М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 3, № 1 (2026), с. 11–21.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 3, No. 1 (2026), pp. 11–21.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.9:519.87:37

Побудова та аналіз математичної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання

Сергій Бак[1], Галина Ковтонюк[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
sergiy.bak@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1508-2144

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukgm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3352-0358

Анотація. У статті запропоновано математичну модель динаміки формування компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання, побудовану на основі аналогії з компартментними та епідеміологічними моделями. Модель враховує п'ять рівнів сформованості компетентностей (вхідний, низький, середній, достатній і високий) та описує як прогресивні, так і регресивні переходи між ними з урахуванням контактних і безконтактних механізмів взаємодії. Отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описує часову еволюцію відповідних груп здобувачів освіти. Для побудованої моделі досліджено задачу Коші: доведено обмеженість розв'язків, а також існування і єдиність розв'язку за допомогою стандартних результатів теорії диференціальних рівнянь. Запропонований підхід дозволяє формалізувати процес формування компетентностей та створює основу для подальшого аналізу, зокрема дослідження стійкості, чутливості параметрів і задач оптимального керування освітнім процесом.

Ключові слова: математичне моделювання, формування компетентностей, компартментні моделі, епідеміологічні моделі, задача Коші, існування та єдиність розв'язку.

1. Вступ

Останнім часом спостерігається зростання інтересу до застосування методів математичного моделювання для аналізу освітніх процесів ([4, 5, 7, 10, 12]). Особливе місце

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-02
2020 Mathematics Subject Classification: 00A71, 34C60, 37N99.

серед таких підходів посідають епідеміологічні та компартментні моделі ([3, 6, 8]), які завдяки своїй структурній гнучкості дозволяють описувати динаміку поширення знань, навчальної мотивації та поведінкових характеристик студентів.

Класичні роботи з математичної біології та епідеміології заклали теоретичні основи поділу популяції на підгрупи та аналізу переходів між ними за допомогою систем диференціальних рівнянь ([9, 13]). Надалі ці підходи були успішно адаптовані для моделювання соціальних процесів, зокрема поширення інформації та знань.

У контексті математичної освіти низка досліджень присвячена аналізу впливу мотивації, соціальної взаємодії та поведінкових факторів на навчальні результати. Зокрема, у роботі [5] побудовано математичну модель процесу навчання студентів в рамках математичної освіти, виконано аналіз чутливості параметрів і сформульовано задачу оптимального керування освітнім процесом, що підтверджує доцільність використання диференціальних моделей для дослідження навчальної динаміки.

Важливим кроком у цьому напрямку є робота [10], у якій запропоновано епідеміологічну модель навчальної поведінки студентів, побудовану за аналогією з класичною SIR-моделлю. Автори інтерпретують процес навчання як поширення «навчальної поведінки» в студентському середовищі та демонструють, що соціальна взаємодія, мотивація та інтенсивність навчального впливу відіграють ключову роль у переходах між різними рівнями навчальної активності. Ця робота підтверджує універсальність методу аналогій і його придатність для формалізації складних освітніх явищ. Зауважимо, що вперше SIR-модель була запропновна В. Кермаком і А. Маккендріком ([9]) в 1927 році для моделювання поширення інфекційного захворювання. Тут люди характеризуються трьома класами: сприйнятливі (Susceptible), інфіковані (Infected) та видужалі/вилучені (Recovered/Removed).

Разом із тим зазначені моделі переважно зосереджені на загальних характеристиках навчальної поведінки або обізнаності та не враховують усю специфіку формування компетентностей у процесі навчання. На відміну від моделей, запропонованих у [5, 6, 10], де основна увага приділяється загальній навчальній поведінці або обізнаності, у цій роботі компартментна структура адаптується до специфіки формування компетентностей у процесі навчання відповідно до рівнів їх сформованості. Зокрема, тут передбачається наявність як прогресивних, так і регресивних переходів, пов'язаних із втратою певних компетентностей на кожному рівні. Такий підхід дозволяє більш адекватно відобразити реальні процеси, які виникають під час навчання.

2. Постановка задачі

Розглянемо деяку педагогічну модель формування певних компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання. В цій моделі визначимо чотири рівні сформованості компетентностей: низький (початковий), середній (репродуктивний), достатній (конструктивний) і високий (творчий).

Низький (початковий) рівень — здобувачі освіти перебувають на початковому етапі формування компетентностей, зустрічаються з труднощами в опануванні навчального матеріалу, здатні відтворювати лише незначну його частину, потребують постійної допомоги, виявляють пасивність в навчанні, застосування знань на практиці відсутнє (компетентності майже не сформовані).

Середній (репродуктивний) рівень — здобувачі мають стабільно сформовані базові знання, вміння і навички, відтворюють ці знання і виконують типові завдання за зразком, але не виявляють достатньої самостійності (компетентності сформовані частково).

Достатній (конструктивний) рівень — здобувачі здатні самостійно виконувати типові завдання, вміють застосовувати знання, вміння і навички у стандартних ситуаціях, але при вирішенні нових проблем можуть знадобитися незначна допомога або підказки (компетентності сформовані).

Високий (творчий) рівень — здобувачі мають повністю сформовані комптентності, здатні активно, свідомо і творчо застосовувати їх у навчальній та професійній діяльності.

Зауважимо, що є багато досліджень, присвячених побудові педагогічних моделей формування різноманітних компетентностей фахівців конкретнихї галузей. Наприклад, стаття [1] присвячена побудові педагогічної моделі формування практичних умінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики, яка ґрунтується на поетапному розвитку мотивації, практичної діяльності та рефлексії. В статті [2] розроблена педагогічна модель формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих робітників будівельної галузі, яка складається з цільового, методологічного, змістового, навчально-модельованого та результативно-оцінювального блоків. А в [11] запропоновано педагогічну модель формування професійних компетентностей юриста через діяльністний підхід. Проте зазначені моделі не описують часову динаміку переходів між рівнями сформованості компетентностей. У зв'язку з цим актуальною є задача математичної формалізації педагогічної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання з урахуванням прогресивних і регресивних переходів між рівнями їх сформованості на основі методу аналогій з компартментними та епідеміологічними моделями.

Мета статті: побудувати математичну модель динаміки формування компетентностей у процесі навчання відповідно до рівнів їх сформованості та здійснити аналіз цієї моделі, зокрема, дослідити обмеженість, існування та єдиність розв'язку задачу Коші.

3. Основні результати

3.1. Побудова математичної моделі. У контексті цієї роботи використовується аналогія між:

- поширенням інфекцій або інформації;

- формуванням компетентностей у процесі навчання.

У компартментних моделях популяція поділяється на підгрупи, між якими відбуваються переходи з певною інтенсивністю. Аналогічно, у навчальному процесі студенти можуть перебувати на різних рівнях сформованості компетентностей та переходити між ними під впливом навчальних, мотиваційних і соціальних чинників.

Цей підхід дозволяє:

1) чітко формалізувати педагогічні припущення;

2) отримати балансні співвідношення;

3) забезпечити математичну коректність моделі.

Зауважимо, що процес формування компетентностей є поетапним і неоднорідним. Це зумовлює доцільність виділення кількох компартментів.

Позначимо через $N(t)$ — кількість здобувачів освіти у момент часу $t \geq 0$, які проходять навчання відповідно до даної педагогічної моделі. Нехай

- $E(t)$ — кількість здобувачів, які перебувають на етапі первинної мотивації та ознайомлення з навчальним матеріалом, фактично не володіють відповідними комптентностями (Entry level — вхідний рівень);

- $L(t)$ — кількість здобувачів з низьким (початковим) рівнем сформованості компетентностей (Low level — низький рівень);
- $M(t)$ — кількість здобувачів з середнім (репродуктивним) рівнем сформованості компетентностей (Medium level — середній рівень);
- $S(t)$ — кількість здобувачів з достатнім (конструктивним) рівнем сформованості компетентностей (Sufficient level — достатній рівень);
- $H(t)$ — кількість здобувачів з високим (творчим) рівнем сформованості комптентностей (High level — високий рівень).

Тоді

$$N(t) = E(t) + L(t) + M(t) + S(t) + H(t).$$

Всі ці функції вважаються невід'ємними і неперервно диференційовними на $[0, +\infty)$.

Передбачається, що здобувачі освіти поступово переходять від нижчих рівнів сформованості компетентностей до вищих у процесі навчання. З урахуванням підходів, запропонованих у [5], вважаємо, що швидкість переходу здобувачів між рівнями підготовки залежить не лише від їх поточного стану, а й від взаємодії з більш підготовленими здобувачами. Така взаємодія відображає ефекти колективного навчання, консультацій, наставництва та спільної роботи. Відповідно введемо такі додаткові параметри:

- Λ — інтенсивність вхідного потоку здобувачів освіти, які розпочинають навчання відповідно до педагогічної моделі (кількість осіб за одиницю часу);
- α — коефіцієнт інтенсивності контактного переходу здобувачів освіти з рівня E до рівня L, тобто коефіцієнт контактної конверсії між вхідним E і низьким L рівнями, який характеризує соціально зумовлений перехід здобувачів освіти з рівня E до рівня L внаслідок взаємодії з іншими учасниками навчального процесу (цей коефіцієнт є аналогом коєфіцієнта зараження в SIR-моделях);
- β — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з вхідного рівня E до середнього M;
- γ_1 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з низького рівня L до середнього M;
- γ_2 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з середнього рівня M до низького L;
- δ_1 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з середнього M рівня до достатнього S без жодних контактів;
- δ_2 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з середнього рівня M до високого H;
- δ_3 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня S до середнього M без жодних контактів;
- θ_1 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня S до високого H;
- θ_2 — коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з високого рівня H до достатнього S без жодних контактів;
- σ — коефіцієнт інтенсивності вибуття здобувачів освіти з навчального процесу на будь-якому етапі.

На рисунку 1 зображено схему, яка ілюструє дану модель. Такий поділ безпосередньо відображає логіку педагогічної моделі та дозволяє врахувати як прогрес, так і можливий регрес у навчанні.

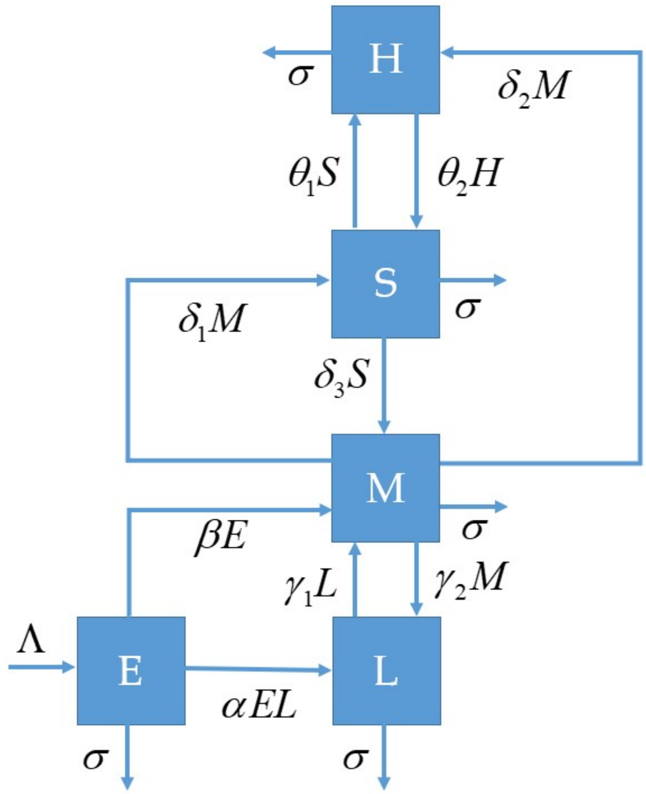

Рис. 1. Схема моделі динаміки формування компетентностей

Чисельність здобувачів вхідного рівня зростає за рахунок припливу нових здобувачів Λ. Зменшення цієї групи відбувається внаслідок двох основних процесів. По-перше, частина здобувачів переходить до низького рівня L унаслідок соціально зумовленої взаємодії з іншими здобувачами, що описується нелінійним контактним членом αEL. По-друге, здобувачі можуть безконтактно переходити безпосередньо до середнього рівня M з коефіцієнтом інтенсивності β, що відповідає індивідуальному засвоєнню навчального матеріалу. Крім того, враховується припинення навчання з коефіцієнтом σ. Отже, зміна кількості здобувачів вхідного рівня описується рівнянням

$$\frac{dE}{dt} = \Lambda - \alpha EL - (\beta + \sigma)E.$$

Група здобувачів з низьким рівнем L поповнюється за рахунок контактного переходу з рівня E та безконтактного переходу з рівня M з коефіцієнтами інтенсивності α і γ_2 відповідно. Зменшення чисельності цієї групи зумовлене безконтактним переходом до середнього рівня M з коефіцієнтом інтенсивності γ_1 та припиненням навчання. Таким чином, зміна кількості низького рівня описується рівнянням

$$\frac{dL}{dt} = \alpha EL + \gamma_2 M - (\gamma_1 + \sigma)L.$$

Чисельність здобувачів середнього рівня M збільшується за рахунок безконтактних переходів з рівнів E, L та S з коефіцієнтами β, γ_1 і δ_3 відповідно. Зменшення цієї групи пов'язане з переходами до низького, достатнього та високого рівнів з коефіцієнтами γ_2,δ_1 і δ_2, а також з припиненням навчання. Отже,

$$\frac{dM}{dt} = \beta E + \gamma_1 L + \delta_3 S - (\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma)M.$$

Рівень S формується внаслідок переходу здобувачів із середнього рівня з інтенсивністю δ_1, а також за рахунок зворотного переходу з високого рівня H з коефіцієнтом θ_2. Зменшення чисельності цієї групи зумовлене переходом до високого та середнього рівнів з коефіцієнтами θ_1 і δ_3, та припиненням навчання. Таким чином, маємо рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \delta_1 M + \theta_2 H - (\delta_3 + \theta_1 + \sigma)S.$$

Високий рівень H формується за рахунок переходів із середнього та достатнього рівнів з коефіцієнтами δ_2 та θ_1 відповідно. Зменшення чисельності цієї групи відбувається внаслідок зворотного переходу до рівня S та припинення навчання. Тобто маємо рівняння

$$\frac{dH}{dt} = \delta_2 M + \theta_1 S - (\theta_2 + \sigma)H.$$

Отже, динаміка формування компетентностей відповідно до визначених рівнів описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \Lambda - \alpha E L - (\beta + \sigma)E, \\ \dfrac{dL}{dt} = \alpha E L + \gamma_2 M - (\gamma_1 + \sigma)L, \\ \dfrac{dM}{dt} = \beta E + \gamma_1 L + \delta_3 S - (\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma)M, \\ \dfrac{dS}{dt} = \delta_1 M + \theta_2 H - (\delta_3 + \theta_1 + \sigma)S, \\ \dfrac{dH}{dt} = \delta_2 M + \theta_1 S - (\theta_2 + \sigma)H. \end{cases} \tag{1}$$

3.2. Задача Коші: обмеженість, існування та єдиність розв'язку.

Розглянемо задачу Коші для системи (1) з початковими умовами

$$E(0) = E_0, \quad L(0) = L_0, \quad M(0) = M_0, \quad S(0) = S_0, \quad H(0) = H_0, \tag{2}$$

де

$$E_0, L_0, M_0, S_0, H_0 \geq 0.$$

Теорема 1. *Для будь-яких невід'ємних початкових даних розв'язок*

$$(E(t), L(t), M(t), S(t), H(t)) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^5_+)$$

задачі Коші (1), (2) *є обмеженим.*

Доведення. Додавши всі рівняння системи (1) і врахувавши, що $N(t) = E(t) + L(t) + M(t) + S(t) + H(t)$, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \sigma N(t)$$

або

$$\frac{dN}{dt} + \sigma N(t) = \Lambda. \tag{3}$$

з початковою умовою

$$N(0) = N_0 := E_0 + L_0 + M_0 + S_0 + H_0. \tag{4}$$

Розв'язок задачі Коші (3), (4) має вигляд

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\sigma} + \left(N_0 - \frac{\Lambda}{\sigma}\right) e^{-\sigma t}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\sigma}.$$

Нехай

$$N_0 \le \frac{\Lambda}{\sigma}.$$

Тоді

$$0 \le N(t) \le \frac{\Lambda}{\sigma}$$

для всіх $t \ge 0$. Звідси випливає, що функція $N(t)$ є обмеженою для всіх $t \ge 0$. Оскільки всі компоненти розв'язку невід'ємні і не перевищують $N(t)$, вони також є обмеженими. □

Теорема 2. *Для будь-яких невід'ємних початкових даних задача Коші* (1), (2) *має єдиний розв'язок*

$$(E(t), L(t), M(t), S(t), H(t)) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^5_+).$$

Доведення. Перепишемо систему (1) у векторній формі

$$\frac{dX}{dt} = F(X) := \mathcal{L}X + \mathcal{N}(X),$$

де

$$X = (E, L, M, S, H)^T,$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -(\beta+\sigma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma_1+\sigma) & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma_1 & -(\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\sigma) & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -(\delta_3+\theta_1+\sigma) & \theta_2 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \theta_1 & -(\theta_2+\sigma) \end{pmatrix},$$

а нелінійний оператор $\mathcal{N}$ визначається рівністю

$$\mathcal{N}(X) = \begin{pmatrix} \Lambda - \alpha EL \\ \alpha EL \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для доведення теореми дорстатньо показати, що оператор F є ліпшицевим. Справді, нехай

$$X_1 = (E_1, L_1, M_1, S_1, H_1)^T, \quad X_2 = (E_2, L_2, M_2, S_2, H_2)^T \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^5_+).$$

Розглянемо різницю

$$\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2) = \begin{pmatrix} -\alpha(E_1L_1 - E_2L_2) \\ \alpha(E_1L_1 - E_2L_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\|\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2)\| \le 2\alpha\,|E_1L_1 - E_2L_2|.$$

Розкладемо різницю:

$$E_1L_1 - E_2L_2 = E_1(L_1 - L_2) + L_2(E_1 - E_2).$$

Тоді

$$|E_1L_1 - E_2L_2| \le E_1|L_1 - L_2| + L_2|E_1 - E_2|.$$

Використовуючи обмеженість розв'язків

$$E_i, L_i \le \frac{\Lambda}{\sigma}, \quad i = 1, 2,$$

одержуємо

$$|E_1L_1 - E_2L_2| \le \frac{\Lambda}{\sigma}\big(|L_1 - L_2| + |E_1 - E_2|\big).$$

Отже,

$$\|\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2)\| \le \frac{2\alpha\Lambda}{\sigma}\big(|E_1 - E_2| + |L_1 - L_2|\big).$$

Оскільки всі норми в $\mathbb{R}^5$ еквівалентні, то існує стала $C_1 > 0$ така, що

$$|E_1 - E_2| + |L_1 - L_2| \le C_1\|X_1 - X_2\|.$$

Тому

$$\|\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2)\| \le C\|X_1 - X_2\|, \quad C = \frac{2\alpha\Lambda}{\sigma}C_1.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}$ є лінійним, то

$$\|\mathcal{L}X_1 - \mathcal{L}X_2\| \le \|\mathcal{L}\|\,\|X_1 - X_2\|.$$

Отже,

$$\|F(X_1) - F(X_2)\| = \|\mathcal{L}X_1 + \mathcal{N}(X_1) - (\mathcal{L}X_2 + \mathcal{N}(X_2))\| \le (\|\mathcal{L}\| + C)\|X_1 - X_2\|.$$

Таким чином, права частина системи є ліпшицевою, що й доводить необхідне.

$\square$

Висновки. Таким чином, у роботі побудовано математичну модель динаміки формування компетентностей здобувачів освіти на основі компартментного підходу. Запропонована модель враховує поетапний характер навчального процесу та дозволяє описати як прогресивні, так і регресивні переходи між рівнями сформованості компетентностей. У результаті проведеного аналізу встановлено, що сумарна чисельність здобувачів освіти є обмеженою функцією часу, що забезпечує коректність моделі з точки зору прикладної інтерпретації. Також доведено існування та єдиність розв'язку задачі Коші для побудованої системи диференціальних рівнянь на основі властивості ліпшицевості правої частини. Запропонована модель може бути використана як базова для подальших досліджень, зокрема аналізу стійкості рівноважних станів, дослідження впливу параметрів та постановки задач оптимального керування освітнім процесом.

Конфлікт інтересів і етика. Сергій Бак є головним редактором, а Галина Ковтонюк є членом редколегії даного журналу. Для уникнення конфлікту інтересів, рукопис пройшов відповідну процедуру рецензування незалежними рецензентами, а прийняття рішення про публікацію здійснювалося незалежним редактором. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Бак С., Ковтонюк Г. Модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2025. Т. 2, № 2. С. 262–271. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10
2. Каленський А. Педагогічне моделювання формування енергоефективної компетентностімайбутніх кваліфікованих робітників будівельної галузі. *Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка.* Серія: Педагогічні науки. 2025. Том 3, № 59. С. 10–19. DOI: https://doi.org/10.31376/2410-0897-2025-3-59-10-19
3. Марценюк В. П., Сверстюк А. С. Математичні моделі та методи компартментного моделювання кіберфізичних систем медико-біологічних процесів: монографія. Львів: Видавництво «Магнолія – 2006», 2020. 400 с.
4. Chornyi O. P., Herasymenko L. V., Busher V. V. The learning process simulation based on differential equations of fractional orders. *CTE Workshop Proceedings* [Online]. 2021. Vol. 8. P. 473–483. DOI: https://doi.org/10.55056/cte.301
5. El Bhih A., Benfatah Y., Hassouni H., Balatif O., Rachik M. Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics.* 2024. Vol. 11. P. 1–12. DOI: https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795
6. Funk S., Gilad E., Watkins C., Jansen V. A. A. The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks. *PNAS.* 2009. Vol. 106. P. 6872–6877. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106
7. He Z., Wang H., Hu Y., Zhao H. Dynamic analysis and optimal control of knowledge diffusion model in regional innovation ecosystem under digitalization. *Scientific Reports.* 2024. Vol. 14, 13124. DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-024-63634-3
8. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review.* 2000. Vol. 42. P. 599–653. DOI: https://doi.org/10.1137/S0036144500371907
9. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A.* 1927. Vol. 115, issue 772. P. 700–721. DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118
10. Kishore R., Kumar D. Epidemic modeling of student learning behavior: a novel perspective. *International Journal of Mathematics and Computer Research.* 2025. Vol. 13, issue 3. P. 4943–4950. DOI: https://doi.org/10.47191/ijmcr/v13i3.06
11. Kostruba A. Pedagogical model of the formation of professional competences of lawyers: Ukrainian reality. *Law Review of Kyiv University of Law.* 2020. No. 2. P. 31–36. DOI: https://doi.org/10.36695/2219-5521.2.2020.04
12. Lewis D. Modeling student engagement using optimal control theory. *Journal of Geometric Mechanics.* 2022. Vol. 14, issue 1. P. 131–150. DOI: https://doi.org/10.3934/jgm.2021032
13. Murray J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. New York: Springer, 2002. 551 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b98868

UDC 517.9:519.87:37

Construction and analysis of a mathematical model of the dynamics of competence formation in the learning process

Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk

Abstract. The article proposes a mathematical model describing the dynamics of competence formation in the educational process. The model is developed based on an analogy with compartmental and epidemiological approaches and considers five levels of competence development: entry, low, medium, sufficient, and high. Both progressive and regressive transitions between these levels are taken into account, including contact and non-contact interaction mechanisms. The resulting model is formulated as a system of nonlinear ordinary differential equations that describe the temporal evolution of student groups across different competence levels. For the proposed system, the corresponding Cauchy problem is analyzed. In particular, the boundedness of solutions is established, and the existence and uniqueness of solutions are proved using standard results from the theory of differential equations, based on the Lipschitz continuity of the right-hand side. The developed model provides a formal framework for describing the competence formation process and can serve as a foundation for further investigations, including stability analysis, sensitivity analysis of model parameters, and optimal control of the educational process.

Keywords: mathematical modeling, competence formation, compartmental models, epidemiological models, Cauchy problem, existence and uniqueness of the solution.

References

1. Bak, S., Kovtoniuk, H. (2025). *Model for developing practical skills and abilities in working with LaTeX in future bachelors of mathematics,* Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, **2** (2), 262–271. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10
2. Kalenskyi, A. (2025). *Pedagogical modeling of formation of energy efficiency competence of future qualified workers in the construction industry,* Bulletin of Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, Series: Pedagogical sciences, **3** (59), 10–19. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31376/2410-0897-2025-3-59-10-19
3. Martseniuk, V. P., Sverstiuk, A. S. (2020). *Mathematical Models and Methods of Compartmental Modeling of Cyber-Physical Systems in Biomedical Processes*: Monograph, Magnolia — 2006, Lviv. [in Ukrainian]
4. Chornyi, O. P., Herasymenko, L. V., Busher, V. V. (2021). *The learning process simulation based on differential equations of fractional orders,* CTE Workshop Proceedings [Online], **8,** 473–483. https://doi.org/10.55056/cte.301
5. El Bhih, A., Benfatah, Y., Hassouni, H., Balatif, O., Rachik, M. (2024). *Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education,* Partial Differential Equations in Applied Mathematics, **11,** 1–12. https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795
6. Funk, S., Gilad, E., Watkins, C., Jansen, V. A. A. (2009). *The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks,* PNAS, Vol. **106,** 6872–6877. https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106
7. He, Z., Wang, H., Hu, Y., Zhao, H. (2024). *Dynamic analysis and optimal control of knowledge diffusion model in regional innovation ecosystem under digitalization,* Scientific Reports, **14,** 13124. https://doi.org/10.1038/s41598-024-63634-3
8. Hethcote, H. W. (2000). *The mathematics of infectious diseases,* SIAM Review, **42,** 599–653. https://doi.org/10.1137/S0036144500371907
9. Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927). *A contribution to the mathematical theory of epidemics,* Proceedings of the Royal Society A., **115** (772), 700–721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

10. Kishore, R., Kumar, D. (2025). *Epidemic modeling of student learning behavior: a novel perspective,* International Journal of Mathematics and Computer Research, **13** (3), 4943–4950. https://doi.org/10.47191/ijmcr/v13i3.06
11. Kostruba, A.(2020). *Pedagogical model of the formation of professional competences of lawyers: Ukrainian reality,* Law Review of Kyiv University of Law, No. 2, 31–36. https://doi.org/10.36695/2219-5521.2.2020.04
12. Lewis, D. (2022). *Modeling student engagement using optimal control theory,* Journal of Geometric Mechanics, **14** (1), 131–150. DOI: https://doi.org/10.3934/jgm.2021032
13. Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction,* Springer, New York. https://doi.org/10.1007/b98868

Про авторів / About the authors

Сергій Бак, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Serhii Bak, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Галина Ковтонюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Halyna Kovtoniuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 30.03.2026
Прийнято до друку / Accepted 30.04.2026
Опубліковано / Published 27.05.2026