin{cases} U_{2j,2j-1}(t) = \lambda_{2j-1}(t)U_{2j-1,2j-1}(t), \\ -w_j U_{2j-1,2j-1}(t) = \lambda_{2j-1}(t)U_{2j,2j-1}(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{2j,2j}(t) = \lambda_{2j}(t)U_{2j-1,2j}(t), \\ -w_j U_{2j-1,2j}(t) = \lambda_{2j}(t)U_{2j,2j}(t), \end{cases}$$

$j = 1, 2, 3 \dots$, розв'язками яких є

$$\lambda_{2j-1} = i\sqrt{w_j}, \quad \lambda_{2j} = -i\sqrt{w_j}, \quad i = \sqrt{-1},$$
$$U_{2j-1,2j-1}(t) = U_{2j-1,2j}(t) = 1; \quad U_{2j,2j-1}(t) = \lambda_{2j-1} = i\sqrt{w_j},$$

$U_{2j,2j}(t) = -i\sqrt{w_j}$, тобто матриці $U(t)$ і $\Lambda(t)$ мають вигляд

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ i\sqrt{w_1} & -i\sqrt{w_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & i\sqrt{w_2} & -i\sqrt{w_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} i\sqrt{w_1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -i\sqrt{w_1} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & i\sqrt{w_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{w_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Оскільки матриця $U(t)$ має квазідіагональний вигляд, то ми можемо побудувати таку матрицю $U^{-1}(t)$, яка задовольняла б умові:

$$U(t)U^{-1}(t) = E_\infty,$$

де E_∞ — одинична нескінченна матриця, $U^{-1}(t) = \left\|U^0_{jk}\right\|_1^\infty$.

$$U^0_{2j-1,2j-1}(t) = U^0_{2j,2j-1}(t) = \frac{1}{2}; \quad U^0_{2j-1,2j}(t) = \frac{1}{2\sqrt{w_j}}, \quad U^0_{2j,2j}(t) = -\frac{1}{2\sqrt{w_j}},$$

тобто

$$U^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{w_1}} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{w_1}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{w_2}} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{w_2}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

З другого матричного рівняння (20—21) випливає, що
$C(t) = -U^{-1}(t)(U'(t) + B(t)U(t))$, або

$$C(t) = -U^{-1}(t)B(t)U(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \dots \\ \frac{i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \frac{i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \dots \\ \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \dots \\ \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Можна довести, що для матриці $C(t)$ виконуються умови неперервності функцій $c_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_{jk}(t)|$, $j = 1, 2, 3\dots$, а $t \geq 0$, а також $c_j(t) \leq \alpha(t)$ $\left(\int\limits_0^{+\infty} \alpha(\tau)d\tau < +\infty\right)$. Також для всіх $j, k = 1, 2, \dots$ функція $\mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) = 0$, тобто не змінює знак.

Тому L-діагональна система, згідно з [2], має розв'язок вигляду

$$w_j(t) = \eta_{jk}(t)e^{\pm w_k(t)}, \quad j,k = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

причому $\eta_{jk}(t)$ — неперервні функції на $[0;+\infty)$, для яких мають місце асимптотичні розклади:

$$\eta_{jk}(t) = o(1) \quad (j \neq k),$$
$$\eta_{kk}(t) = 1 + o(1) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Підставляючи (23) в нескінченну систему диференціальних рівнянь (18) ($\varepsilon = 1$) отримаємо розв'язки

$$z_{2j-1}(t) = (\eta_{jk}(t) + \eta_{j+1,k}(t))\, e^{\pm i w_k^t},$$
$$z_{2j}(t) = i\sqrt{w_j}\,(\eta_{jk}(t) + \eta_{j+1,k}(t))\, e^{\pm i w_k^t}, \quad j = 1,2,\ldots$$

Значить, диференціальне рівняння другого порядку (17) має розв'язки

$$\begin{aligned} T_\tau(t) &= (\eta_{\tau k}(t) + \eta_{\tau+1,k}(t))\, e^{\pm i w_k^t}, \\ \frac{dT_\tau(t)}{dt} &= i\sqrt{w_\tau}\,(\eta_{\tau k}(t) + \eta_{\tau+1,k}(t))\, e^{\pm i w_k^t}, \quad \tau = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

для яких мають місце асимптотичні формули

$$T_\tau(t) = (1 + o(1))e^{\pm i w_\tau^t} \quad \frac{dT_\tau(t)}{dt} = i\sqrt{w_\tau}o(1)e^{\pm i w_k^t}, \text{ якщо } k \neq \tau, \tau+1. \tag{25}$$

Отримані результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай функція $a(t,x,y)$ має неперервні похідні по t, x та y до третього порядку, абсолютно інтегровна в області G:*

$$\int_0^\infty a(t,x,y)dt < +\infty,$$

тоді розв'язок змішаної задачі (6)—(8) можна подати у вигляді (11), де функції $X_k(x)$, $Y_j(y)$, $T_\tau(t)$, $\tau = j+k$ обчислюють за формулами (12), (13), (14), для яких мають місце асимптотичні розклади (25).

Можна застосувати аналогічний метод знаходження розв'язку змішаної задачі для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(a_0^2(t) + a(t,x)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

яке задовольняє граничним $u(0,t) = u(l,t) = 0$ і початковим $u(x,0) = \varphi_1(x)$, $u_t(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2'(x)$ умовам, функції $a_0^2(t)$, $a_1(t,x)$ мають неперервні похідні по обох змінних до третього порядку, абсолютно інтегровні: $\int\limits_0^\infty a_0^2(t)dt < +\infty$, $\int\limits_0^\infty a_1(t,x)dt < +\infty$.

Тоді розв'язок такої задачі можна подати у вигляді $u(x,t') = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} T_k(t')\upsilon_k(x)$, функції $\upsilon_k(x)$ і $T_k(t)$ обчислюють за формулами $\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \omega^2\upsilon = 0$, $\upsilon(0) = \upsilon(l) = 0$,

$$\frac{dT_m(t)}{dt} = i\omega_m a_0(\tau)(\eta_{mk}(t) - \eta_{m+1,k}(t))e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad T_m(t) = (\eta_{mk}(t) + \eta_{m+1,k}(t))e^{\pm i\omega_k a_0(t)},$$

для яких мають місце асимптотичні формули

$$T_m(t) = (1 + o(1))e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \frac{dT_m(t)}{dt} = i\omega_m a_0(\tau)(1 + o(1))e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \text{якщо } k = m, m+1, \quad \text{і}$$

$$T_m(t) = o(1)e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \frac{dT_m(t)}{dt} = i\omega_m a_0(\tau)o(1)e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \text{якщо } k \neq m, m+1.$$

Висновки. Авторами статті визначено умови і побудовано розв'язок змішаної задачі для рівняння другого порядку гіперболічного типу у необмеженому циліндрі, використано асимптотичні розклади для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь L-діагонального вигляду у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана різної розмірності й різних характеристичних чисел.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у вивченні розв'язків системи вигляду (1), коли головна матриця є нескінченною клітиною Жордана або інші випадки дискретного спектру.

Конфлікт інтересів і етика. Мар'яна Ковтонюк є членом редколегії даного журналу. Для уникнення конфлікту інтересів, рукопис пройшов відповідну процедуру рецензування незалежними рецензентами, а прийняття рішення про публікацію здійснювалося незалежним редактором. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Робота виконана без спеціального фінансування.

Список використаних джерел

1. Євтухов В. М. Асимптотичні подання правильних розв'язків однієї двовимірної системи диференціальних рівнянь. *Доповіді НАН України.* 2002. № 4. С. 11–17.
2. Ковтонюк М.М. Асимптотичні формули для розв'язків нескінченних систем лінійних диференціальних рівнянь: дис. кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. Київ, 1985. 120 с.
3. Ковтонюк М. М., Соя О. М. Асимптотична поведінка розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь з малими параметрами. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2025. Т. 2, № 2. С. 206–215. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-04
4. Ковтонюк М. М., Соя О. М. Дослідження розв'язків зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2025. Т. 2, № 1. С. 24–36. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02
5. Кочерга О. І., Яковець В. П. Асимптотика розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи. *Доповіді НАН України.* 1999. № 5. С. 34–39.
6. Перестюк М. О, Капустян О. В., Фекета П. В., Касімова Н. В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь. Київ: ВПЦ «Київський Університет», 2015. 125 с.
7. Плоткін Я. Д., Турбін А. Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної квазілінійної задачі Коші у банаховому просторі. *Український математичний журнал.* 1999. Т. 51, № 8. С. 1077–1086.
8. Шкіль М. І., Завізіон Г. В. Асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду. *Доповіді НАН України.* 2000. № 12. С. 25–29.
9. Шкіль М. І., Ковтонюк М. М. До питання про асимптотичну поведінку розв'язку однієї змішаної задачі. *Доповіді АН УРСР,* Серія А. 1981. № 11. С. 35–40.
10. Шкіль М.І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях: підручник. Київ: Вища школа, 1971. 226 с.

UDC 517.925.4

Application of countable L-diagonal systems of linear ordinary differential equations to the solution of select problems in mathematical physics

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia

Abstract. In this paper we consider the problem of constructing asymptotic solutions of a countable L-diagonal system of linear ordinary differential equations. Based on this we construct a solution to a mixed problem for a hyperbolic partial differential equation in an unbounded cylinder and investigat its asymptotic behavior.

Keywords: countable L-diagonal systems of linear ordinary differential equations, mixed problem for a hyperbolic partial differential equation, asymptotic solution behavior, unbounded cylinder.

References

1. Yevtukhov, V. M. (2002). *Asymptotic Representations of Regular Solutions of a Two-Dimensional System of Differential Equations,* Dopovidi NAN Ukrainy, **4**, 11–17. [in Ukrainian]
2. Kovtoniuk M. M. (1985). *Asymptotic formulas for solutions of infinite systems of linear differential equations:* Candidate of Physical and Mathematical Sciences dissertation, Kyiv. [in Ukrainian]
3. Kovtoniuk M. M., Soia O. M. (2025). *Asymptotic behavior of solutions of a countable system of linear differential equations with small parameters,* Matematyka, informatyka, fizyka: nauka ta osvita, **2** (2), 206–215. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-04 [in Ukrainian]
4. Kovtoniuk M. M., Soia O. M. (2025). *Investigation of solutions of the countable system of second-order differential equations with small parameter of fractional rank,* Matematyka, informatyka, fizyka: nauka ta osvita, **2** (1), 24–36. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02 [in Ukrainian]
5. Kocherha, O. I., Yakovets, V. P. (1999). *Asymptotic Behavior of Solutions to a Countable System of Linear Differential Equations with Small Parameters,* Dopovidi NAN Ukrainy, **5**, 34–39. [in Ukrainian]
6. Perestiuk, M. O, Kapustian, O. V., Feketa, P. V, Kasimova, N. V. (2015). *Asymptotic Properties of Solutions of Differential Equations:* A Textbook, Kyiv University, Kyiv. [in Ukrainian]
7. Plotkin, Ya. D., Turbin, A. F. (1999). *Asymptotic Integration of a Singularly Perturbed Quasilinear Cauchy Problem in a Banach Space,* Ukrainskyi matematychnyi zhurnal, **51** (8), 1077–1086. [in Ukrainian]
8. Shkil, M. I., Zavizion, H. V. (2000). *Asymptotic Diagonalization of a Singularly Perturbed System of Differential Equations with a Regular Singularity,* Dopovidi NAN Ukrainy, **12**, 25–29. [in Ukrainian]
9. Shkil, M. I., Kovtoniuk, M. M. (1981). *On the Asymptotic Behavior of the Solution to a Mixed Problem,* Dopovidi AN URSR, Ser. A, **11**, 35–40. [in Ukrainian]
10. Shkil, M. I. (1971). *Asymptotic Methods in Differential Equations:* A Textbook, Vyshcha shkola, Kyiv. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Мар'яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Sciences in Pedagogy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 30.03.2026
Прийнято до друку / Accepted 29.04.2026
Опубліковано / Published 27.05.2026