М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 3, № 1 (2026), с. 22–40.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 3, No. 1 (2026), pp. 22–40.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.95

Півлінійні параболічні рівняння на графах

Олег Бугрій[1], Дарія Яценяк[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
oleh.buhrii@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1698-5559

[2]Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
dariia.yatseniak@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-8427-5532

Анотація. У статті розглянуто мішану задачу для півлінійного параболічного рівняння на простому зв'язному орієнтованому графі. Визначено слабкий розв'язок задачі у відповідних функційних просторах та наведено умови неперервності й спряження у вузлах графа. Доведено однозначну розв'язність задачі.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, параболічні рівняння, мішана задача, зв'язний орієнтований граф, слабкий розв'язок.

1. Вступ

Нехай $M, n \in \mathbb{N}$ – деякі числа, $\mathcal{G}$ – деякий простий зв'язний орієнтований граф із вершинами P_j $(j = \overline{1, M})$ та ребрами Ω_i $(i = \overline{1, n})$. Параметризуємо кожне ребро Ω_i інтервалом $(0, \ell_i)$ (тобто, для зручності, нехай $\Omega_i := (0, \ell_i)$, де $i = \overline{1, n}$).

Нехай J_j^- та J_j^+ – це множини усіх номерів ребер, що, відповідно, входять у вершину P_j та виходять із неї (див. [1], [2]), $j = \overline{1, M}$. Тут вхід та вихід з вершини обумовлено параметризацією ребер. Наприклад, для графа з Рис. 1 маємо $J_1^- = \varnothing$, $J_1^+ = \{1, 3, 4\}$ тощо.

Диференціальні рівняння на графах описують багато важливих процесів оточуючої дійсності. Зокрема, у сучасних дослідженнях півлінійні параболічні системи виступають центральним інструментом для моделювання складних процесів реакції-дифузії.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-03
2020 Mathematics Subject Classification: 35R02, 35K58, 35K20, 35D30.

В статті [3] детально розглядається однокомпонентна модель на основі рівняння Зельдовича, що є параболічним рівнянням виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + R(u),$$

де молодший нелінійний член $R(u) = Ku^2(1-u)$ описує швидкість хімічної реакції, а параметр K визначає інтенсивність перетворення речовини. Таке формулювання є ідейно близьким до задачі, що досліджується в нашій праці, де нелінійність визначає внутрішню динаміку системи. Відповідні моделі дозволяють з високою точністю описувати динаміку концентрації хімічних речовин, процеси горіння, а також процеси поширення нервових імпульсів у біологічних мережах.

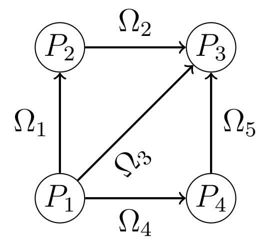

Рис. 1. Приклад графа.

Розвиток теорії еволюційних рівнянь на графах також тісно пов'язаний із новітніми викликами в аналізі даних та обробці сигналів. Як зазначено у [4, с. 4-5], диференціальні методи на графах є основою для нелокальної сегментації зображень та алгоритмів машинного навчання на складних мережевих структурах. Застосування варіаційних підходів до параболічних задач дозволяє ефективно моделювати дифузію інформації та динаміку взаємодії вузлів у соціальних і технологічних мережах.

У праці [5] розглянуто деякі властивості динамічних систем, які описуються рівняннями параболічного й гіперболічного типів на графах. Зокрема, для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

на графах-деревах авторами доведено здатність перевести систему з будь-якого початкового стану в нульовий за довільний інтервал часу $\tau > 0$. Для розгляду представлена задача, де граничне керування здійснюється через умови Діріхле, застосовані до граничних вузлів графа, що має значення для проєктування та стабілізації гнучких багатоланкових інженерних конструкцій, забезпечуючи теоретичну базу для управління квантовими процесами у наноструктурах, де топологія зв'язків визначає динамічні властивості всієї системи.

Актуальність дослідження підсилюється потребами сучасної науки про дані. Стаття [6] підкреслює важливість використання еволюційних рівнянь на графах для опису нелокальної динаміки великих масивів даних. Задачі для півлінійних параболічних рівнянь, що розглядаються нами, розширюють існуючий математичний апарат, дозволяючи враховувати складні внутрішні взаємодії в мережах, що неможливо в межах класичних евклідових моделей. Відповідно розробка методів доведення існування розв'язку таких задач є необхідним кроком для створення надійних алгоритмів моделювання еволюційних процесів на складних геометричних структурах.

У цій статті ми розглянемо мішану задачу для еволюційного рівняння на графі $\mathcal{G}$. Покажемо існування та єдиність розв'язку цієї задачі. Відповідні мішані задачі для лінійних рівнянь на графах розглянуто в [1] та [2].

2. Постановка задачі

Нехай $T > 0$, $\ell_i > 0$, $\Omega_i = (0, \ell_i)$, $Q^i_{0,T} = \Omega_i \times (0,T)$, $i = \overline{1,n}$. Тут шукатимемо функцію $\boldsymbol{u} = (u^1, \dots, u^n)$ таку, що $u^i : Q^i_{0,T} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо рівняння

$$u^i_t - a^i\, u^i_{xx} + g^i |u^i|^{q-2} u^i = f^i(x,t), \quad (x,t) \in Q^i_{0,T}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

з відповідними крайовими умовами

$$\begin{cases} u^k(\ell_k, t) = u^d(\ell_d, t) = u^r(0,t) = u^s(0,t),\ k,d \in J^-_j,\ r,s \in J^+_j, \\ \sum\limits_{k \in J^-_j} u^k_x(\ell_k, t) - \sum\limits_{r \in J^+_j} u^r_x(0,t) = 0, \end{cases} \quad j = \overline{1,M},\ t \in (0,T), \tag{2}$$

та початковими умовами

$$u^i(x, 0) = u^i_0(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

де $a^i, g^i > 0$ та $q > 1$ – деякі числа, $f^i : Q^i_{0,T} \to \mathbb{R}$ та $u^i_0 : \Omega_i \to \mathbb{R}$ – деякі функції, $i = \overline{1,n}$.

Введемо необхідні позначення:

$$\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \quad Q_{0,T} := Q^1_{0,T} \times \ldots \times Q^n_{0,T}, \tag{4}$$

$$V_1 := \Big\{ \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega_1) \times \ldots \times H^1(\Omega_n) \ \Big| $$
$$v^k(\ell_k) = v^d(\ell_d) = v^r(0) = v^s(0), \quad k,d \in J^-_j, \quad r,s \in J^+_j, \quad j = \overline{1,M} \Big\}, \tag{5}$$

$$V_2 := H^2(\Omega_1) \times \ldots \times H^2(\Omega_n), \quad Y := L^q(\Omega_1) \times \ldots \times L^q(\Omega_n), \tag{6}$$

$$H := L^2(\Omega_1) \times \ldots \times L^2(\Omega_n), \quad V = V_1 \cap Y. \tag{7}$$

Тут V_1 та H є гільбертовими просторами з нормами

$$||\boldsymbol{v}||_{V_1} := \Big(\sum_{i=1}^n ||v^i||^2_{H^1(\Omega_i)} \Big)^{1/2}, \quad |\boldsymbol{v}|_H \equiv ||\boldsymbol{v}||_H := \Big(\sum_{i=1}^n ||v^i||^2_{L^2(\Omega_i)} \Big)^{1/2}, \tag{8}$$

відповідно. Зрозуміло, що

$$||\boldsymbol{v}||^2_{V_1} = \sum_{i=1}^n ||v^i||^2_{H^1(\Omega_i)} = \sum_{i=1}^n \Big(||v^i_x||^2_{L^2(\Omega_i)} + ||v^i||^2_{L^2(\Omega_i)} \Big) = |\boldsymbol{v}_x|^2_H + |\boldsymbol{v}|^2_H. \tag{9}$$

Тут і далі $\boldsymbol{v}_x = (v^1_x, \dots, v^n_x)$. Простір Y розглядатимемо з нормою

$$||\boldsymbol{v}||_Y = \Big(\sum_{i=1}^n \int\limits_0^{\ell_i} |v^i(x)|^q\, dx \Big)^{1/q}, \quad \boldsymbol{v} = (v^1, \dots, v^n). \tag{10}$$

Цей простір є банаховим при $q \geq 1$, а за умови $q > 1$ він є рефлексивним.

Зауважимо також, що $V \overset{d}{\circlearrowright} H$, тобто простір V щільно й неперервно вкладений в H (див. [1, с. 3]). Тоді отримаємо $V \overset{d}{\circlearrowright} H \cong H^* \overset{d}{\circlearrowright} V^*$ (див. [7, с. 232-233] для більш детальної інформації).

Аналогічно до простору Y з (6) введемо простір

$$\mathcal{Y}(Q_{0,T}) := L^q(Q^1_{0,T}) \times \ldots \times L^q(Q^n_{0,T}), \tag{11}$$

з нормою

$$||\boldsymbol{u}; \mathcal{Y}(Q_{0,T})|| = \Big(\sum_{i=1}^n ||u^i; L^q(Q^i_{0,T})||^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{i=1}^n \int\limits_{Q^i_{0,T}} |u^i(x,t)|^q \, dxdt\Big)^{1/q}.$$

Спряженим до Y є простір

$$Y^* = L^{q'}(\Omega_1) \times \ldots \times L^{q'}(\Omega_n), \tag{12}$$

а до $\mathcal{Y}(Q_{0,T})$ – простір $\mathcal{Y}^*(Q_{0,T}) = L^{q'}(Q^1_{0,T}) \times \ldots \times L^{q'}(Q^n_{0,T})$, де $q' > 1$ – спряжений до $q > 1$ показник, тобто число, що задовольняє умову $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Зрозуміло, що

$$q' = \frac{q}{q-1}. \tag{13}$$

Нехай

$$U(Q_{0,T}) = L^2(0,T; V_1) \cap \mathcal{Y}(Q_{0,T}). \tag{14}$$

Наділимо цей простір стандартною нормою перетину банахових просторів

$$||\boldsymbol{u}; U(Q_{0,T})|| = ||\boldsymbol{u}; L^2(0,T;V_1)|| + ||\boldsymbol{u}; \mathcal{Y}(Q_{0,T})||.$$

Спряженим до $U(Q_{0,T})$ є простір $U^*(Q_{0,T}) = L^2(0,T;V_1^*) + \mathcal{Y}^*(Q_{0,T})$. Можна показати, що простір

$$W(Q_{0,T}) := \{\boldsymbol{u} \in U(Q_{0,T}) \quad | \quad \boldsymbol{u}_t \in U^*(Q_{0,T})\} \tag{15}$$

є банаховим простором з нормою

$$||\boldsymbol{u}; W(Q_{0,T})|| = ||\boldsymbol{u}; U(Q_{0,T})|| + ||\boldsymbol{u}_t; U^*(Q_{0,T})||.$$

Крім того, $C^1([0,T];V)$ є щільним у $W(Q_{0,T})$, $W(Q_{0,T}) \subset C([0,T];H)$ й виконується наступна формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle_V \, dt = (\boldsymbol{u}(t_2), \boldsymbol{v}(t_2))_H - (\boldsymbol{u}(t_1), \boldsymbol{v}(t_1))_H - \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{v}_t(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle_V \, dt, \tag{16}$$

де $0 \le t_1 < t_2 \le T$ та $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W(Q_{0,T})$. Зрозуміло, що при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ з (16) випливає, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle_V \, dt = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_2)|^2_H - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_1)|^2_H. \tag{17}$$

Визначимо оператори $A : V_1 \to V_1^*$ та $N : Y \to Y^*$ так:

$$\langle A\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}\rangle_{V_1} = \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{\ell_i} a^i z^i_x(x) v^i_x(x) \, dx, \quad \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \in V_1, \tag{18}$$

$$\langle N\boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}\rangle_Y = \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{\ell_i} g^i |h^i(x)|^{q-2} h^i(x) y^i(x) \, dx, \quad \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y} \in Y, \tag{19}$$

Припустимо, що виконуються наступні умови.

(A): $a^i > 0$, $i = \overline{1,n}$; $a_0 := \min\{a^1, \dots, a^n\}$, $a^0 := \max\{a^1, \dots, a^n\}$;
(G): $g^i > 0$, $i = \overline{1,n}$; $g_0 := \min\{g^1, \dots, g^n\}$, $g^0 := \max\{g^1, \dots, g^n\}$;
(F): $\boldsymbol{f} := (f^1, \dots, f^n) \in L^2(0,T;H)$, де H взято з (7);
(U): $\boldsymbol{u}_0 := (u_0^1, \dots, u_0^n) \in H$.

Означення 1. Вектор-функція $\boldsymbol{u} \in W(Q_{0,T})$, називається узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо для всіх $\boldsymbol{v} \in U(Q_{0,T})$ виконується рівність

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t(t) + A\boldsymbol{u}(t) + N\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t) \rangle_V \, dt = \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}(t))_H \, dt, \tag{20}$$

а також $\boldsymbol{u}$ задовольняє початкову умову

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{21}$$

Зауваження 2. Те, що розглянутий нами граф $\mathcal{G}$ є орієнтованим, дозволяє нам записувати крайові умови (2) у зручнішому для нас вигляді. Отримані тут результати переносяться на випадок неорієнтованих графів, бо доведення теорем існування і єдиності розв'язку задачі (1)-(2) не залежить від способу вибору такої орієнтації.

3. Допоміжні факти

Розіб'ємо цей підрозділ на кілька частин.

3.1. Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $Q = (0,T)\times\mathbb{R}^m$. Розглянемо задачу відшукання слабкого розв'язку $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ такої задачі Коші:

$$\varphi'(t) + L(t, \varphi(t)) = M(t), \quad t \in [0,T], \qquad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{22}$$

де $L : Q \to \mathbb{R}^m$ та $M : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ – деякі функції (для зручності припускаємо, що $L(t,0) = 0$ для кожного $t \in [0,T]$), $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_d^0) \in \mathbb{R}^m$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, X – банахів простір, $W^{m,p}(0,T;X)$ – простір Соболєва-Бохнера (див. [8, с. 286]). Нагадаємо кілька понять.

Означення 3. Вектор-функція $\varphi \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R}^m)$ називається глобальним слабким розв'язком задачі (22), якщо φ задовольняє початкову умову з (22) та задовольняє систему з (22) майже для всіх (м.д.в.) $t \in (0,T)$.

Означення 4. Вектор-функція $L : Q \to \mathbb{R}^m$ задовольняє умову Каратеодорі, якщо: для всіх (д.в.) $\zeta \in \mathbb{R}^m$ функція $(0,T) \ni t \mapsto L(t,\zeta) \in \mathbb{R}^m$ є вимірною; м.д.в. $t \in (0,T)$ функція $\mathbb{R}^m \ni \zeta \mapsto L(t,\zeta) \in \mathbb{R}^m$ є неперервною.

Означення 5. Вектор-функція $L : Q \to \mathbb{R}^m$ задовольняє L^p-умову Каратеодорі, якщо вона задовольняє умову Каратеодорі та д.в. $R > 0$ існує функція $h_R \in L^p(0,T)$ така, що

$$|L(t,\zeta)|_{\mathbb{R}^m} \le h_R(t) \tag{23}$$

м.д.в. $t \in (0,T)$ та д.в. $\zeta \in \overline{D_R} := \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y|_{\mathbb{R}^m} \le R\}$.

Твердження 6 (теорема Каратеодорі-Ласалля, див. [9] та теорему 3.24, [10], с. 872)**.** *Нехай $p \ge 2$, функція $L : Q \to \mathbb{R}^m$ задовольняє L^p-умову Каратеодорі, $M \in L^p(0,T;\mathbb{R}^m)$,*

$\varphi^0 \in \mathbb{R}^m$. Якщо існують невід'ємні функції $\alpha, \beta \in L^1(0,T)$ такі, що д.в. $\xi \in \mathbb{R}^m$ та м.д.в. $t \in [0,T]$ виконується нерівність

$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m} \geq -\alpha(t)|\xi|^2_{\mathbb{R}^m} - \beta(t), \tag{24}$$

то задача (22) має глобальний слабкий розв'язок $\varphi \in W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^m)$.

3.2. Допоміжні нерівності. Наступні два твердження є відомими. Для зручності наведемо їх доведення.

Твердження 7 (нерівність Пуанкаре на графах, Лема 1 [1], с. 4)**.** *Існує стала $C_1 > 0$ така, що для кожного $\boldsymbol{z} \in V_1$ виконується нерівність*

$$|\boldsymbol{z}_x|^2_H + \Big(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\ell_i} z^i(x)\,dx\Big)^2 \geq C_1|\boldsymbol{z}|^2_H. \tag{25}$$

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай для кожного $C_1 > 0$ існує таке $\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{z}^{C_1} \in V_1$, що

$$|\boldsymbol{z}_x|^2_H + \Big(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\ell_i} z^i(x)\,dx\Big)^2 < C_1|\boldsymbol{z}|^2_H.$$

Візьмемо $C_1 = \dfrac{1}{k^2}$ та позначимо $\boldsymbol{z}^k := \boldsymbol{z}^{C_1}$, $\boldsymbol{v}^k := \dfrac{\boldsymbol{z}^k}{|\boldsymbol{z}^k|_H}$, $k \in \mathbb{N}$. Тепер $|\boldsymbol{v}^k|_H = 1$ та

$$|\boldsymbol{v}^k_x|^2_H + \Big(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\ell_i} v^{k,i}(x)\,dx\Big)^2 < \frac{1}{k^2}.$$

Звідси випливають такі імплікації:

$$|\boldsymbol{v}^k|_H = 1 \quad \Longrightarrow \quad \{\boldsymbol{v}^k\}_H \quad \text{обмежена в} \quad H, \tag{26}$$

$$|\boldsymbol{v}^k_x|_H < \frac{1}{k^2} \quad \Longrightarrow \quad \{\boldsymbol{v}^k_x\}_H \quad \text{обмежена в} \quad H, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{v}^k_x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,\ldots,0) \quad \text{в} \quad H, \tag{28}$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\ell_i} v^{k,i}(x)\,dx\Big| < \frac{1}{k} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\ell_i} v^{k,i}(x)\,dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}. \tag{29}$$

З (26) та (28), випливає, що послідовність $\{\boldsymbol{v}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є обмеженою у V_1. Компактність вкладення $V_1 \overset{K}{\subset} H$ означає, що існує підпослідовність така, що $\boldsymbol{v}^{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}$ сильно в H. Звідси слідує, що

$$|\boldsymbol{v}|_H = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\ell_i} v^i(x)\,dx = 0. \tag{30}$$

Крім того, зі збіжності (28) маємо, що $\boldsymbol{v}_x = (0,\ldots,0)$, з чого робимо висновок, що v^i є сталими для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$. З побудови простору V_1 випливає, що всі ці константи рівні, тобто $\boldsymbol{v} = (\beta,\ldots,\beta) \in \mathbb{R}^n$. З рівності нулю інтеграла в (30), випливає, що $\boldsymbol{v} = (0,\ldots,0)$ що протирічить припущенню $|\boldsymbol{v}|_H = 1$. □

Твердження 8 (узагальнена лема Гронуола-Белмана)**.** *Якщо функція $y \in L^1(0,T)$ задовольняє нерівність*

$$y(\tau) \le C + K(\tau) + L \int\limits_0^\tau y(t)\,dt, \quad \tau \in [0,T], \tag{31}$$

з деякими сталими $C \ge 0$ та $L > 0$ і деякою функцією $K(\tau) = \int_0^\tau B(t)\,dt$, $\tau \in [0,T]$, де $b \in L^1(0,T)$, то виконується оцінка

$$y(\tau) \le \Big(C + K(\tau)\Big)\, e^{L\tau}, \quad \tau \in [0,T]. \tag{32}$$

Доведення. З оцінки (31) та відомої леми Гронуола-Белмана (див. [10, с. 872]), використаної з функцією $A(s) \equiv L$, випливає таке:

$$y(\tau) \le \Big(C + \int\limits_0^\tau B(t)\, e^{-\int\limits_0^t A(s)\,ds}\,dt\Big)\, e^{\int\limits_0^\tau A(t)\,dt} = \Big(C + \int\limits_0^\tau B(t)\, e^{-Lt}\,dt\Big)\, e^{L\tau} \le$$

$$\le \Big(C + \int\limits_0^\tau B(t)\,dt\Big)\, e^{L\tau}.$$

Тому (32) доведено. □

Слідуючу лему ми використовуватимемо далі.

Лема 9. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(G)** й оператори A та N визначено згідно з (18)-(19). Припустимо, що $\{\boldsymbol{w}^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset V$, $m \in \mathbb{N}$ – деяке число. Розглянемо вираз*

$$\boldsymbol{z}^m = \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu \boldsymbol{w}^\mu, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Визначимо вектор-функцію $\boldsymbol{L}(t,\xi) = (L_1(t,\xi), \ldots, L_m(t,\xi))$ за правилом

$$L_\mu(t,\xi) = \langle A\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{w}^\mu\rangle_{V_1} + \langle N\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{w}^\mu\rangle_Y, \quad \mu = \overline{0,m}, \quad t \in (0,T).$$

Тоді майже для всіх $t \in (0,T)$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ справедлива оцінка

$$(\boldsymbol{L}(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m} \ge \sum_{i=1}^n \int\limits_{\Omega_i} \Big(a_0 \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{z}_x^{m,i}|^2 + g_0 |\boldsymbol{z}^{m,i}|^q\Big)\,dx. \tag{33}$$

Доведення. За означенням функції $\boldsymbol{L}$ маємо

$$(\boldsymbol{L}(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{\mu=1}^m L_\mu(t,\xi)\xi_\mu = \sum_{\mu=1}^m \Big[\langle A\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{w}^\mu\rangle_{V_1} + \langle N\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{w}^\mu\rangle_Y\Big]\xi_\mu =$$

$$= \sum_{\mu=1}^m \Big[\langle A\boldsymbol{z}^m, \xi_\mu\boldsymbol{w}^\mu\rangle_{V_1} + \langle N\boldsymbol{z}^m, \xi_\mu\boldsymbol{w}^\mu\rangle_Y\Big] = \langle A\boldsymbol{z}^m, \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu\boldsymbol{w}^\mu\rangle_{V_1} + \langle N\boldsymbol{z}^m, \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu\boldsymbol{w}^\mu\rangle_Y =$$

$$= \langle A\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{z}^m\rangle_{V_1} + \langle N\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{z}^m\rangle_Y.$$

Для першого доданка, використовуючи умову **(A)** та визначення (18), одержуємо

$$\langle A\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{z}^m\rangle_{V_1} = \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{\ell_i} a^i |\boldsymbol{z}_x^{m,i}|^2\,dx \ge a_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{\ell_i} |\boldsymbol{z}_x^{m,i}|^2\,dx = a_0 |\boldsymbol{z}_x|_H^2.$$

Для другого доданка, використовуючи умову **(G)** та визначення (19), маємо

$$\langle N\boldsymbol{z}^m, \boldsymbol{z}^m\rangle_Y = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} g^i |\boldsymbol{z}^{m,i}|^{q-2} z^{m,i} z^{m,i}\, dx \geq g_0 \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} |\boldsymbol{z}^{m,i}|^q\, dx = g_0 ||\boldsymbol{z}^m||_Y^q.$$

Об'єднуючи отримані нерівності, приходимо до (33). Лему доведено. □

3.3. База деякого простору функцій, визначених на графах. Спершу нагадаємо допоміжні означення.

Нехай X, Y – два банахових простори. Функція A із частини $D(A)$ простору X в Y називається лінійним оператором, якщо вона зберігає лінійність. $D(A)$ називається областю визначення A. Якщо A лінійна, то $D(A)$ – лінійний підпростір у X. Множина значень $R(A)$ визначається як множина елементів простору Y вигляду Ax, де $x \in D(A)$. Якщо множина $D(A)$ щільна в X, то оператор A називається щільно визначеним.

Оператор A називається неперервним, якщо зі збіжності $x^i \to x$ випливає, що $Ax^i \to Ax$ (у сильній топології). Для неперервності лінійного оператора A необхідно і достатньо його обмеженості, тобто такого

$$||Ax|| \leq M||x|| \quad \forall x \in D(A),$$

де $M > 0$ – стала. Множину всіх лінійних обмежених операторів позначимо $\mathcal{L}(X, Y)$.

Оператор $A : X \to Y$ називається замкненим, якщо

$$\left.\begin{array}{l} x^i \to x \\ Ax^i \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{array}\right.$$

Це рівносильно тому, щоб графік A (тобто множина пар $(x, y) \in X \times Y$, таких, що $x \in D(A)$, $y = Ax$) був замкнений в $X \times Y$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається компактним або цілком неперервним, якщо образ $\{Ax^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ обмеженої послідовності $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ містить збіжну підпослідовність.

Нехай $A : B \to B$ – замкнений оператор у деякому банаховому просторі B та $I : B \to B$ – тотожний оператор.

Означення 10. Комплексне число λ називається власним значенням оператора $A : B \to B$, якщо існує ненульовий елемент $x \in B$, такий, що

$$Ax = \lambda x.$$

Цей елемент x називається власним вектором (власною функцією) оператора A.

Щільно визначений оператор A, що відображає гільбертів простір H у себе, називається симетричним, якщо

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H \quad \forall x, y \in D(A). \tag{34}$$

Симетричний оператор напівобмежений знизу, якщо існує скінченне число m, таке що:

$$m = \inf\Big\{(Ax, x)_H \;\Big|\; \text{по всіх} \;\; x \in D(A) \;\; \text{таких, що} \;\; |x|_H = 1\Big\}. \tag{35}$$

З (35) випливає, що напівобмежений знизу оператор задовольняє оцінку

$$(Ax, x)_H \geq m|x|_H^2 \quad \forall x \in D(A). \tag{36}$$

Якщо тут $m > 0$, то оператор A називається додатно визначеним; якщо $m = 0$, то A називається невід'ємним.

Твердження 11 (див. теорему 4.1 [11], с. 27)**.** *Нехай $A \in \mathcal{L}(H, H)$ є компактним і невід'ємним та задовольняє умову $Ax \neq 0$ при $x \neq 0$. Тоді існує нескінченна послідовність власних векторів $\{e^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, яку можна вибрати ортонормованою (тобто $|e^i|_H = 1$, $(e^i, e^j)_H = 0$, якщо $i \neq j$) і яка утворює базу простору H. Нумерацію власних векторів можна вибрати так, щоб відповідні власні значення λ^i (які є дійсними та додатними) утворювали монотонно спадну послідовність, що збігається до нуля:*

$$\lambda^1 \geq \lambda^2 \geq \ldots \geq \lambda^n \geq \ldots \to 0. \tag{37}$$

Нехай X – деякий гільбертів простір. Функція $a(u, v)$, визначена на $X \times X$, називається лінійною формою на X, якщо вона лінійна по першому й другому аргументу, тобто:

$$a(\lambda u, \mu v) = \lambda\mu\, a(u, v). \tag{38}$$

Лінійна форма неперервна, якщо існує стала M, така що:

$$|a(u, v)| \leq M||u||_X\, ||v||_X. \tag{39}$$

Спряженим (двоїстим) до X називається простір X^* (або X') всіх лінійних неперервних на X функціоналів, тобто відображень з X в $\mathbb{R}$. Кутові дужки $\langle$ та $\rangle$ означають співвідношення двоїстості між X^* та X, тобто, якщо $f \in X^*$ та $v \in X$, то

$$f(v) = \langle f, v\rangle_X = \langle f, v\rangle.$$

Твердження 12 (теорема Лакса-Мільграма, див. теорема 5.1 [11], с. 32)**.** *Нехай $a(u, v)$ – лінійна неперервна форма на деякому гільбертовому просторі X, яка є коерцитивною в тому сенсі, що існує така стала $a_0 > 0$, що*

$$|a(v, v)| \geq a_0||v||_X^2 \quad \forall\, v \in X. \tag{40}$$

Нехай $f \in X^*$. Тоді існує єдиний елемент $u \in X$, такий, що

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_X \quad \forall\, v \in X. \tag{41}$$

Пов'яжемо з формою $a(u, v)$ оператор $A : X \to X^*$, який визначено так: для довільного $u \in X$ елемент Au – це такий елемент X^*, що

$$\langle Au, v\rangle_X = a(u, v), \quad v \in X. \tag{42}$$

Оператор $A : X \to X^*$ називається коерцитивним, якщо виконується оцінка типу (36):

$$\langle Ax, x\rangle_X \geq a_0||x||_X^2 \quad \forall x \in X, \tag{43}$$

де $a_0 > 0$ – деяке фіксоване число.

Зрозуміло, що правило (42) для лінійної неперервної коерцитивної форми $a(u, v)$ ставить у відповідність лінійний неперервний коерцитивний оператор A.

Теорему Лакса-Мільграма можна тоді записати в такому еквівалентному вигляді

Твердження 13 (теорема Лакса-Мільграма в операторній формі)**.** *Якщо X – гільбертів простір, $A : X \to X^*$ – лінійний неперервний коерцитивний оператор, то для всіх $f \in X^*$ існує єдиний розв'язок $u \in X$ рівняння*

$$Au = f. \tag{44}$$

Наступне твердження теж є відомим в літературі. Наведемо його доведення для повноти викладу матеріалу.

Твердження 14 (про ортонормовану база на графах, див. лему 2 [1], с. 5-6)**.** *Нехай* V_1 *– простір з (5), H взято з (7). Існують послідовності* $\{\lambda_\mu\}_{\mu=0}^{\infty}$ *та* $\{\boldsymbol{w}^\mu\}_{\mu=0}^{\infty}$ *такі, що:*

(i) $\{\boldsymbol{w}^\mu\}_{\mu=0}^{\infty} \subset V_1$ *є ортонормованою базою для простору H;*

(ii) $\lambda_0 = 0$, $\boldsymbol{w}^0 = \left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\right)^{-1/2}, \dots, \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\right)^{-1/2}\right) \in \mathbb{R}^n$ *(тоді* $|\boldsymbol{w}^0|_H = 1$*);*

(iii) кожна функція $\boldsymbol{w}^\mu = (w^{\mu,1}, \dots, w^{\mu,n})$ *є гладкою на ребрах, зокрема,*

$$-w_{xx}^{\mu,i} = \lambda_\mu w^{\mu,i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{45}$$

Доведення. Визначимо наступні простори

$$\widetilde{V} = \Big\{\boldsymbol{v} \in V_1 \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} v^i(x)\,dx = 0\Big\}, \qquad \widetilde{H} = \Big\{\boldsymbol{v} \in H \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} v^i(x)\,dx = 0\Big\}. \tag{46}$$

Знайдемо ортонормовану базу за допомогою розв'язку задачі на власні значення: знайти пару $(\lambda, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R} \times \widetilde{V}$, $\lambda \neq 0$, $\boldsymbol{z} = (z^1, \dots, z^n)$ таку, що

$$(\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{v}_x)_H = \lambda(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})_H, \quad \boldsymbol{v} \in \widetilde{V}. \tag{47}$$

Спершу розглянемо іншу задачу: для заданого $\boldsymbol{h} \in H$, знайти $\boldsymbol{z} \in \widetilde{V}$ таке, що

$$(\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{v}_x)_H = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v})_H, \quad \boldsymbol{v} \in \widetilde{V}. \tag{48}$$

Нехай визначимо оператор $K : H \to \widetilde{V}$ такий, що $K\boldsymbol{h} = \boldsymbol{z}$, де $\boldsymbol{z}$ є розв'язком задачі (48). Доведемо, що K є коректно визначеним, компактним, симетричним та додатним, а потім, застосувавши спектральну теорему (твердження 11), отримаємо існування гладкої на кожному ребрі графа ортонормованої бази.

1. Коректність визначення. Перш за все, потрібно показати, що такий оператор K справді існує, тобто, що задача (48) має розв'язок. Доведемо це, застосувавши теорему Лакса-Мільграма. Нехай білінійну форму $\mathfrak{a} : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ визначено таким правилом:

$$\mathfrak{a}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} z_x^i(x) v_x^i(x)\,dx, \quad \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \in V_1. \tag{49}$$

Коерцитивність цієї форми випливає з твердження 7, бо оскільки $\boldsymbol{z} \in \widetilde{H}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} z^i(x)\,dx = 0.$$

Тому з (25) маємо (позначимо для зручності $C_2 := \frac{1}{\sqrt{C_1}} > 0$) оцінку

$$\frac{1}{C_2^2}\,|\boldsymbol{z}|_H^2 \le |\boldsymbol{z}_x|_H^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} |z_x^i(x)|^2\,dx.$$

Неперервність форми (49) випливає з такої оцінки (див. формулу (9))

$$|a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})| = |(\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{v}_x)_H| \le |\boldsymbol{z}_x|_H \cdot |\boldsymbol{v}_x|_H =$$

$$= (|\boldsymbol{z}_x|_H^2)^{\frac12} \cdot (|\boldsymbol{v}_x|_H^2)^{\frac12} \le (|\boldsymbol{z}_x|_H^2 + |\boldsymbol{z}|_H^2)^{\frac12} \cdot (|\boldsymbol{v}_x|_H^2 + |\boldsymbol{v}|_H^2)^{\frac12} = ||\boldsymbol{z}||_{V_1} \cdot ||\boldsymbol{v}||_{V_1}.$$

Тому з теореми Лакса-Мільграма випливає таке: для довільного $\boldsymbol{h} \in H \subset V_1^*$ існує єдиний елемент $\boldsymbol{z} \in V_1$ такий, що

$$a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v})_H \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V_1,$$

тобто (48) виконується і оператор K визначено конкретно.

2. Обмеженість. Нехай $\boldsymbol{h} \in H$ та $\boldsymbol{z} = K\boldsymbol{h}$, де $\boldsymbol{z} \in \widetilde{V}$ є розв'язком задачі (48). Використовуючи формулу (48) з $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}$ маємо:

$$|\boldsymbol{z}_x|_H^2 = (\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{z}_x)_H = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{z})_H \le |\boldsymbol{h}|_H \cdot |\boldsymbol{z}|_H.$$

Використавши оцінку (25) у формі

$$|\boldsymbol{z}|_H \le C_2 |\boldsymbol{z}_x|_H, \tag{50}$$

отримуємо, що $|\boldsymbol{z}_x|_H^2 \le |\boldsymbol{h}|_H \cdot C_2 |\boldsymbol{z}_x|_H$. Звідси випливає, що

$$|\boldsymbol{z}_x|_H \le C_2 |\boldsymbol{h}|_H, \tag{51}$$

а тому з (25) матимемо, що $|\boldsymbol{z}|_H \le C_2^2 |\boldsymbol{h}|_H$. Використовуючи означення норми V_1 з (9), одержимо

$$||K\boldsymbol{h}||_{V_1}^2 = ||\boldsymbol{z}||_{V_1}^2 = |\boldsymbol{z}|_H^2 + |\boldsymbol{z}_x|_H^2.$$

Підставляючи сюди отримані оцінки, одержимо нерівність

$$||K\boldsymbol{h}||_{V_1}^2 \le (C_2^2 |\boldsymbol{h}|_H)^2 + (C_2 |\boldsymbol{h}|_H)^2 = (C_2^4 + C_2^2)|\boldsymbol{h}|_H^2.$$

Отже,

$$||K\boldsymbol{h}||_{V_1} \le C_2 \sqrt{1 + C_2^2}\; |\boldsymbol{h}|_H, \tag{52}$$

що доводить обмеженість оператора $K : H \to \widetilde{V}$.

3. Компактність. Нехай $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – обмежена послідовність в H. Тоді $|h_i|_H \le C_3$. Тому для $z_i = Kh_i$ з оцінки (52) одержимо таке:

$$||z_i||_{V_1} = ||Kh_i||_{V_1} \le C_2 \sqrt{1 + C_2^2} \cdot C_3.$$

Завдяки компактності вкладення $\widetilde{V} \subset V_1 \overset{K}{\subset} H$ випливає, що послідовність $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ має збіжну підпослідовність, тобто K є компактним оператором.

4. Симетричність. Візьмемо довільні $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{g} \in H$. Нехай $K\boldsymbol{h} = \boldsymbol{z}$ та $K\boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}$. З (48) отримаємо, що

$$(\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{v}_x)_H = (\boldsymbol{h}, K\boldsymbol{g})_H. \tag{53}$$

З аналога (48) (замінивши $\boldsymbol{h}$ на $\boldsymbol{g}$ та змінивши $\boldsymbol{z}$ та $\boldsymbol{v}$ місцями) матимемо, що $(\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{z}_x)_H = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{z})_H$ і тому

$$(\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{z}_x)_H = (\boldsymbol{g}, K\boldsymbol{h})_H. \tag{54}$$

Зрозуміло, що ліві частини (53) та (54) однакові. Тому праві теж:

$$(\boldsymbol{h}, K\boldsymbol{g})_H = (\boldsymbol{g}, K\boldsymbol{h})_H = (K\boldsymbol{h}, \boldsymbol{g})_H.$$

Отримаємо, що оператор K є симетричним.

5. Додатність. Маємо з (48) при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}$ таке:

$$(K\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})_H = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{h})_H = (\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{z}_x)_H \ge 0,$$

тобто K є додатно визначеним оператором.

6. Існування бази. Оскільки K є симетричним, додатно визначеним та компактним лінійним оператором, то з твердження 11 випливає, що всі його власні значення $\{\eta_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$

є дійсними невід'ємними і прямують до нуля, а власні функції $\{\boldsymbol{w}^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ утворюють ортонормовану базу у $\widetilde{H}$.

Зауважимо, що для $\eta_\mu \neq 0$, рівність $K\boldsymbol{w}^\mu = \eta_\mu \boldsymbol{w}^\mu$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{w}^\mu$ є власною функцією задачі на власні значення (47) для власного значення $\lambda_\mu = 1/\eta_\mu$, при $\mu \in \mathbb{N}$.

Звернемо увагу, що в шуканій базі ми не маємо сталих векторів з V_1 (вони не належать до простору $\widetilde{V}$). Отже, якщо візьмемо $\boldsymbol{z} \in \widetilde{V}$ та $\boldsymbol{r} = (\alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ можна взяти довільним фіксованим числом, наприклад, таким, щоб $|\boldsymbol{r}|_H = 1$, то маємо

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{r})_H = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x)\alpha\, dx = \alpha \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x)\, dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad H = \widetilde{H} \oplus (\alpha, \ldots, \alpha).$$

Отже, набір вектор-функцій $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{w}^1, \boldsymbol{w}^2, \ldots$ утворив ортонормовану в H базу простору V_1.

7. Гладкість. На кожному ребрі графа й для кожної власної пари $(\lambda_\mu, \boldsymbol{w}^\mu)$, маємо (45). Зрозуміло, що кожна функція $w^{\mu,i}$ є гладкою, що можна довести, використовуючи стандартну процедуру підвищення гладкості. Теорему доведено. $\square$

3.4. Збіжності в функційних просторах. Використовуватимемо такі факти.

Твердження 15 (теорема Обена, див. твердження 4.2 [12], с. 7)**.** *Якщо $s, h > 1$ – деякі числа, $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ – банахові простори, $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$, то*

$$\{u \in L^s(0,T;\mathcal{W}) \ \mid \ u_t \in L^h(0,T;\mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} L^s(0,T;\mathcal{L}) \cap C([0,T];\mathcal{B}),$$

тобто якщо $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – обмежена послідовність в просторі $L^s(0,T;\mathcal{W})$ та $\{u^m_t\}_{m\in\mathbb{N}}$ – обмежена послідовність в $L^h(0,T;\mathcal{B})$, то існує підпослідовність $\{u^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ така, що $u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^s(0,T;\mathcal{L})$ та в $C([0,T];\mathcal{B})$.

Твердження 16 (див. зауваження 7 [13], с. 183)**.** *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ – обмежена область, $q \in [1, \infty]$, $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^q(G)$. Тоді якщо $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ сильно в $L^q(G)$, то існує підпослідовність $\{z_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ така, що $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v$ майже скрізь в G.*

Твердження 17 (див. лему 1 [14], с. 714, для $q(x) \equiv q$)**.** *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ – обмежена область, $q > 1$, $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^q(G)$. Тоді якщо $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ слабко в $L^q(G)$ та $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v$ майже скрізь в G, то $z = v$.*

Твердження 18 (див. [15], с. 482)**.** *Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, а $T > 0$. Якщо послідовність $\{\boldsymbol{v}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмеженою у просторі $L^\infty(0,T;H)$, то з неї можна виділити підпослідовність $\{\boldsymbol{v}^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, яка *-слабко збігається до деякого елемента $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;H)$. Тобто, для будь-якої тестової функції $\boldsymbol{w} \in L^1(0,T;H)$ виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^T (\boldsymbol{v}^{m_j}(t), \boldsymbol{w}(t))_H\, dt = \int_0^T (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t))_H\, dt.$$

Твердження 19 (див. теорему 3 [7], с. 723)**.** *Нехай X – рефлексивний банахів простір й $\{x^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – обмежена послідовність у X. Тоді існує підпослідовність $\{x^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ та елемент $x \in X$ такі, що $x^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$ слабко в X.*

4. Основні результати

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема 20. *Нехай виконуються умови* ***(A)***, ***(G)***, ***(F)***, ***(U)***. *Тоді правильні такі твердження.*

1) (Єдиність). Задача (1)-(3) не може мати більше одного слабкого розв'язку.

2) (Апріорна оцінка). Кожен слабкий розв'язок задачі (1)-(3) задовольняє наступну нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} |\boldsymbol{u}(t)|_H^2 + \int\limits_0^T ||\boldsymbol{u}(t)||_{V_1}^2\,dt + \int\limits_0^T ||\boldsymbol{u}(t)||_Y^q\,dt \le C_4\Big(|\boldsymbol{u}_0|_H^2 + ||\boldsymbol{f};L^2(0,T;H)||^2\Big), \tag{55}$$

де стала $C_4 > 0$ не залежить від $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$.

3) (Існування). Існує слабкий розв'язок $\boldsymbol{u}$ задачі (1)-(3).

Для зручності, позначимо через $SP(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{f})$ множину всіх слабких розв'язків задачі (1)-(3). Теорема 20 дає, що $SP(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{f}) \ne \varnothing$ і якщо $\boldsymbol{u} \in SP(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{f})$, то $\boldsymbol{u}$ є єдиним слабким розв'язком задачі (1)-(3).

Доведення. (Єдиність). Припустимо, що $\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{u}^2 \in SP(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{f})$,
та $\widehat{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{u}^2$. Тоді з (3) отримаємо, що $\widehat{\boldsymbol{u}}(0) = 0$. Нехай $\tau \in (0,T]$ й

$$\chi_{0,\tau}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0,\tau], \\ 0, & \text{якщо } t \notin [0,\tau]. \end{cases} \tag{56}$$

Оскільки $\boldsymbol{u}^1$ та $\boldsymbol{u}^2$ є слабкими розв'язками задачі (1)-(3), то для них виконується інтегральна тотожність (20). Запишемо її для $\boldsymbol{u}^1$ та $\boldsymbol{u}^2$:

$$\int\limits_0^T \langle \boldsymbol{u}_t^1(t) + A\boldsymbol{u}^1(t) + N\boldsymbol{u}^1(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle_V\,dt = \int\limits_0^T (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}(t))_H\,dt, \tag{57}$$

$$\int\limits_0^T \langle \boldsymbol{u}_t^2(t) + A\boldsymbol{u}^2(t) + N\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle_V\,dt = \int\limits_0^T (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}(t))_H\,dt. \tag{58}$$

Віднімаючи (58) від (57) та використовуючи лінійність скалярного добутку та оператора A, приходимо до рівності

$$\int\limits_0^T \langle \widehat{\boldsymbol{u}}_t(t) + A\widehat{\boldsymbol{u}}(t) + N\boldsymbol{u}^1(t) - N\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle_V\,dt = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in U(Q_{0,T}). \tag{59}$$

У (59) підставимо тестову функцію $\boldsymbol{v}(t) = \chi_{0,\tau}(t)\widehat{\boldsymbol{u}}(t)$, де $\chi_{0,\tau}$ взято з (56), отримуємо

$$\int\limits_0^\tau \langle \widehat{\boldsymbol{u}}_t(t), \widehat{\boldsymbol{u}}(t)\rangle_V\,dt + \int\limits_0^\tau \langle A\widehat{\boldsymbol{u}}(t), \widehat{\boldsymbol{u}}(t)\rangle_{V_1}\,dt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \langle N\boldsymbol{u}^1(t) - N\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{u}^1(t) - \boldsymbol{u}^2(t)\rangle_Y\,dt = 0, \quad \tau \in (0,T]. \tag{60}$$

Оскільки $\widehat{\boldsymbol{u}} \in W(Q_{0,T})$, то використовуючи формулу інтегрування частинами типу (17) та враховуючи оцінку

$$(|\xi^1|^{q-2}\xi^1 - |\xi^2|^{q-2}\xi^2)(\xi^1 - \xi^2) \geq 0, \quad \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}, \tag{61}$$

з (60) отримуємо $\frac{1}{2}|\widehat{\boldsymbol{u}}(\tau)|_H^2 + \int_0^\tau \langle A\widehat{\boldsymbol{u}}(t), \widehat{\boldsymbol{u}}(t)\rangle_{V_1}\, dt \leq \frac{1}{2}|\widehat{\boldsymbol{u}}(0)|_H^2 = 0$. Зважаючи на невід'ємність оператора A, звідси отримуємо $\frac{1}{2}|\widehat{\boldsymbol{u}}(\tau)|_H^2 \leq 0$, $\tau \in (0, T]$. Отже, $\widehat{\boldsymbol{u}} = 0$ та $\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{u}^2$.

(Апріорна оцінка). Для $\boldsymbol{u} \in SP(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f})$ та $\boldsymbol{v} = \chi_{0,\tau}\boldsymbol{u}$, з (20), використовуючи формулу інтегрування частинами типу (17), маємо

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(\tau)|_H^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(0)|_H^2 + \int\limits_0^\tau \Big[\langle A\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle_{V_1} + \langle N\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle_Y\Big]\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\tau (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t))_H\, dt, \quad \tau \in (0, T]. \tag{62}$$

З нерівності Коші

$$|\alpha\beta| \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{63}$$

випливає, що

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})_H| \leq |\boldsymbol{f}|_H \cdot |\boldsymbol{u}|_H \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{f}|_H^2 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|_H^2.$$

З умови **(A)** та формул (9) і (18) випливає, що

$$\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{V_1} + a_0|\boldsymbol{v}|_H^2 \geq a_0||\boldsymbol{v}||_{V_1}^2, \quad \boldsymbol{v} \in V_1. \tag{64}$$

Тоді з (64) та (62) отримуємо

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(\tau)|_H^2 + a_0\int\limits_0^\tau ||\boldsymbol{u}(t)||_{V_1}^2\, dt + g_0\int\limits_0^\tau ||\boldsymbol{u}(t)||_Y^q\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|_H^2\, dt + \Big(\frac{1}{2} + a_0\Big)\int\limits_0^\tau |\boldsymbol{u}(t)|_H^2\, dt. \tag{65}$$

Введемо допоміжну функцію $y(t) = |\boldsymbol{u}(t)|_H^2$, $t \in [0, T]$. Тоді з (65) отримаємо таке:

$$y(\tau) \leq |\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|_H^2\, dt + (1 + 2a_0)\int\limits_0^\tau y(t)\, dt.$$

Застосувавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (див. твердження 8), звідси маємо

$$y(\tau) \leq \Big(|\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|^2\, dt\Big)e^{(1+2a_0)\tau}, \quad \tau \in (0, T].$$

Підставивши цю оцінку в праву частину нерівності (65), отримаємо таке:

$$|\boldsymbol{u}(\tau)|_H^2 \leq C_5 F(\tau), \tag{66}$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_{0,\tau}^i} \Big[|u_x^i(x,t)|^2 + |u^i(x,t)|^q\Big] \quad dxdt \leq C_6 F(\tau), \tag{67}$$

де $F(\tau)=|\boldsymbol{u}_0|^2_H+\int_0^\tau|\boldsymbol{f}(t)|^2_H\,dt,\ \ \tau\in[0,T]$. Звідси і випливає оцінка (55).

(Існування). Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Візьмемо послідовність $\{\boldsymbol{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$ з твердження 14. Визначимо функцію $\boldsymbol{u}^m:[0,T]\to V$ за правилом

$$\boldsymbol{u}^m(t)=\sum_{\mu=0}^m\varphi_\mu^m(t)\boldsymbol{w}^\mu,\quad t\in[0,T],\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\tag{68}$$

де дійснозначні функції $\varphi_0^m,\dots,\varphi_m^m$ задовольняють наступні рівності

$$\langle\boldsymbol{u}_t^m(t)+A\boldsymbol{u}^m(t)+N\boldsymbol{u}^m(t),\boldsymbol{w}^\mu\rangle_V=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{w}^\mu)_H,\quad t\in[0,T],\tag{69}$$

$$\varphi_\mu^m(0)=(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{w}^\mu)_H,\quad \mu=\overline{0,m}.\tag{70}$$

Звернемо увагу, що функція $\boldsymbol{u}_0^m:=\sum\limits_{\mu=0}^m\varphi_\mu^m(0)\boldsymbol{w}^\mu$ задовольняє наступне

$$\boldsymbol{u}_0^m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\boldsymbol{u}_0\ \text{ сильно в }\ H.\tag{71}$$

Крім того, ортонормованість функції з $\{\boldsymbol{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$ у просторі H та нерівність Бесселя для рядів Фур'є (див. теорема 1 [15, с. 323]) передбачають, що для будь-якого $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ виконується рівність

$$|\boldsymbol{u}_0^m|_H^2=\Big|\sum_{\mu=0}^m\varphi_\mu^m(0)\boldsymbol{w}^\mu\Big|_H^2=\Big(\sum_{\mu=0}^m\varphi_\mu^m(0)\boldsymbol{w}^\mu,\sum_{\lambda=0}^m\varphi_\lambda^m(0)\boldsymbol{w}^\lambda\Big)_H=$$

$$=\sum_{\mu=0}^m\sum_{\lambda=0}^m\varphi_\mu^m(0)\varphi_\lambda^m(0)(\boldsymbol{w}^\mu,\boldsymbol{w}^\lambda)_H.$$

Ортогональність системи $\{\boldsymbol{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$ означає, що $(\boldsymbol{w}^\mu,\boldsymbol{w}^\lambda)_H=\begin{cases}1, & \text{якщо } \mu\neq\lambda,\\ 0, & \text{якщо } \mu=\lambda.\end{cases}$ Тому

$$|\boldsymbol{u}_0^m|^2=\sum_{\mu=0}^m|\varphi_\mu^m(0)|^2\le|\boldsymbol{u}_0|_H^2.\tag{72}$$

Задача (69)-(70) є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Застосуємо твердження 6 (теорему Каратеодорі-Ласалля) до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку отримуємо з (69)-(70). Позначивши

$$\varphi^m(t)=(\varphi_0^m(t),\dots,\varphi_m^m(t)),\quad M(t)=\Big((\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{w}^0)_H,\dots,(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{w}^m)_H\Big),$$

$$L_\mu(t,\varphi(t))=\langle A\boldsymbol{u}^m(t),\boldsymbol{w}^\mu\rangle_{V_1}+\langle N\boldsymbol{u}^m(t),\boldsymbol{w}^\mu\rangle_Y,\quad \mu=\overline{0,m},$$

отримаємо, що (69) – це система вигляду (22). Умови Каратеодорі для L випливають з **(A)**, **(G)** та побудови базисних функцій. Крім того, завдяки оцінці (33) з леми 9 маємо

$$(L(t,\varphi^m(t)),\varphi^m(t))_{\mathbb{R}^m}\ge a_0\sum_{i=1}^n\int_0^{\ell_i}|u_x^{m,i}(x,t)|^2\,dx+g_0\sum_{i=1}^n\int_0^{\ell_i}|u^{m,i}(x,t)|^q\,dx\ge0.$$

Тому виконується нерівність (24) з $\alpha(t)\equiv0$, $\beta(t)\equiv0$. Отже, згідно з твердженням 6 існує єдиний глобальний розв'язок $\varphi^m\in W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^m)$, де $p=2$ (бо $M\in L^2(0,T;H)$).

Помноживши обидві сторони μ-ї рівності (69) на $\varphi_\mu^m(t)$, просумувавши за μ від 0 до m та зінтегрувавши отримані рівності за часом від 0 до τ, отримуємо

$$\int\limits_0^\tau \langle \boldsymbol{u}_t^m(t) + A\boldsymbol{u}^m(t) + N\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle_V \, dt = \int\limits_0^\tau (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^m(t))_H \, dt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{73}$$

З (63) одержимо: $|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^m)_H| \le |\boldsymbol{f}|_H \cdot |\boldsymbol{u}^m|_H \le \frac{1}{2}|\boldsymbol{f}|_H^2 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}^m|_H^2$. Тоді, зінтегрувавши в рівності (73) перший доданок частинами, використавши оцінки (64) та (72), отримуємо

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}^m(\tau)|_H^2 + a_0\int\limits_0^\tau ||\boldsymbol{u}^m(t)||_{V_1}^2 \, dt + g_0\sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_{0,\tau}^i} |u^{m,i}|^q \, dxdt \le$$

$$\le \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|_H^2 \, dt + \Big(\frac{1}{2} + a_0\Big)\int\limits_0^\tau |\boldsymbol{u}^m(t)|_H^2 \, dt. \tag{74}$$

Введемо допоміжну функцію $y_m(t) = |\boldsymbol{u}^m(t)|_H^2$, $t \in [0,T]$. Тоді з нерівності (74) отримаємо таку оцінку:

$$y_m(\tau) \le |\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|^2 \, dt + (1+2a_0)\int\limits_0^\tau y_m(t) \, dt.$$

Застосувавши до цієї нерівності твердження 8, матимемо

$$y_m(\tau) \le \Big(|\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|^2 \, dt\Big)e^{(1+2a_0)\tau}, \quad \tau \in (0,T].$$

Підставивши одержану оцінку у праву частину нерівності (74), приходимо до оцінки:

$$|\boldsymbol{u}^m(\tau)|_H^2 + \int\limits_0^\tau ||\boldsymbol{u}^m(t)||_{V_1}^2 \, dt + \int\limits_0^\tau ||\boldsymbol{u}^m(t)||_Y^q \, dx \, dt \le C_7 F(\tau), \tag{75}$$

де

$$F(\tau) = |\boldsymbol{u}_0|_H^2 + \int\limits_0^\tau |\boldsymbol{f}(t)|_H^2 \, dt, \quad \tau \in [0,T]. \tag{76}$$

Тут стала $C_7 > 0$ не залежить від m. З нерівності (75) випливає, що

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[0,T]} |u^m(\tau)|_H^2 \le C_8, \tag{77}$$

$$\int\limits_0^T ||u^m(t)||_{V_1}^2 \, dt \le C_8, \tag{78}$$

$$\int\limits_0^T ||u^m(t)||_Y^q \, dt \le C_8, \tag{79}$$

де стала $C_8 > 0$ не залежить від m. Тому послідовність $\{\boldsymbol{u}^m\}_{m=0}^\infty$ є обмеженою у просторах $L^\infty(0,T;H)$ (завдяки (77)), $L^2(0,T;V_1)$ (завдяки (78)) та $L^q(0,T;Y)$ (завдяки (79)).

На підставі твердження 18, а також зважаючи на рефлексивність просторів $L^2(0,T;V_1)$ та $L^q(0,T;Y)$ (твердження 19), випливає можливість вибрати таку підпослідовність $\{\boldsymbol{u}^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\boldsymbol{u}^m\}_{m=0}^{\infty}$, що виконуються збіжності

$$\boldsymbol{u}^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;H) \quad \text{та слабко в} \quad U(Q_{0,T}).$$

Крім того, застосовуючи визначення оператора (19), умову **(G)**, співвідношення спряжених показників (13), означення простору Y^* (12) та отриману рівномірну апріорну оцінку (79), маємо

$$||N\boldsymbol{u}^m; L^{q'}(0,T;Y^*)||^{q'} = \int\limits_0^T ||N\boldsymbol{u}^m(t);Y^*||^{q'}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{\ell_i} \left| g^i|u^{m,i}(x,t)|^{q-2}u^{m,i}(x,t)\right|^{q'} dxdt = \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n (g^i)^{q'} \int\limits_0^{\ell_i} |u^{m,i}(x,t)|^{(q-1)q'}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n (g^i)^{q'} \int\limits_0^{\ell_i} |u^{m,i}(x,t)|^q\,dxdt \le (g^0)^{q'} \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{l_i} |u^{m,i}(x,t)|^q\,dxdt =$$

$$= C_9 \int\limits_0^T ||\boldsymbol{u}^m(t)||_Y^q\,dt \le C_{10},$$

де стала $C_{10} > 0$ теж не залежить від m. Тому існує таке $\chi \in L^{q'}(0,T;Y^*)$, що

$$N\boldsymbol{u}^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{слабко в} \quad L^{q'}(0,T;Y^*). \tag{80}$$

Далі, аналогічно як в [10, с. 880-881] отримуємо обмеженість послідовності $\{\boldsymbol{u}_t^m\}_{m=0}^{\infty}$ у відповідному функційному просторі. Тоді з теореми Обена (твердження 15) і тверджень 16 та 17 матимемо, що

$$\boldsymbol{u}^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{u} \quad \text{майже скрізь в} \quad Q_{0,T}.$$

Тому $\chi = N\boldsymbol{u}$ (див. позначення (80)).

Перейшовши до границі у рівності (69), з отриманих збіжностей матимемо, що функція $\boldsymbol{u}$ задовольняє умови означення 1. Теорему 20 доведено. □

Висновки. У статті розглянуто мішану задачу для півлінійного параболічного рівняння на зв'язному орієнтованому графі. Введено та досліджено відповідні функціональні простори, сформульовано поняття слабкого розв'язку задачі, що розглядається. Доведено такі результати: одержано апріорну оцінку розв'язку, встановлено його єдиність і, за допомогою методу Фаедо–Гальоркіна, доведено існування слабкого розв'язку задачі.

Конфлікт інтересів і етика. Олег Бугрій є членом редколегії даного журналу. Для уникнення конфлікту інтересів, рукопис пройшов відповідну процедуру рецензування незалежними рецензентами, а прийняття рішення про публікацію здійснювалося незалежним редактором. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Žugec B. Regularity of a parabolic differential equation on graphs. *Mathematics.* 2023. Vol. 11, No. 21: 4453. DOI: https://doi.org/10.3390/math11214453
2. Buhrii O.M. Stochastic parabolic equations on graphs. *Математичні студії.* 2026. Т. 65, № 1. С. 58–73. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.65.1.58-73
3. Li A., Chen, R., Farimani, A.B. et al. Reaction diffusion system prediction based on convolutional neural network. *Sci Rep.* 2020. Vol. 10: 3894. DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-020-60853-2
4. Gennip Y., Budd J. A prolegomenon to differential equations and variational methods on graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 2025. 100 p.
5. Avdonin S.A., Mikhaylov V.S. Controllability of partial differential equations on graphs: Preprint. arXiv:2505.20690v1. 2025. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.20690
6. Esposito A., Patacchini F.S., Schlichting A. On a class of nonlocal continuity equations on graphs. *European Journal of Applied Mathematics.* 2024. Vol. 35, No. 1. P. 109–126. DOI: https://doi.org/10.1017/S0956792523000128
7. Leoni G. A first course in Sobolev spaces. Providence, Rhode Island: AMS, 2010. 626 p. (Graduate Studies in Mathematics. Vol. 105).
8. Evans L.C. Partial differential equations. Providence, Rhode Island: AMS, 2010. 664 p. (Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19).
9. Buhrii O., Buhrii N., Kholyavka O. On Caratheodory–LaSalle's theorems for systems of ordinary differential equations and their application. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2019. Т. 27. С. 9–17.
10. Buhrii O., Buhrii N. Integro–differential systems with variable exponents of nonlinearity. *Open Mathematics.* 2017. Vol. 15, No. 1. P. 859–883. DOI: https://doi.org/10.1515/math-2017-0069
11. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. 398 p. (Lecture Notes in Physics. Vol. 127).
12. Buhrii O.M., Buhrii N.V. Doubly nonlinear elliptic–parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities. *Advances in Nonlinear Variational Inequalities.* 2019. Vol. 22, No. 2. P. 1–22.
13. Buhrii O.M., Hlynyans'ka Kh.P. Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems. *Journal of Mathematical Sciences.* 2011. Vol. 174. P. 169–189. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-011-0288-8
14. Bokalo T.M., Buhrii O.M. Doubly nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2011. Vol. 63. P. 709–728. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-011-0537-5
15. Kadets V. A course in functional analysis and measure theory. Cham: Springer, 2018. 539 p.

UDC 517.95

Semilinear parabolic equations on graphs

Oleh Buhrii, Dariia Yatseniak

Abstract. The paper considers an initial-boundary value problem for a semilinear parabolic equation on a simple connected directed graph. A weak solution to the problem is defined in the appropriate functional spaces and conditions for continuity and transmission at the graph vertices are provided. The unique solvability of the problem is proved.

Keywords: partial differential equation, parabolic equation, initial-boundary value problem, connected directed graph, weak solution.

References

1. Žugec, B. (2023). *Regularity of a parabolic differential equation on graphs,* Mathematics, **11** (21): 4453. https://doi.org/10.3390/math11214453
2. Buhrii, O.M. (2026). *Stochastic parabolic equations on graphs,* Matematychni Studii, **65** (1), 58–73. https://doi.org/10.30970/ms.65.1.58-73
3. Li, A., Chen, R., Farimani, A.B. et al. (2020). *Reaction diffusion system prediction based on convolutional neural network,* Sci. Rep., **10**: 3894. https://doi.org/10.1038/s41598-020-60853-2
4. Gennip, Y., Budd, J. (2025). *A prolegomenon to differential equations and variational methods on graphs,* Cambridge University Press.
5. Avdonin, S.A., Mikhaylov, V.S. (2025). *Controllability of partial differential equations on graphs*: Preprint, arXiv:2505.20690v1. https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.20690
6. Esposito, A., Patacchini, F.S., Schlichting, A. (2024). *On a class of nonlocal continuity equations on graphs,* European Journal of Applied Mathematics, **35** (1), 109–126. https://doi.org/10.1017/S0956792523000128
7. Leoni, G. (2010). *A first course in Sobolev spaces,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
8. Evans, L.C. (2010). *Partial differential equations,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
9. Buhrii, O., Buhrii, N., Kholyavka, O. (2019). *On Caratheodory–LaSalle's theorems for systems of ordinary differential equations and their application,* Visnyk Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inf., **27**, 9–17.
10. Buhrii, O., Buhrii, N. (2017). *Integro–differential systems with variable exponents of nonlinearity,* Open Mathematics, **15** (1), 859–883. https://doi.org/10.1515/math-2017-0069
11. Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non–homogeneous Media And Vibration Theory,* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.
12. Buhrii, O.M., Buhrii, N.V. (2019). *Doubly nonlinear elliptic–parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities,* Advances in Nonlinear Variational Inequalities, **22** (2), 1–22.
13. Buhrii, O.M., Hlynyans'ka, Kh.P. (2011). *Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems,* Journal of Mathematical Sciences, **174**, 169–189. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0288-8
14. Bokalo, T.M., Buhrii, O.M. (2011). *Doubly nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity,* Ukrainian Mathematical Journal, **63**, 709–728. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0537-5
15. Kadets, V. (2018). *A course in functional analysis and measure theory,* Springer.

Про авторів / About the authors

Олег Бугрій, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

Oleh Buhrii, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine;

Дарія Яценяк, аспірантка, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

Dariia Yatseniak, Postgraduate student, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 31.03.2026
Прийнято до друку / Accepted 04.05.2026
Опубліковано / Published 27.05.2026