ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА: НАУКА ТА ОСВІТА

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education

Електронний науковий журнал

Electronic scientific journal

До 85-ї річниці
факультету математики, фізики і комп'ютерних наук

To the 85th anniversary of the Faculty of Mathematics, Physics and Computer Sciences

Том 1, № 1

Volume 1, No. 1

Вінниця / Vinnytsia 2024

УДК [001+37.016]: [51+53+004](06) e-ISSN 3041-1955
М 34

Рекомендовано до публікації рішенням Вченої ради Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
(протокол № 14 від 19 червня 2024 р.)

Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. Вінниця: ВДПУ, 2024. Том 1, № 1. 98 с.

В журналі публікуються статті з фізико-математичних і педагогічних наук за спеціальностями: 111 Математика, 104 Фізика та астрономія, 014.04 Середня освіта (Математика), 014.08 Середня освіта (Фізика та астрономія), 014.09 Середня освіта (Інформатика), 015 Професійна освіта (за спеціалізаціями). Основні тематичні напрями: 1) актуальні проблеми математики; 2) актуальні проблеми фізики та астрономії; 3) теорія і методика навчання математики, інформатики, фізики та астрономії; 4) теорія і методика професійної освіти.

Періодичність видання – двічі на рік.
Категорія читачів – науковці, викладачі, вчителі, аспіранти і здобувачі вищої освіти.
Засновник і видавець: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського.
Рік заснування: 2024.
Ідентифікатор медіа R40-05379.
DOI: 10.31652/3041-1955.

UDC [001+37.016]: [51+53+004](06) e-ISSN 3041-1955
M 34

Recommended for publication by the decision of the Academic Council of Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University
(prot. No. 14, 19.06.2024)

Editorial Team

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education. Vinnytsia: VSPU, 2024. Volume 1, No. 1. 98 p.

The journal publishes articles on physical, mathematical and pedagogical sciences in the following specialties: 111 Mathematics, 104 Physics and Astronomy, 014.04 Secondary Education (Mathematics), 014.08 Secondary Education (Physics and Astronomy), 014.09 Secondary Education (Computer Science), 015 Vocational Education (by specialization). Main thematic areas: 1) actual problems of mathematics; 2) actual problems of physics and astronomy; 3) theory and methods of teaching mathematics, computer science, physics and astronomy; 4) theory and methods of vocational education.

Publication Frequency: twice a year.
The category of readers is scientists, lecturers, teachers, graduate students and higher education students.
Founder and publisher: Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University.
Year of foundation: 2024.
Media Identifier R40-05379.
DOI: 10.31652/3041-1955.

ЗМІСТ / CONTENTS

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ / ACTUAL PROBLEMS OF MATHEMATICS

Сергій Бак, Галина Ковтонюк / Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk
ІСНУВАННЯ НАДЗВУКОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ҐОРДОНА З НЕЛОКАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ / Existence of supersonic periodic traveling waves in discrete Klein-Gordon type equations with nonlocal interaction…… 1-12

Олег Бугрій, Наталія Бугрій, Віталій Власов / Oleh Buhrii, Nataliya Buhrii, Vitaliy Vlasov
ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИЙ СТОХАСТИЧНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕЛІ-ВІНЕРА-ЗИГМУНДА / On stochastic space-time Paley-Wiener-Zygmund integral…… 13-26

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ / ACTUAL PROBLEMS OF PHYSICS AND ASTRONOMY

Анатолій Відьмаченко, Олександр Мозговий, Олексій Стєклов / Anatoliy Vidmachenko, Oleksandr Mozghovyi, Oleksii Steklov
ВЕРТИКАЛЬНІ ПРОВАЛЕНІ ОТВОРИ ДО ВУЛКАНІЧНИХ ПЕЧЕР НА ПОВЕРХНІ МАРСА / Vertical sinkholes to volcanic caves on the surface of Mars…… 27-35

Тарас Січкар, Максим Рокицький, Галина Рокицька, Людмила Благодаренко, Микола Шут / Taras Sichkar, Maksym Rokytskyi, Halyna Rokytska, Liudmyla Blagodarenko, Mykola Shut
ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАНОКОМПОЗИТІВ ПХТФЕ-ТРГ ТА ПХТФЕ-ТРГ/SIO_2 / Physical properties of PCTFE-TEG and PHTFE-TEG/SiO_2 nanocomposites …… 36-47

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ / THEORY AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, PHYSICS AND ASTRONOMY

Михайло Білик, Євгенія Калашнікова, Ігор Калашніков / Bilyk Mykhailo, Yevheniia Kalashnikova, Igor Kalashnikov
ПРОБЛЕМИ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В МЕЖАХ РЕАЛІЗАЦІЇ КОНЦЕПЦІЇ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ / Problems of learning mathematics within the framework of the implementation of the concept of the New Ukrainian School…… 48-55

Олена Косовець, Олена Соя, Ярослав Крупський / Olena Kosovets, Olena Soia, Yaroslav Krupskyi
МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ІНФОРМАТИКИ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ: АНАЛІЗ ПОСІБНИКІВ З ВЕБТЕХНОЛОГІЙ / Methods of Teaching Informatics in a Specialised School: Analysis of Web Technology Textbook…… 56-62

Анатолій Сільвейстр, Микола Моклюк, Марія Копитко / Anatolii Silveistr, Mykola Mokliuk, Maria Kopytko
ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З МЕТОЮ ПІДВИЩЕННЯ ІНТЕРЕСУ УЧНІВ ДО ВИВЧЕННЯ ФІЗИКИ / Use of computer simulation tools with the purpose of increasing students' interest in the study of physics…… 63-74

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ / THEORY AND METHODS OF VOCATIONAL EDUCATION

Мар'яна Ковтонюк, Олена Соя, Оксана Туржанська, Олена Косовець, Іванна Леонова / Marianna Kovtoniuk, Olena Soia, Oksana Turzhanska, Olena Kosovets, Ivanna Leonova
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ЯК ЕЛЕМЕНТ ОСВІТНЬОГО ПРОСТОРУ БАКАЛАВРА МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ В УКРАЇНІ / Textbook as an element of the educational space of a bachelor of mathematics in the conditions of blended learning in Ukraine…… 75-88

Альона Коломієць / Alona Kolomiiets
ПРОФЕСІЙНА СПРЯМОВАНІСТЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ У КОНТЕКСТІ ФУНДАМЕНТАЛІЗАЦІЇ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ / Professional orientation of mathematical training of technical specialty students in the context of fundamentalization of the educational process…… 89-98

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

Actual problems of mathematics

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 1–12.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 1–12.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.97

Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона з нелокальною взаємодією

Сергій Бак[1], Галина Ковтонюк[2]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
sergiy.bak@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-1508-2144

[2]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна
kovtonyukgm@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3352-0358

Анотація. Стаття присвячена дискретним рівнянням типу Клейна–Ґордона, які описують нескінченні ланцюги нелінійних осциляторів з нелокальною взаємодією. Це означає, що кожен осцилятор взаємодіє з декількома своїми сусідами з обох обоків. Основний результат статті стосується існування періодичних біжучих хвиль в таких рівняннях. Достатні умови існування таких хвиль встановлено за допомогою варіаційного методу і теореми про гірський перевал.

Ключові слова: періодичні біжучі хвилі, рівняння типу Клейна–Ґордона, нелокальна взаємодія, критичні точки, теорема про гірський перевал.

1. Вступ

У цій статті будемо вивчати дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона з нелокальною взаємодією

$$\ddot{q}_n(t) - \sum_{j=1}^{l} c_j[q_{n+j}(t) + q_{n-j}(t) - 2q_n(t)] - dq_n(t) + f(q_n(t)) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-01

.

де $f(r) = V'(r)$ — неперервна функція на $\mathbb{R}$, $c_j, d > 0$, $j = 1, 2, ..., l$. Зауважимо, що рівняння (1) є зліченною системою звичайних диференціальних рівнянь та описують динаміку ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з нелокальною взаємодією кожного n-го осцилятора з l своїми найближчими сусідами з кожного боку та зовнішнім потенціалом V. Тут $q_n(t)$ позначає узагальнену координату n-го осцилятора в момент часу t.

Такі системи належать до широкого класу так званих дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем. Їх прикладами також є системи типу Фермі–Пасти–Улама і дискретні рівняння типу синус–Ґордона. Подібні системи представляють інтерес, в тому числі, з огляду на їх фізичні застосування (див. [1, 9, 10, 13, 18]). Зокрема, в останніх двох працях вивчалися дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона.

Також є багато праць, в яких такі системи вивчаються з математичної точки зору. Так в статтях [2, 3, 4, 7, 12, 14, 21, 23, 24, 25] досліджувалося питання існування біжучих хвиль, зокрема, періодичних, в системах лінійно і нелінійно зв'язаних осциляторів з локальним зв'язком на одновимірній і двовимірній ґратках. Тут розглядалися моделі, в яких осцилятори зв'язані з найближчими своїми сусідами. Умови існування періодичних біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама з локальною і нелокальною взаємодією, як на одновимірній, так і на двовимірній ґратках, встановлено в працях [5, 6, 15, 16, 19, 26] та ін. В статті [27] досліджено умови існування періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона на двовимірній ґратці. Для неперервного рівняння типу Клейна–Ґордона в [8] вивчалися біжучі хвилі, а в [11] — стоячі хвилі. Питання існування останніх для дискретних рівнянь типу Клейна–Гордона з насичуваними нелінійностями вивчено в статті [28], а зі степеневими нелінійностями — в [29].

2. Постановка задачі та основні припущення

Нас цікавлять розв'язки системи (1) у вигляді *біжучих хвиль:*

$$q_n(t) = u(n - ct), \tag{2}$$

де функцію $u(s)$ називають *профільною функцією* або *профілем* хвилі, при цьому стала $c \neq 0$ є *швидкістю* хвилі.

Тоді, підставивши (2) в (1), отримуємо рівняння

$$c^2 u''(s) - \sum_{j=1}^{l} c_j[u(s+j) + u(s-j) - 2u(s))] - du(s) + V'(u(s)) = 0, \tag{3}$$

де $s = n - ct$.

Будемо вивчати періодичні розв'язки рівняння (3), які задовольняють умову

$$u(s + 2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $k > 0$ — деяке фіксоване число.

Щодо потенціалу V зробимо таке припущення:

(h) $V \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $V(0) = V'(0) = 0$, $V'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \leq V'(r)r, \quad r \neq 0.$$

Зауважимо, що за виконання умови (h) існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\nu(r)$, $r \geq 0$ (див. [22], Лема 3.2), що

$$\nu(0) = 0, \lim_{r \to +\infty} \nu(r) = +\infty$$

і

$$V'(r)r \leq \nu(|r|)r^2. \tag{5}$$

Розглянемо множину

$$\Omega := \left\{ c > 0 \mid \min_{\xi \in \mathbb{R}} \sigma(\xi) \geq 0 \right\},$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4\sum_{j=1}^{l} c_j \sin^2 \frac{j\xi}{2} + d.$$

При $d > 0$ множина Ω непорожня.

Введемо величину

$$c_0 := \inf_{c>0} \Omega,$$

яку будемо називати *швидкістю звуку* в даній системі.

3. Варіаційне формулювання задачі

У певному розумінні рівняння (3) є рівнянням Ейлера-Лагранжа для функціоналу дії

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} \frac{c_j}{2}|u(s+j) - u(s)|^2 + \frac{d}{2}|u(s)|^2 - V(u(s)) \right\} ds, \tag{6}$$

який визначений на соболєвському просторі періодичних функцій

$$E_k := \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \mid u(s + 2k) = u(s))\}$$

з нормою

$$\|u\|_k = \left(\int_{-k}^{k} \left[|u(s)|^2 + |u'(s)|^2 \right] ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються такі три леми (див. [22], Леми 4.2–4.4):

Лема 1. *За зроблених припущень функціонал J_k є неперервно-диференційовним на просторі E_k, а його похідна визначається формулою*

$$J_k'(u)h =$$

$$= \int_{-k}^{k} \left\{ c^2u'(s)h'(s) + \sum_{j=1}^{l} c_j[u(s+j) + u(s-j) - 2u(s)]h(s) + du(s)h(s) - V'(u(s))h(s) \right\} ds,$$

де $u, h \in E_k$.

Лема 2. *За зроблених припущень критичні точки функціоналу J_k є є розв'язками рівняння (3), що задовольняють умову (4).*

Запишемо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - S_k(u),$$

де

$$\Psi_k(u) = \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j) - u(s)|^2 + d|u(s)|^2 \right\} ds,$$

$$S_k(u) = \int_{-k}^{k} V(u(s))ds.$$

Лема 3. *Нехай $c > c_0$. Тоді виконуються нерівності*

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \le \Psi_k(u) \le \lambda_1\|u\|_k^2, \tag{7}$$

де

$$\lambda_0 = \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2},\ \lambda_1 = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2}.$$

Лема 4. *Нехай виконується умова (h) і $c > c_0$. Тоді існують такі додатні сталі ε_0 і γ, незалежні від k, що для ненульових критичних точок функціоналу J_k виконуються нерівності*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le \gamma J_k(u). \tag{8}$$

Доведення. Нехай $u \in E_k$ — критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u) = 0$ і за умовою (h) маємо

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{\mu}J_k'(u)u =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int_{-k}^{k} \left\{ c^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j) - u(s)|^2 + d|u(s)|^2 \right\} ds -$$

$$- \int_{-k}^{k} \left\{ V(u(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u(s))u(s) \right\} ds \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\Psi_k(u).$$

Враховуючи лему 3, маємо

$$J_k(u) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\lambda_0\|u\|_k^2.$$

Звідки отримуємо праву нерівність.

Доведемо тепер ліву нерівність. Оскільки для критичної точки $u \in E_k : J_k'(u)u = 0$, то

$$\int_{-k}^{k} \left\{ c^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j) - u(s)|^2 + d|u(s)|^2 \right\} ds = \int_{-k}^{k} V'(u(s))ds.$$

Тоді, як і вище,

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \le \int_{-k}^{k} V'(u(s))ds,$$

і, враховуючи нерівність (5), одержуємо, що

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \le \nu\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^2 ds.$$

За теоремою вкладення, $\|u\|_{C([-k,k])} \le C\|u\|_k$ зі сталою C, незалежною від k.

Таким чином, $\lambda_0\|u\|_k^2 \le \nu\left(C\|u\|_k\right)\|u\|_k^2$. Оскільки $u \ne 0$, то $\nu\left(C\|u\|_k\right) \ge \lambda_0$, звідки одержуємо ліву нерівність з $\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1}\nu^{-1}(\lambda_0)$.

Лему доведено. □

Для доведення основного результату статті знадобиться теорема про гірський перевал, за допомогою якої встановимо існування нетривіальних (ненульових) критичних точок функціоналу J_k. Останні, згідно леми 2, і є шуканими періодичними біжучими хвилями.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1.

Означення 5. Кажуть, що функціонал I задовольняє *умову Пале–Смейла*, якщо виконується така умова:

(PS) *якщо* $\{u_n\} \subset H$ *така послідовність, що* $\{I(u_n)\}$ *обмежена та* $I'(u_n) \to 0$, $n \to \infty$, *то* $\{u_n\}$ *містить збіжну підпослідовність.*

Зауважимо, що оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність, то без обмеження загальності можна вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається.

Означення 6. Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b, якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Означення 7. Кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію гірського перевалу,* якщо існують $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \ge I(e).$$

Наведемо теорему про гірський перевал (див. [15, 17, 20]).

Твердження 8. ***(Теорема про гірський перевал).*** *Нехай на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$ заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1, який задовольняє умову Пале–Смейла та геометрію гірського перевалу. Тоді існує критична точка $u \in H$ функціоналу I така, що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \ge \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. *При цьому*

$$I(u) \le \sup_{\tau\ge 0} I(\tau e).$$

4. Основний результат

Основним результатом цієї статті є теорема:

Теорема 9. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c > c_0$. *Тоді для будь-якого* $k > 0$ *рівняння (3) має ненульовий розв'язок* u, *який задовольняє умову (4). Крім того, існують додатні сталі* ε_0, ε, C *і* C_0, *незалежні від* k, *такі, що виконуються нерівності*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le C_0, \quad \varepsilon \le J_k(u) \le C. \tag{9}$$

Більше того, для досить великих значень k *цей розв'язок не є сталим.*

Покажемо, що для функціоналу J_k виконуються умови теореми про гірський перевал.

Лема 10. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c > c_0$. *Тоді функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Позначимо для функціоналу J_k послідовність Пале-Смейла на деякому рівні b через $\{u_n\}$. Легко бачити, що $\|J_k'(u_n)\|_{k,*} \le 1$ і $|J_k(u_n)| \le b+1$ для всіх досить великих n, а отже, для таких n

$$b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \ge J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}J_k'(u_n)u_n =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left\{ c^2|u_n'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u_n(s+j) - u_n(s)|^2 + d|u_n(s)|^2 \right\} ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s)) \right\} ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \Psi_k(u_n) + \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s)) \right\} ds \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \lambda_0 \|u_n\|_k^2.$$

З останньої нерівності робимо висновок, що послідовності $\{u_n\}$ є обмеженою. А отже, переходячи до підпослідовності з тим самим позначенням, $u_n \to u$ слабко в E_k. В силу компактності вкладення $E_k \subset C([-k,k])$, $u_n \to u$ сильно в $C([-k,k])$.

Тоді для будь-яких натуральних n і m маємо

$$(J_k'(u_n) - J_k'(u_m))(u_n - u_m) =$$

$$= \Psi_k(u_n - u_m) - \int\limits_{-k}^{k} \{V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))\} ds.$$

Звідки, в силу нерівностей (8), отримуємо

$$(J_k'(u_n) - J_k'(u_m))(u_n - u_m) \ge \lambda_0\|u_n - u_m\|_k^2 - \int\limits_{-k}^{k} \{V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))\} ds,$$

тобто

$$\lambda_0\|u_n-u_m\|_k^2 \le (J_k'(u_n)-J_k'(u_m))(u_n-u_m)+\int\limits_{-k}^{k}\{V'(u_n(s))-V'(u_m(s))\}ds. \qquad (10)$$

Оскільки при $n, m \to \infty$, $u_n - u_m \to 0$ слабко в E_k, а $J_k'(u_n) \to 0$ сильно в E_k^*, то перший доданок в правій частині нерівності (10) прямує до нуля. Крім того, $u_n \to u$ в $C([-k,k])$. Тоді підінтегральний вираз в правій частині тієї ж нерівності прямує до нуля рівномірно на $[-k,k]$. А отже, другий доданок в правій частині також прямує до нуля. Звідси маємо, що й ліва частина нерівності (10) прямує до нуля, тобто $\|u_n-u_m\|_k \to 0$ при $n, m \to \infty$. А це означає, що $\{u_n\}$ — фундаментальна послідовність в E_k і, отже, $u_n \to u$ сильно в E_k.

Лему доведено. □

Лема 11. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c > c_0$. *Тоді функціонал* J_k *задовольняє геометрію гірського перевалу.*

Доведення. Розіб'ємо доведення леми на два кроки.

Крок 1. Покажемо, що за виконання умов леми існують такі додатні сталі r_0 і α_0, незалежні від k, що

$$\inf_{\|u\|_k=r_0} J_k(u) > \alpha_0.$$

Справді, за нерівністю (5), враховуючи умову (h), маємо

$$V(r) \le \mu^{-1}\nu(|r|)r^2.$$

Тоді

$$J_k(u)=\frac{1}{2}\Psi_k(u)-\int\limits_{-k}^{k}V(u(s))ds \ge$$

$$\ge \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2-\frac{1}{\mu}\int\limits_{-k}^{k}\nu(|u(s)|)(u(s))^2ds \ge \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2-\frac{1}{\mu}\nu\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\|u\|_{L^2(-k,k)}^2 \ge$$

$$\ge \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2-\frac{1}{\mu}\nu\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\|u\|_k^2.$$

Проте за теоремою вкладення, $\|u\|_{C([-k,k])} \le C\|u\|_k$. Тому

$$J_k(u) \ge \left(\frac{\lambda_0}{2}-\frac{1}{\mu}\nu(C\|u\|_k)\right)\|u\|_k^2.$$

Далі вибираємо $r_0 > 0$ таким, що $\frac{1}{\mu}\nu(Cr_0)=\frac{\lambda_0}{4}$. Тоді, якщо $\|u\|_k = r_0$, то

$$J_k(u) \ge \frac{\lambda_0 r_0^2}{4},$$

що й дає необхідне.

Крок 2. Для доведення леми залишається показати, що за виконання її умов існує елемент $e \in E_k$ з нормою $\|e\|_k > r_0$ такий, що $J_k(e) \le 0$.

Справді, нехай $u \in E_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. З умови (h) випливає, що існують такі сталі $a > 0$ та $a_0 \ge 0$, що для всіх r

$$V(r) \ge a|r|^\mu - a_0.$$

Тоді

$$J_k(ru) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}\left\{c^2r^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j r^2|u(s+j)-u(s)|^2 + dr^2|u(s)|^2\right\}ds-$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} V(ru(s))ds \le$$

$$\le \frac{r^2}{2}\int\limits_{-k}^{k}\left\{c^2|u'(s)|^2 - \sum_{j=1}^{l} c_j|u(s+j)-u(s)|^2 + d|u(s)|^2\right\}ds-$$

$$-ar^{\mu}\int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^{\mu} + 2ka_0.$$

Враховуючи, що $\mu > 2$, $J_k(ru) \to -\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, існує таке $r_0 = r_0(u) > 0$, що $J_k(ru) \le 0$ для всіх $r > r_0$.

Лему доведено. □

Доведення теореми 9. З лем 10 та 11, випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал, а отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2 вона є розв'язком рівняння (3), який задовольняє умову(4).

Нижні оцінки (9) для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають з нерівностей (8). З теореми про гірський перевал маємо, що $J_k(u) \le \sup\limits_{\tau\ge 0} J_k(\tau e) = C$, звідки, враховуючи знову (8), отримуємо верхню оцінку і для $\|u\|_k$.

І на завершення методом від супротивного доведемо, що цей розв'язок не є сталим для досить великих k. Дійсно, припустимо, що $u(s) = a > 0$ сталий розв'язок рівняння (3) (доведення у випадку $a < 0$ аналогічне). Підставивши його в рівняння (3) одержуємо, що $da - V'(a) \equiv 0$. За умовою (h): $V'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, а тому знайдеться таке $a_0 > 0$, що $dr - V'(r) > 0$ при $0 < r < a_0$. Зазначимо, що з умови (h) випливає, що $V'(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, згідно теореми про проміжне значення сталий розв'язок існує. Отже, $a \ge a_0$. Тоді $\|u\|_k = (2k)^{\frac{1}{2}}|a| \ge (2k)^{\frac{1}{2}}|a_0| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, а це суперечить верхній оцінці для $\|u\|_k$ в (9). Одержана суперечність і доводить необхідне.

Теорему доведено. □

Висновки. Таким чином, в даній статті встановлено умови існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в дискретних рівнняннях типу Клейна–Ґордона, які описують нескінченні ланцюги лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з нелокальною їх взаємодією. Перспективи подальших досліджень вбачаємо у встановленні існування дозвукових періодичних і надзвукових відокремлених біжучих хвиль в таких рівняннях.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють про відсутність конфліктів інтересів і повне дотримання всіх правил етики журнальних статей.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D.* 1997. Vol. 103. P. 201–250. DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-2789(96)00261-8
2. Bak S. Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice. *Archivum Mathematicum.* 2022. Vol. 58, № 1. P. 1–13. DOI: https://doi.org/10.5817/AM2022-1-1
3. Bak S. Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.* 2022. Vol. 91, № 3. P. 225–234.
4. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D-lattice with saturable nonlinearities. *J. Math. Sci.* 2022. Vol. 260, № 5. P. 619–629. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-022-05715-0
6. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. *Mat. Stud.* 2023. Vol. 60, № 2. P. 180-190. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.60.2.180-190
7. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4. P. 916–920. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-011-0310-1
8. Bates P., Zhang C. Traveling pulses for the Klein–Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2006. Vol. 16, № 1. P. 235–252. DOI: https://doi.org/10.3934/dcds.2006.16.235
9. Braun O. M., Kivshar Y. S. Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. *Physics Reports.* 1998. Vol. 306. P. 1–108. DOI: https://doi.org/10.1016/S0370-1573(98)00029-5
10. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel–Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
11. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2013. Vol. 33, № 6. P. 2389–2401. DOI: https://doi.org/10.3934/dcds.2013.33.2389
12. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464. DOI: https://doi.org/10.1007/s002200050821
13. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D.* 2006. Vol. 216. P. 327–345. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.03.012
14. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices. *Nonlinear Analysis.* 2011. Vol. 74. P. 2071–2086. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.011
15. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta—Ulam Lattices. London—Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
16. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097–2113. DOI: https://doi.org/10.3934/dcdss.2019135
17. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence, R. I.: American Math. Soc. 1986. 100 p.
18. Rapti Z. Multibreather stability in discrete Klein–Gordon equations: Beyond nearest neighbor interactions. *Physics Letters A.* 2013. Vol. 377. P. 1543–1553. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.04.035
19. Wattis J. A. D. Approximations to solitary waves on lattices: III. The monoatomic lattice with second-neighbour interaction. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. Vol. 29. P. 8139–8157. DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/24/035
20. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser. 1996. 162 p.
21. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії.* 2006. Т. 26, № 2. С. 140–153.
22. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
23. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2014. Вип. 10. С. 17–23.

24. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2015. Вип. 12. С. 5–12.
25. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2011. Т. 35, № 1. С. 60–65.
26. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76–88.
27. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2013. Вип. 9. С. 5–10.
28. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки. 2021. Вип. 22. С. 5-19. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2021-22.5-19
29. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету.* Серія: Математика та інформатика. 2021. Том 39, № 2. С. 7-21. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).7-21

UDC 517.97

Existence of supersonic periodic traveling waves in discrete Klein–Gordon type equations with nonlocal interaction

Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk

Abstract. The article is devoted to discrete Klein-Gordon type equations that describe infinite chains of nonlinear oscillators with nonlocal interactions. This implies that each oscillator interacts with several of its neighbors on both sides. The main result of the article concerns the existence of periodic traveling waves in such equations. Sufficient conditions for the existence of such waves were established using the variational method and the mountain pass theorem.

Keywords: periodic traveling waves, Klein-Gordon type equations, nonlocal interaction, critical points, mountain pass theorem.

References

1. Aubry, S. (1997). *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization,* Physica D., **103**, 201–250. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(96)00261-8
2. Bak, S. (2022). *Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice,* Archivum Mathematicum, **58** (1), 1–13. https://doi.org/10.5817/AM2022-1-1
3. Bak, S. (2022). *Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice,* Acta Mathematica Universitatis Comenianae, **91** (3), 225–234.
4. Bak, S. M. (2007). *Peridoc traveling waves in chains of oscillators,* Communications in Mathematical Analysis, **3** (1), 19–26.
5. Bak, S. M., Kovtonyuk, G. M. (2022). *Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D-lattice with saturable nonlinearities,* J. Math. Sci., **260** (5), 619–629. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05715-0
6. Bak, S. M., Kovtonyuk, G. M. (2023). *Periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice,* Mat. Stud., **60** (2), 180-190. https://doi.org/10.30970/ms.60.2.180-190
7. Bak, S. N., Pankov, A. A. (2011). *Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices,* J. Math. Sci., **174** (4), 916–920. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0310-1
8. Bates, P., Zhang, C. (2006). *Traveling pulses for the Klein–Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **16** (1), 235–252. https://doi.org/10.3934/dcds.2006.16.235

9. Braun, O. M., Kivshar, Y. S. (1998). *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model,* Physics Reports, **306**, 1–108. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(98)00029-5
10. Braun, O. M., Kivshar, Y. S. (2004). *The Frenkel–Kontorova model,* Springer, Berlin, 2004.
11. Ghimenti, M., Le Coz, S., Squassina, M. (2013). *On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime,* Discr. Cont. Dyn. Sys., **33** (6), 2389–2401. https://doi.org/10.3934/dcds.2013.33.2389
12. Iooss, G., Kirschgässner, K. (2000). *Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators,* Commun. Math. Phys., **211**, 439–464. https://doi.org/10.1007/s002200050821
13. Iooss, G., Pelinovsky, D. (2006). *Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices,* Physica D, **216**, 327–345. https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.03.012
14. Makita, P. D. (2011). *Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices,* Nonlinear Analysis, **74**, 2071–2086. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.011
15. Pankov, A. (2005). *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta—Ulam Lattices,* Imperial College Press, London-–Singapore.
16. Pankov, A. (2019). *Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction,* Discr. Cont. Dyn. Sys., **12** (7), 2097–2113. https://doi.org/10.3934/dcdss.2019135
17. Rabinowitz, P. (1986). *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,* American Math. Soc., Providence, R. I.
18. Rapti, Z. (2013). *Multibreather stability in discrete Klein–Gordon equations: Beyond nearest neighbor interactions,* Physics Letters A, **377**, 1543–1553. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.04.035
19. Wattis, J. A. D. (1996). *Approximations to solitary waves on lattices: III. The monoatomic lattice with second-neighbour interaction,* J. Phys. A: Math. Gen., **29**, 8139–8157. https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/24/035
20. Willem, M. (1996). *Minimax theorems,* Birkhäuser, Boston.
21. Bak, S. M. (2006). *Traveling waves in chains of oscillators,* Mat. Stud., **26** (2), 140–153. [in Ukrainian]
22. Bak, S. M. (2020). *Discrete infinite-dimensional Hamiltonian systems on a two-dimensional lattice, Doctor's thesis,* VSPU, Vinnytsia. [in Ukrainian]
23. Bak, S. M. (2014). *Existence of subsonic periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice,* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **10**, 17–23. [in Ukrainian]
24. Bak, S. M. (2015). *Existence of supersonic periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice,* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **12**, 5–12. [in Ukrainian]
25. Bak, S. M. (2011). *Existence of periodic traveling waves in a system of nonlinear oscillators placed on a two-dimensional lattice,* Mat. Stud., **35** (1), 60–65. [in Ukrainian]
26. Bak, S. M. (2012). *Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam system on a two-dimensional lattice,* Mat. Stud., **37** (1), 76–88. [in Ukrainian]
27. Bak, S. M. (2013). *Periodic traveling waves in discrete sine-Gordon equation on a two-dimensional lattice,* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **9**, 5–10. [in Ukrainian]
28. Bak, S. M. (2021). *Standing waves in discrete Klein–Gordon type equations with saturable nonlinearities.* Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences, **22**, 5-19. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2021-22.5-19
29. Bak, S. M. (2021). *Standing waves in discrete Klein–Gordon type equations with power nonlinearities,* Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, **39** (2), 7-21. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).7-21

Про авторів / About the authors

Сергій Бак, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Serhii Bak, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Галина Ковтонюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Halyna Kovtoniuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 01.04.2024
Доопрацьовано / Revised 12.05.2024

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 13–26.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 13–26.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 519.21

Просторово-часовий стохастичний інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда

Олег Бугрій[1], Наталія Бугрій[2], Віталій Власов[3]

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
oleh.buhrii@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1698-5559

[2] Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна
nataliia.v.buhrii@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1554-7303

[3] Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна
vitaly.vlasov@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0003-8007-2900

Анотація. В статті розглянуто один з варіантів стохастичного інтегралу від невипадкової функції багатьох змінних за випадковим вінерівським процесом. Наведено означення такого інтегралу та доведено деякі його елементарні властивості.

Ключові слова: стохастичний інтеграл, інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда, випадковий процес Вінера.

1. Вступ

Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – імовірністний простір, тобто, $\mathbb{S}$ – деяка непорожня множина (простір елементарних подій), $\mathcal{F}$ – σ-алгебра підмножин $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}$ – імовірністна міра на $\mathbb{S}$. Нагадаємо, що підмножина $A \subset \mathbb{S}$ називається *подією*, точка $\omega \in \mathbb{S}$ – *елементарною подією*, а $\mathbb{P}(A)$ позначає *ймовірність* події A. Якщо деяка властивість виконується з ймовірністю одиниця, то традиційно писатимемо, що вона виконується *майже напевно (м.н.)*.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-02

.

Зафіксуємо числа $T > 0$ та $n, d \in \mathbb{N}$. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з ліпшицевою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$, $\Pi_{0,T} = \Omega \times (0,T) \times \mathbb{S}$, $\Theta_{0,T} = (0,T) \times \mathbb{S}$. Метою статті є введення одного з варіантів стохастичного інтегралу

$$\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega) \tag{1}$$

за вінерівським процесом $W = W(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \Theta_{0,T}$, та вивчення його властивостей.

Отримані результати, зокрема, узагальнюють факти з [1] та [2], де було розглянуто випадок незалежності підінтегральної функції від просторової змінної x.

2. Постановка задачі

При моделювання багатьох явищ оточуючої дійсності слід враховувати випадковий характер чинників, що впливають на явище. Для ілюстрації цієї тези розглянемо дуже спрощену математичну модель процесу руху, наприклад, човна озером вздовж прямої у вітряну погоду. Введемо одновимірну систему координат так, щоб її додатний напрям співпадав з напрямком руху човна. Нехай $\eta(t)$ – відстань човна в час $t \geq 0$ від деякої початкової точки. “Тяглова сила”, тобто мотор або весла, забезпечує в безвітряну погоду човну задану швидкість $\mu(t)$. Тоді рух човна, тобто його положення стосовно початку координат, описується задачею Коші для звичайного диференціального рівняння (ЗДР)

$$\eta'(t) = \mu(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\eta(0) = \eta_0. \tag{3}$$

Зрозуміло, що розв'язком (2)-(3) є $\eta(t) = \eta_0 + \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau$, $t \geq 0$. Проте, якщо присутні різкі пориви вітру, то рівняння руху (2) слід модифікувати, наприклад, до вигляду

$$\eta'(t) = \mu(t) + h(t)W'(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

де вираз $h(t)W'(t)$ відповідає за швидкість вітру. Причому h дійснозначна функція, а W' – випадкова величина, так званий, білий шум (сталої швидкості вітру, фактично, нема), який ми (формально!) вважаємо похідною деякої випадкової функції – вінерівського процесу $W = W(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \Theta_{0,T}$. Формальний розв'язок задачі (4), (3) теж буде випадковим процесом і матиме вигляд

$$\eta(t,\omega) = \eta_0 + \int\limits_0^t \mu(t)\, dt + \int\limits_0^t h(t)\, dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{5}$$

останній інтеграл в якому є, наприклад, стохастичним інтегралом Іто від детермінованої (тобто, не випадкової) функцій h за вінерівським процесом W.

Стохастичне диференціальне рівняння (СДР) вигляду (4) є певним узагальненням ЗДР (2). Якщо замість ЗДР розглянути рівняння з частинними похідними (РЧП) для знаходження деякої функції $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$, то його природним узагальненням є стохастичне рівняння з частинними похідними (СРЧП), при дослідженні якого треба працювати, зокрема, з інтегралами вигляду (1). Тому тематика статті є актуальною.

Оскільки поняття інтегралу за випадковим процесом можна ввести по-різному (див., наприклад, [3]), то ми зосередимо свою увагу на випадку, коли в (1) функція h є детермінованою, а функція W є стандартним вінерівським процесом (див. далі) в сенсі означення з [1]. Розглянемо питання про коректність введеного інтегралу та наведемо деякі його елементарні властивості.

3. Допоміжні позначення, означення і твердження

Розіб'ємо цей підрозділ на кілька частин і почнемо вивчення зазначених вище питань з нагадування необхідних нам далі понять та властивостей.

Стандартні простори Лебега інтегровних функцій. Нехай $(\mathbb{S}_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ – σ-скінченний вимірний простір. Через $L^q(\mathbb{S}_1)$ позначатимемо *стандартний простір Лебега* дійснозначних функцій $z : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}$ зі стандартною нормою (див. [4]), де $q \in [1, \infty]$. Нагадаємо, зокрема, що при $q = 2$ простір $L^2(\mathbb{S}_1)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(z, v)_{L^2(\mathbb{S}_1)} := \int\limits_{\mathbb{S}_1} z(x)v(x)\, d\mu_1(x), \quad z, v \in L^2(\mathbb{S}_1), \tag{6}$$

та відповідною нормою

$$||z||_{L^2(\mathbb{S}_1)} := \Big(\int\limits_{\mathbb{S}_1} |z(x)|^2\, d\mu_1(x)\Big)^{1/2}, \quad z \in L^2(\mathbb{S}_1).$$

Для деякого банахового простору $(Y, ||\cdot||_Y)$ через $L^q(\mathbb{S}_1; Y)$ позначатимемо відповідних *простір Лебега-Бохнера* Y-значних функцій $u : \mathbb{S}_1 \to Y$ зі стандартною нормою (див. [5, §8.2]). Для кожного $u \in L^q(\mathbb{S}_1; Y)$ визначено такий Y-значний інтеграл Бохнера:

$$\int\limits_{\mathbb{S}_1} u(x)\, d\mu_1(x) \in Y.$$

У випадку $\mathbb{S}_1 = [0, T]$ для спрощення писатимемо $L^q(0, T; Y)$ замість $L^q([0, T]; Y)$ і т.д. Ми використовуватимемо такі відомі факти.

Твердження 1. *(нерівність Гельдера, [4, с. 92]). Нехай $q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Тоді якщо $f \in L^q(\mathbb{S}_1)$ та $g \in L^{q'}(\mathbb{S}_1)$, то $fg \in L^1(\mathbb{S}_1)$ та*

$$\int\limits_{\mathbb{S}_1} |f(x)g(x)|\, d\mu_1(x) \le ||f; L^q(\mathbb{S}_1)|| \cdot ||g; L^{q'}(\mathbb{S}_1)||. \tag{7}$$

Нехай $(\mathbb{S}_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ – деякий інший σ-скінченний вимірний простір. Тоді ми стандартним чином можемо визначити вимірний простір $(\mathbb{S}_3, \mathcal{F}_3, \mu_3)$ для декартового добутку просторів $\mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$.

Твердження 2. *(теорема Тонеллі, [4, с. 91]). Якщо $F(x, y) : \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2 \to \mathbb{R}$ є вимірною функцією, $\int_{\mathbb{S}_2} |F(x, y)|\, d\mu_2(y) < \infty$ майже для всіх (м.д.в.) $x \in \mathbb{S}_1$ та виконується оцінка $\int_{\mathbb{S}_1} (\int_{\mathbb{S}_2} |F(x, y)|\, d\mu_2(y))\, d\mu_1(x) < \infty$, то $F \in L^1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2)$.*

Твердження 3. *(теорема Фубіні, [4, с. 91]). Нехай $F \in L^1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2)$. Тоді*

1) $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{S}_2)$ м.д.в. $x \in \mathbb{S}_1$ та $\int_{\mathbb{S}_2} F(x, y)\, d\mu_2(y) \in L^1(\mathbb{S}_1)$;

2) $F(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{S}_1)$ м.д.в. $y \in \mathbb{S}_2$ та $\int_{\mathbb{S}_1} F(x, y)\, d\mu_1(x) \in L^1(\mathbb{S}_2)$;

3) виконується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{S}_1} d\mu_1(x) \int\limits_{\mathbb{S}_2} F(x, y)\, d\mu_2(y) = \int\limits_{\mathbb{S}_2} d\mu_2(y) \int\limits_{\mathbb{S}_1} F(x, y)\, d\mu_1(x) = \int\limits_{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2} F(x, y)\, d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Зауважимо, що з тверджень 2-3 для $q \in [1, +\infty)$ випливає (див. теорему 8.28 [5, с. 218]) така низка рівностей:

$$L^q(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) = L^q(\mathbb{S}_1; L^q(\mathbb{S}_2)) = L^q(\mathbb{S}_2; L^q(\mathbb{S}_1)). \tag{8}$$

Банахові простори випадкових величин. Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – імовірністний простір. Традиційно писатимемо $\mathbb{P}(d\omega)$ замість $d\mathbb{P}(\omega)$ чи $d\mathbb{P}$ при вивченні інтегралів по $\mathbb{S}$.

Нагадаємо, що $\mathcal{F}$-вимірне відображення $\xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ називається *випадковою величиною*, а невід'ємна інтегровна функція $q_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є *щільністю* ξ, якщо

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \int\limits_B q_\xi(y)\, dy$$

для всіх борелівських підмножин $B \subset \mathbb{R}$. Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, то *математичним сподіванням* випадкової величини $f(\xi)$ буде вираз

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \int\limits_{\mathbb{S}} f(\xi(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) q_\xi(y)\, dy. \tag{9}$$

Нагадаємо деякі стандартні властивості математичного сподівання.

1^o. Якщо $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}\,\xi \geq 0$.

2^o. Якщо $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha\mathbb{E}\,\xi + \beta\mathbb{E}\,\eta$.

3^o. Якщо $\xi \leq \eta$, то $\mathbb{E}\,\xi \leq \mathbb{E}\,\eta$.

4^o. Виконується нерівність $|\mathbb{E}\,\xi| \leq \mathbb{E}\,|\xi|$.

5^o. Якщо $0 < \lambda < \mu$, то виконується *нерівність Ляпунова* $(\mathbb{E}[|\xi|^\lambda])^{1/\lambda} \leq (\mathbb{E}[|\xi|^\mu])^{1/\mu}$.

6^o. Якщо $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\mathbb{E}[|\xi|^p] < +\infty$, $\mathbb{E}[|\eta|^{p'}] < +\infty$, то $\mathbb{E}\,|\xi\eta| < +\infty$ та виконується *нерівність Гельдера*

$$\mathbb{E}\,|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}[|\xi|^p])^{1/p} \cdot (\mathbb{E}[|\eta|^{p'}])^{1/p'}.$$

7^o. Якщо $\mathbb{E}[|\xi|^p] < +\infty$, $\mathbb{E}[|\eta|^p] < +\infty$, де $1 \leq p < +\infty$, то $\mathbb{E}[|\xi + \eta|^p] < +\infty$ та виконується *нерівність Мінковського*

$$(\mathbb{E}[|\xi + \eta|^p])^{1/p} \leq (\mathbb{E}[|\xi|^p])^{1/p} + (\mathbb{E}[|\eta|^p])^{1/p}.$$

8^o. Якщо $\xi = 0$ м.н., то $\mathbb{E}\,\xi = 0$.

9^o. Якщо $\xi \geq 0$, $\mathbb{E}\,\xi = 0$, то $\xi = 0$ м.н.

Нехай $q \in [1, +\infty)$. Дамо таке означення.

Означення 4. *Випадковим простором Лебега* L_q називається множина всіх випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом порядку q, тобто L_q є множиною всіх випадкових величин $\xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, для яких $\mathbb{E}[|\xi|^q] < +\infty$ (при цьому традиційно вважається, що $\xi = \eta$ в сенсі простору L_q, якщо $\xi = \eta$ м.н.).

Зрозуміло, що $L_q = L^q(\mathbb{S})$. Проте для зручності та щоб підкреслити випадковий характер елементів простору L_q, ми називаємо цей простір "випадковим" та пишемо L_q замість $L^q(\mathbb{S})$. Аналогічно ми писатимемо $L_q(\mathbb{S}; Y)$ замість $L^q(\mathbb{S}; Y)$ для відповідного *"випадкового" простору Лебега-Бохнера* інтегровних Y-значних випадкових величин. З огляду на (9) та **1**^{o}-**9**^{o}, L_q є банаховим простором стосовно стандартної норми

$$||u||_{L_q} = \Big(\mathbb{E}\Big[|\xi|^q\Big]\Big)^{1/q} \equiv \Big(\int\limits_{\mathbb{S}} |\xi(\omega)|^q\, \mathbb{P}(d\omega)\Big)^{1/q}.$$

У випадку $q = 2$ простір L_2 є гільбертовим зі скалярним добутком типу (6), який ми запишемо у вигляді

$$(\xi, \eta)_2 := \mathbb{E}\,[\xi\eta].$$

Зазначимо також, що $L_p \subset L_q$ для $p \geq q$.

Означення 5. Послідовність випадкових величин $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до випадкової величини ξ *в середньому квадратичному*, якщо вона збігається до ξ в сенсі простору L_2, тобто якщо $||\xi_k - \xi||_{L_2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При цьому писатимемо

$$\xi = \underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_k \quad \text{(limit in mean)}.$$

Лема 6. *Якщо* $\xi = \underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_k$, *то* $\mathbb{E}\,\xi = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\,\xi_k$, *тобто*

$$\mathbb{E}\left[\underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_k\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\,[\xi_k]. \tag{10}$$

Доведення. З властивостей **2**^{o}, **4**^{o} та нерівності Ляпунова одержимо оцінку

$$|\mathbb{E}\,\xi_m - \mathbb{E}\,\xi| = |\mathbb{E}\,[\xi_m - \xi]| \leq \mathbb{E}\left[|\xi_m - \xi|\,\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|\xi_m - \xi|^2\right]\right)^{1/2} = ||\xi_m - \xi||_{L_2},$$

яка і доводить (10). □

Елементарна класифікація та приклади випадкових процесів. Нехай знову $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P}\,)$ – ймовірнісний простір, I – деяка множина індексів.

Припустимо, що кожному індексу $t \in I$ відповідає випадкова величина вигляду $\eta(t) : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$. Сукупність цих величин насправді є функцією двох змінних:

$$\eta = \eta(t, \omega), \quad t \in I, \quad \omega \in \mathbb{S}.$$

При цьому t часто інтерпретується як час.

Означення 7. Якщо I – злічена множина (наприклад, I – послідовність чи $I = \mathbb{N}$), то функція $\eta = \eta(t, \omega)$ називається *випадковою послідовністю.* Якщо I – інтервал з $\mathbb{R}$, то функція $\eta = \eta(t, \omega)$ називається *випадковим процесом*, а іноді – *випадковим процесом з неперервним часом.* Якщо $I \subset \mathbb{R}^k$, де $k \geq 2$, то функція $\eta = \eta(t, \omega)$ називається *випадковим полем* (див., наприклад, [6, с. 426-427]).

Зараз вивчатимемо саме випадкові процеси (з неперервним часом). Отож, нехай далі I – зв'язна підмножина в $\mathbb{R}^1$, наприклад, $I = [0, T]$, де $T > 0$ – фіксоване число. Нагадаємо, що два процеси η_1 та η_2 називаються *стохастично еквівалентними* (див. [7]), якщо $\mathbb{P}\,\{\omega \in \mathbb{S} \mid \eta_1(t, \omega) = \eta_2(t, \omega)\} = 1$, тобто $\eta_1(t) = \eta_2(t)$ м.н. для всіх $t \in [0, T]$. В цьому випадку процес η_2 називають *модифікацією* η_1 і навпаки. Традиційно, стохастично еквівалентні процеси ми не розрізнятимемо.

Означення 8. Для кожного $t \in [0, T]$ випадкова величина $\eta(t) \equiv \eta(t, \cdot)$, тобто функція

$$\mathbb{S} \ni \omega \mapsto \eta(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$$

називається *значенням випадкового процесу* в момент часу t. Для кожного $\omega \in \mathbb{S}$ числова функція $\eta(\omega) \equiv \eta(\cdot, \omega)$, тобто функція

$$[0, T] \ni t \mapsto \eta(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$$

називається *траєкторією, або реалізацією випадкового процесу* η.

Означення 9. Функція двох змінних

$$W = W(t,\omega) : [0,T] \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^1$$

називається *стандартним вінерівськьким процесом* (див. [1, с. 38]), якщо:

1) $W(0,\cdot) = 0$ м.н.;
2) для всіх $t_1, t_2, \ldots, t_m$ таких, що $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ незалежними є такі випадкові величини:

$$W(t_1), \quad W(t_2) - W(t_1), \quad \ldots, \quad W(t_m) - W(t_{m-1});$$

3) для всіх t, s таких, що $t \geq s \geq 0$ випадкова величина $W(t) - W(s)$ має розподіл $N(0, t-s)$, тобто її щільність має вигляд

$$q_{s,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{11}$$

Далі розглядатимемо лише стандартні вінерівські процеси, тому слово "стандартний" опускатимемо. Отож, нехай далі W – вінерівський процес. Деякі властивості W зібрано у наступному зауваженні.

Зауваження 10. 1) З (11), зокрема, випливає таке: для всіх $\forall\ t \geq s \geq 0$ виконуються рівності $\mathbb{E}\,[W(t) - W(s)] = 0$ та $\mathbb{E}\,[(W(t) - W(s))^2] = t - s$.

2) Відомо (див., наприклад, [1, с. 40]), що виконуються рівності

$$\mathbb{E}\,[W(t)] = 0, \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

$$\mathbb{E}\,[W(t)W(s)] = \min\{t,s\}, \quad t,s \in [0,T]. \tag{13}$$

3) Відомо (див., наприклад, [1, с. 51-55]), що траєкторія $W(\omega,\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$ вінерівського процесу є рівномірно неперервною за Гельдером функцією з показником γ, де $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ – довільне число. Проте вона ніде не диференційовна функція, яка має необмежену варіацію на кожному підінтервалі з $[0,T]$.

Наслідком пункту 3 зауваження 10 є, зокрема, неможливість дати традиційне означення похідної чи диференціалу вінерівського процесу W, які ми формально використали при записі (4)-(5). Крім того, інтеграли типу (1) не можна трактувати у вигляді інтегралів Стільтьєса, бо це теж не є коректним. Також це зумовлює розмаїття способів введення стохастичних інтегралів і в певному сенсі мотивує наші дослідження.

Далі дамо класифікацію випадкових процесів $\eta = \eta(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, $\omega \in \mathbb{S}$.

Означення 11. Випадковий процес з неперервним часом називається *неперервним в середньому квадратичному* на $[0,T]$, якщо

$$\forall\ t_0 \in [0,T] : \quad \mathbb{E}\left[|\eta(t) - \eta(t_0)|^2\right] \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0.$$

Означення 12. Нехай $p \in [1, +\infty)$. Випадковий процес η називається
– CL_p*-процесом*, якщо він є неперервною L_p-значною функцією, тобто $\eta \in C([0,T]; L_p)$;
– L^p_p*-процесом*, якщо $\eta \in L^p(0,T; L_p(\mathbb{S})) = L_p(\mathbb{S}; L^p(0,T))$;
– L*-процесом*, якщо він є L^1_1-процесом.

Зрозуміло, таке: неперервний в середньоквадратичному процес є CL_2-процесом; якщо $p \geq q \geq 1$, то

$$C([0,T]; L_p) \subset C([0,T]; L_q), \quad L^p(0,T; L_p) \subset L^q(0,T; L_q), \quad C([0,T]; L_p) \subset L^p(0,T; L_p).$$

Тому, наприклад, CL_1-процес є L-процесом.

Лема 13. *Вінерівський процес є CL_2-процесом.*

Доведення. Нехай $t_0 \in [0,T]$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} t_0$. Візьмемо довільне $k \in \mathbb{N}$. Не зменшуючи загальності припустимо, що $t_0 < t_k$. Оскільки W – вінерівський процес, то $W(t_k) - W(t_0) \in N(0, t_k - t_0)$. Тому щільністю цієї випадкової величини є функція

$$q_{t_0,t_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_0)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t_k - t_0)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, з формули (9) матимемо, що

$$I \equiv \mathbb{E}\Big[|W(t_k) - W(t_0)|^2\Big] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 q_{t_0,t_k}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_0)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^2\, e^{-\frac{x^2}{2(t_k - t_0)}}\, dx.$$

Зробивши заміну $x \rightsquigarrow y$, де $x = \sqrt{2(t_k - t_0)}y$ (тоді $dx = \sqrt{2(t_k - t_0)}\, dy$), матимемо таке:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_0)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sqrt{2(t_k - t_0)}\Big)^2 |y|^2\, e^{-y^2} \sqrt{2(t_k - t_0)}\, dy = \frac{2(t_k - t_0)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^2\, e^{-y^2}\, dy.$$

Зінтегрувавши частинами, одержимо, що

$$I = -\frac{(t_k - t_0)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, d\, e^{-y^2} = \frac{(t_k - t_0)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = (t_k - t_0).$$

Тому $||W(t_k) - W(t_0)||_{L_2} = \sqrt{\mathbb{E}\left[|W(t_k) - W(t_0)|^2\right]} = \sqrt{|t_k - t_0|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отже, W є неперервною функцією в точці t_0, як функція з $[0,T]$ в L_2. $\square$

Інтегрування випадкових процесів за часовою змінною. Для випадкових процесів $\xi \in C([0,T]; L_p)$ чи $\xi \in L^1(0,T; L_p)$, де $p \in [1, +\infty)$, стандартним чином можна визначити інтеграл Бохнера

$$\int\limits_0^T \xi(t)\, dt \in L_p.$$

Добре відомі також і класичні властивості такого інтегралу. Розглянемо деякі його спеціальні властивості.

Лема 14. *(про математичне сподівання інтегралу від L-процесу). Якщо $g \in L^\infty(0,T)$ – детермінована функція, $\eta(t)$ – випадковий L-процес, то*

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T]: \quad \mathbb{E}\Big[\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)\, dt\Big] = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\mathbb{E}\left[\eta(t)\right] dt. \tag{14}$$

Доведення. Зрозуміло, що $g\eta \in L^1(0,T; L_1)$ і тому існує інтеграл зліва в (14).

Оскільки $\eta \in L^1(0,T; L_1)$, то $\mathbb{E}\,|\eta(t)| = ||\eta(t)||_{L_1} \in L^1(0,T)$ і з оцінки $|\mathbb{E}\,\xi| \le \mathbb{E}\,|\xi|$ (див. властивість $\mathbf{4}^o$ математичного сподівання) матимемо, що $|\mathbb{E}\left[\eta(t)\right]| \in L^1(0,T)$. Тому $\mathbb{E}\,\eta(t) \in L^1(0,T)$ і тоді $g\mathbb{E}\,\eta \in L^1(0,T)$, тобто існує інтеграл справа в (14).

Залишилося показати рівність згадуваних інтегралів. Використаємо для цього теорему Фубіні (твердження 3):

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)\ dt\Big] = \int\limits_{\mathbb{S}}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t,\omega)\ dt\Big)\ \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{S}} \eta(t,\omega)\ \mathbb{P}(d\omega)\Big)\ dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\mathbb{E}\left[\eta(t)\right]\ dt. \quad \square$$

Зауважимо, що оскільки $W \in C([0,T];L_2) \subset L^2(0,T;L_2)$, то для всіх $h \in L^2([0,T])$ коректним є L_2-значний інтеграл Бохнера

$$\int\limits_0^T h(t)W(t)\ dt \tag{15}$$

Інтеграл типу (15) є аналогом (1) у випадку, коли підінтегральна функція залежить лише від t. Нехай $C^1([0,T])$ – простір детермінованих неперервно-диференційовних на $[0,T]$ функцій, g' – похідна функції $g \in C^1([0,T])$,

$$\Psi_0 := \{g \in C^1([0,T]) \quad | \quad g(0) = g(T) = 0\}. \tag{16}$$

Припустимо, що g – невипадкова функція, причому, спочатку $g \in \Psi_0$.

Означення 15. *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда* від гладкої детермінованої функції $g \in \Psi_0$ по випадковому вінерівському процесу W називається такий вираз:

$$(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g(t)\ dW(t,\omega) := -\int\limits_0^T g'(t)W(t,\omega)\ dt. \tag{17}$$

Інтеграл справа в (17) – це інтеграл Бохнера функції $g'W \in C([0,T];L_2)$. Він існує, бо $g' \in C([0,T])$, а $W \in C([0,T];L_2)$. Проблемою даного означення PWZ-інтеграла є те, що функція g повинна занулятися в точках $t=0$ та $t=T$. Її усувають таким методом.

Нехай g – невипадкова функція, $g \in L^2(0,T)$, нехай послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Psi_0, \quad g_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{в просторі} \quad L^2(0,T).$$

Відомо, що така послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ завжди існує.

Означення 16. *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда* від детермінованої функції $g \in L^2(0,T)$ по випадковому вінерівському процесу W назвемо вираз

$$(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g(t)\ dW(t,\omega) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ (\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g_m(t)\ dW(t,\omega), \tag{18}$$

тобто границю в просторі L_2 послідовності інтегралів від функцій $g_m \in \Psi_0$.

Властивості PWZ-інтегралів (17)-(18) розглянуто, зокрема, в [1]. Ми наведемо лише деякі з них у слідуючому твердженні.

Твердження 17. *(про властивості PWZ-інтеграла,* [1, с. 59]*). Нехай W – вінерівський процес, Тоді якщо $g \in L^2(0,T)$, то*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big] = 0, \tag{19}$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big)^2\Big] = \int_0^T |g(t)|^2\, dt. \tag{20}$$

4. Основні результати

Оскільки $W \in C([0,T];L_2)$ (див. лему 13), то $W \in L^2(0,T;L_2)$. Крім того, функція W є незалежною від $x \in \Omega$. Тому з (8) випливає, що

$$W \in L^2(Q_{0,T};L_2) = L^2(\Pi_{0,T}).$$

Аналогічно, кожна функція $g \in L^2(Q_{0,T})$ є незалежною від змінної $\omega \in \mathbb{S}$, а тому $g \in L^2(\Pi_{0,T})$. Отже, використавши твердження 1 та (8), одержимо

$$gW \in L^1(\Pi_{0,T}) = L^1(Q_{0,T};L_1) \tag{21}$$

та (див. (7))

$$\int_{\Pi_{0,T}} |g(x,t)W(t,\omega)|\, dxdt\mathbb{P}(d\omega) \le$$

$$\le \Big(\int_{\Pi_{0,T}} |g(x,t)|^2\, dxdt\mathbb{P}(d\omega)\Big)^{1/2}\Big(\int_{\Pi_{0,T}} |W(t,\omega)|^2\, dxdt\mathbb{P}(d\omega)\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\int_{Q_{0,T}} |g(x,t)|^2\, dxdt \cdot \int_{\mathbb{S}} \mathbb{P}(d\omega)\Big)^{1/2}\Big(\int_{\Omega} dx \cdot \int_{\Theta_{0,T}} |W(t,\omega)|^2\, dt\mathbb{P}(d\omega)\Big)^{1/2}.$$

Тоді (зауважимо, що $\int_{\mathbb{S}} \mathbb{P}(d\omega) = 1$ та $\int_{\Omega} dx = |\Omega|$) правильною є оцінка

$$\int_{\Pi_{0,T}} |g(x,t)W(t,\omega)|\, dxdt\mathbb{P}(d\omega) \le \sqrt{|\Omega|} \cdot ||g; L^2(Q_{0,T})|| \cdot ||W; L^2(0,T;L_2)||,$$

де $|\Omega|$ – міра Лебега області Ω.

Тепер визначимо інтеграл (1) для детермінованих (тобто, невипадкових) функцій $h \in \Phi_0$, де (за аналогією з (16))

$$\Phi_0 := \{h \in C^1(\overline{Q_{0,T}}) \quad | \quad h|_{t=0} = h|_{t=T} = 0\}. \tag{22}$$

Означення 18. *Просторово-часовим інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда (space-time PWZ-integral)* від детермінованої функції $h \in \Phi_0$ по випадковому вінерівському процесу W називається така випадкова величина:

$$(\texttt{ST-PWZ}) \int_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega) := -\int_{Q_{0,T}} h_t(x,t)W(t,\omega)\, dxdt. \tag{23}$$

Інтеграл справа в (23) – це інтеграл Бохнера функції $h_t W \in L^1(Q_{0,T}; L_1)$ (див. (21)), h_t – частинна похідна за t функції h з множини $C^1(\overline{Q_{0,T}})$ всіх детермінованих неперервно-диференційовних на $\overline{Q_{0,T}}$ функцій. Замість $dW(t,\omega)$ далі переважно писатимемо dW, а змінні інтегрування опускатимемо.

Зрозуміло, що введений таким чином, (ST-PWZ)-інтеграл є лінійним, тобто для всіх чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та функцій $f, g \in \Phi_0$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} [\alpha f(x,t) + \beta h(x,t)]\, dxdW = \alpha \int\limits_{Q_{0,T}} f(x,t)\, dxdW + \beta \int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW. \tag{24}$$

Наведемо аналог властивостей (19)-(20).

Теорема 19. *(про властивості (ST-PWZ)-інтеграла). Нехай Φ_0 визначено в (22), W – вінерівський процес з означення 9. Тоді якщо $h \in \Phi_0$, то*

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega)\Big] = 0, \tag{25}$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega)\Big)^2\Big] = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_\Omega h(x,t)\, dx\Big)^2\, dt. \tag{26}$$

Доведення. Аналогічно як (14), для всіх $\eta \in L^1(0,T; L_1)$ доводимо рівність

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} h(x,t)\eta(t,\omega)\, dxdt\Big] = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} h(x,t)\mathbb{E}\left[\eta(t,\omega)\right] dxdt, \tag{27}$$

де $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $(t_1,t_2) \subset (0,T)$. Враховуючи (23), (12) та (27), матимемо

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW\Big] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} -h_t(x,t)W(t,\omega)\, dxdt\Big] = \int\limits_{Q_{0,T}} -h_t(x,t)\mathbb{E}\Big[W(t,\omega)\Big]\, dxdt = 0,$$

що і доводить (25).

Позначимо ліву частину (26) через I. Також писатимемо, наприклад, Ω^x чи $Q_{0,T}^{y,s}$ для підкреслення змінних інтегрування. Використаємо (27) двічі:

$$I = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}^{x,t}} h(x,t)\, dxdW \cdot \int\limits_{Q_{0,T}^{y,s}} h(y,s)\, dW\Big] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}^{x,t}} h_t(x,t)W(t,\omega)\, dxdt \times$$

$$\times \int\limits_{Q_{0,T}^{y,s}} h_s(y,s)W(s,\omega)\, dyds\Big] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}^{x,t}} h_t(x,t)\Big(W(t,\omega) \int\limits_{Q_{0,T}^{y,s}} h_s(y,s)W(s,\omega)\, dyds\Big)\, dxdt\Big] =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}^{x,t}} h_t(x,t)\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}^{y,s}} h_s(y,s)W(t,\omega)W(s,\omega)\, dyds\Big]\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}^{x,t}} h_t(x,t) \int\limits_{Q_{0,T}^{y,s}} h_s(y,s)\mathbb{E}\Big[W(t,\omega)W(s,\omega)\Big]\, dydsdxdt.$$

З (13) та рівностей $h|_{t=0} = h|_{t=T} = 0$ випливає, що

$$I = \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{Q^{y,s}_{0,T}} h_s(y,s) \min\{t,s\}\, dydsdxdt = \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{\Omega^y} \Big[\int\limits_0^t h_s(y,s) s\, ds +$$

$$+\int\limits_t^T h_s(y,s) t\, ds\Big]\, dydxdt = \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{\Omega^y} \Big[sh(y,s)|_{s=0}^{s=t} - \int\limits_0^t h(y,s)\, ds + th(y,s)|_{s=t}^{s=T}\Big]\, dydt =$$

$$= \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{\Omega^y} \Big[th(y,t) - 0 - \int\limits_0^t h(y,s)\, ds + 0 - th(y,t)\Big]\, dydt =$$

$$= \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h_t(x,t) \int\limits_{\Omega^y} \Big[-\int\limits_0^t h(y,s)\, ds\Big]\, dydt.$$

Знову зінтегрувавши частинами та використавши рівності $h|_{t=0} = h|_{t=T} = 0$, отримаємо

$$I = h(x,t)\Big[-\int\limits_{Q^{y,s}_{0,t}} h(y,s)\, dyds\Big]\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q^{x,t}_{0,T}} h(x,t)\frac{d}{dt}\Big[-\int\limits_{Q^{y,s}_{0,t}} h(y,s)\, dyds\Big] =$$

$$= \int\limits_0^T \Big(\int\limits_{\Omega^x} h(x,t)\, dx\Big) \cdot \Big(\int\limits_{\Omega^y} h(y,t)\, dx\Big)\, dt,$$

що і доводить (26). □

Наслідок 20. *Виконується нерівність*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW\Big)^2\Big] \le |\Omega| \int\limits_{Q_{0,T}} |h(x,t)|^2\, dxdt. \qquad (28)$$

Доведення. Оцінка (28) зразу випливає з (26) і нерівності Гельдера типу (7). □

Незручністю означення 18 знову є те, що підінтегральна функція h повинна занулятися в точках $t = 0$ та $t = T$. Позбудемось цієї проблеми. Нехай $h \in L^2(Q_{0,T})$ – невипадкова функція, послідовність функції $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Phi_0, \quad h_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} h \quad \text{в просторі} \quad L^2(Q_{0,T}). \qquad (29)$$

Зазначимо, що така послідовність $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ існує.

Означення 21. *Просторово-часовим інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда (space-time PWZ-integral)* від детермінованої функції $g \in L^2(Q_{0,T})$ по випадковому вінерівському процесу W назвемо випадкову величину

$$(\mathtt{ST\text{-}PWZ}) \int\limits_{Q_{0,T}} h(x,t)\, dxdW(t,\omega) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ (\mathtt{ST\text{-}PWZ}) \int\limits_{Q_{0,T}} h_m(x,t)\, dxdW(t,\omega), \qquad (30)$$

тобто границю в просторі L_2 послідовності інтегралів від функцій $h_m \in \Phi_0$.

Покажемо коректність цього означення.

Лема 22. *Границя (30) не залежить від вибору послідовності з (29).*

Доведення. Перш за все, оскільки $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна в $L^2(Q_{0,T})$, то з (24) та (28) матимемо, що

$$\Big|\Big|\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW-\int\limits_{Q_{0,T}} h_k\,dxdW\Big|\Big|^2_{L_2}=\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW-\int\limits_{Q_{0,T}} h_k\,dxdW\Big)^2\Big]=$$

$$=\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}}(h_m-h_k)\,dxdW\Big)^2\Big]\le|\Omega|\int\limits_{Q_{0,T}}|h_m-h_k|^2\,dxdt\underset{k,m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Отже, границя в (30) існує, бо L_2 – банахів простір. Покажемо, що вона не залежить від вибору послідовності. Нехай $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}},\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset\Phi_0$, $h_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}h$, $f_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}h$ в $L^2(Q_{0,T})$,

$$G_m=\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW,\qquad F_m=\int\limits_{Q_{0,T}} f_m\,dxdW,\quad m\in\mathbb{N},$$

$$I_1=\underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,G_m,\quad I_2=\underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,F_m.$$

Тоді

$$||I_1-I_2||_{L_2}\le||I_1-G_m||_{L_2}+||G_m-F_m||_{L_2}+||F_m-I_2||_{L_2}. \tag{31}$$

Перший та третій вираз зправа в (31) прямують до нуля. Оскільки

$$||G_m-F_m||_{L_2}=\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_{Q_{0,T}}(h_m-f_m)\,dxdW\Big)^2\Big]\Big)^{1/2}\le\Big(|\Omega|\int\limits_{Q_{0,T}}|h_m-f_m|^2\,dxdt\Big)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{|\Omega|}\,||h_m-f_m||_{L^2(Q_{0,T})}\le\sqrt{|\Omega|}\,||h_m-h||_{L^2(Q_{0,T})}+\sqrt{|\Omega|}\,||h-f_m||_{L^2(Q_{0,T})}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

то з (31) матимемо рівність $||I_1-I_2||_{L_2}=0$. Отже, $I_1=I_2$ і означення 21 коректне. □

Теорема 23. *Формули (24), (25), (26), (28) правильні також для $h\in L^2(Q_{0,T})$.*

Доведення. Формула (24) очевидна. Для доведення (25) розглянемо $g\in L^2(Q_{0,T})$ та послідовність функції $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, що задовольняє (29). З (10) та формули (25) для гладких функцій отримаємо

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h\,dxdW\Big]=\mathbb{E}\Big[\underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW\Big]=\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\Big[\int\limits_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW\Big]=\lim_{m\to\infty}0=0.$$

Для доведення (26) використаємо таку властивість норми кожного банахового простору X:

$$||x_m-x||_X\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0\quad\Longrightarrow\quad||x_m||_X\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}||x||_X. \tag{32}$$

Крім того, використавши формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ та обмеженість послідовності з (29) в просторі $L^2(Q_{0,T})$, отримаємо таке:

$$\Big|\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Omega h_m(x,t)\,dx\Big)^2dt-\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Omega h(x,t)\,dx\Big)^2dt\Big|=$$

$$=\Big|\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Omega[h_m(x,t)-h(x,t)]\,dx\Big)\cdot\Big(\int\limits_\Omega[h_m(x,t)+h(x,t)]\,dx\Big)\,dt\Big|\le$$

$$\leq \Big(\int_0^T \Big|\int_\Omega |h_m(x,t)-h(x,t)|\,dx\Big|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \Big|\int_\Omega |h_m(x,t)+h(x,t)|\,dx\Big|^2\,dt\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_1\Big(\int_0^T \Big|\int_\Omega |h_m(x,t)-h(x,t)|\,dx\Big|^2\,dt\Big)^{1/2} \leq C_2\Big(\int_{Q_{0,T}} |h_m-h|^2\,dxdt\Big)^{1/2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (33)$$

Використавши (32) при $X = L_2$, з (33) одержимо, що

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{Q_{0,T}} h\,dxdW\Big)^2\Big] = \Big\|\int_{Q_{0,T}} h\,dxdW\Big\|^2_{L_2} = \lim_{m\to\infty}\Big\|\int_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW\Big\|^2_{L_2} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{Q_{0,T}} h_m\,dxdW\Big)^2\Big] = \lim_{m\to\infty}\int_0^T\Big(\int_\Omega h_m(x,t)\,dx\Big)^2\,dt = \int_0^T\Big(\int_\Omega h(x,t)\,dx\Big)^2\,dt$$

і тому виконується (26). Доведення (28) є елементарним. □

Висновки. В статті розглянуто означення та базові властивості стохастичного інтегралу від детермінованої функції за випадковим вінерівським процесом. Розглянуті твердження будуть використані в подальших дослідженнях, зокрема, нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Evans L.C. An introduction to Stochastic differential equations. Lecture Notes (VERSION 1.2). 2012. Department of Math., UC Berkeley. 139 p.
2. Paley R., Wiener N., Zygmund A. Notes on random functions. *Mathematische Zeitschrift*. 1933. Vol. 37, № 1. P. 647–668. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01474606
3. Applebaum D. Levy processes and stochastic calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 460 p.
4. Brezis H. Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011. 599 p.
5. Leoni G. A first course in Sobolev spaces. Providence: American Mathematical Soc., 2017. 736 p.
6. Гнєденко Б.В. Курс теорії ймовірностей. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. 464 с.
7. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ: Либідь, 1990. 168 с.

UDC 519.21

On stochastic space-time Paley-Wiener-Zygmund integral

Oleh Buhrii, Nataliya Buhrii, Vitaliy Vlasov

Abstract. We consider one case of the stochastic integral of non-random function of many variables with respect to the random Winer process. We give definition of this integral and prove some it standard properties.

Keywords: stochastic integral, Paley-Wiener-Zygmund integral, random Winer process.

References

1. Evans, L.C. (2012). *An introduction to Stochastic differential equations,* Lecture Notes (VERSION 1.2), Department of Math., UC Berkeley.
2. Paley, R., Wiener, N., Zygmund, A. (1933). *Notes on random functions,* Mathematische Zeitschrift, **37** (1), 647–668. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01474606
3. Applebaum, D. (2009). *Levy processes and stochastic calculus,* Cambridge University Press, Cambridge.
4. Brezis, H. (2011). *Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London.
5. Leoni, G. *A first course in Sobolev spaces,* American Mathematical Soc., Providence, 2017. 736 p.
6. Gnedenko, B.V. (2010). *A course of probability,* KNU, Kyiv. [in Ukrainian]
7. Skorokhod, A.V. (1990). *Lectures on theory of stochastic processes,* Lybid, Kyiv. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Олег Бугрій, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна.

Oleh Buhrii, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine.

Наталія Бугрій, кандидат фізико-математичних наук, кафедра вищої математики, Національний університет "Львівська політехніка", вул. Митрополита Андрея, 5, м. Львів, 79000, Україна.

Nataliya Buhrii, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Department of Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 5 Mytropolyt Andrei Str., Lviv 79000, Ukraine.

Віталій Власов, кандидат фізико-математичних наук, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна.

Vitaliy Vlasov, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 30.03.2024
Доопрацьовано / Revised 11.05.2024

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ

Actual problems of physics and astronomy

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 27–35.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 27–35.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 523.43

Вертикальні провалені отвори до вулканічних печер на поверхні Марса

Анатолій Відьмаченко [1], Олександр Мозговий [2], Олексій Стєклов [3]

[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України, кафедра фізики;
Головна астрономічна обсерваторія НАН України,
відділ фізики субзоряних і планетних систем, м. Київ, Україна
avidmachenko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0523-5234

[2] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна
mavimfto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0797-8779

[3] Головна астрономічна обсерваторія НАН України,
відділ фізики субзоряних і планетних систем, м. Київ, Україна
stec36@i.au
https://orcid.org/0000-0002-5149-0500

Анотація. Дослідження Марса вказали на присутність на його поверхні печер вулканічного та, можливо, льодовикового походження. При виверженнях вулканів витікають потоки лави. Остигаючи, вони покривається твердою корою і утворюють лавові трубки. Після закінчення виверження, лава витікає з трубок у найнижчому місці і залишає порожнину. Тому лавові печери знаходяться на схилах вулканів близько до поверхні. Інколи їх верхня частина обвалюється. Значна частина поверхні Марса вкрита вулканічними кратерами та гірськими масивами. На фотографіях одного з вулканічних плато Tharsis було знайдено темні округлі плями. Їх вивчення показало, що вони є вхідними отворами до вулканічних печер. На відносну молодість цих утворень вказують різкі краї цих провалів. Лавові трубки на Марсі виглядають прямими ланцюгами обвалів із плоским дно та майже вертикальними схилами. Такі об'єкти мають стати метою досліджень майбутніми поселенцями. температурного коефіцієнта лінійного розширення при збільшенні концентрації модифікованого ТРГ.

Ключові слова: Марс, вулканічні печери, лавові трубки, об'єкти досліджень.

1. Вступ

Печери на планеті Землі ділять на карстові, тектонічні, ерозійні, вулканічні та льодовикові. Печери було знайдено ще й на Місяці та Марсі. На Місяці, скоріше всього, вони є вулканічного походження [5, 10, 19]. Тоді як на Марсі [17] вони мають бути і вулканічні так і льодовикові. На планеті Земля найбільше існує карстових печер. Вони утворюються унаслідок розчинення деяких порід водою. По цій причині вони зустрічаються лише там, де залягають породи, які мають відповідні характеристики. До них можуть належати доломіт, крейда, вапняк, мармур, гіпс, сіль тощо. Вапняк, і тим більше мармур, дуже чистою та майже дистильованою водою дуже погано піддаються розчиненню. Але за присутності у воді розчиненого вуглекислого газу [1, 18] розчинність цих матеріалів підвищується у кілька разів. Вапняки також розчиняються слабкіше порівняно, наприклад, з сіллю чи гіпсом. Проте виявляється, що такі властивості позитивно позначаються на можливість утворення достатньо довгих печер. Адже соляні та гіпсові печери досить швидко утворюються, і достатньо швидко руйнуються. Проте для утворення таких печер необхідна достатня кількість водних опадів і підходяща форма рельєфу. За таких умов опади мають можливість потрапляти до печери із значної площі поверхні. Крім того, вхід до печери має розташовуватися значно вище від того місця, куди зливатимуться підземні води тощо.

2. Постановка проблеми

Тектонічні печери зможуть виникати практично у будь-яких породах при утворені тектонічних розломів поверхні планети. Переважно, такі печери на Землі зустрічаються на схилах врізаних у плоскогір'я річкових долин. У таких місцях достатньо великі масиви гірських порід мають можливість відколюються від країв обривів, та утворювати тріщини, обриви і просідання. Зазвичай, такі тріщини сходяться клином у низинах. Через деякий час вони можуть заповнюватися пухкими відкладеннями із поверхні гірських масивів. Проте за певних умов вони можуть утворювати достатньо глибокі вертикальні печери глибиною до сотні метрів.

Ерозійні печери утворюються у нерозчинних породах за рахунок механічної ерозії під впливом швидких потоків проточної води [6, 20]; бажано, щоб така вода містила крупинки твердого матеріалу. На Землі такі печери, найчастіше, утворюються на берегах морів. Вони, зазвичай, мають порівняно невеликі розміри. Утворення таких печер можливе і під впливом струмків, що протікають по тектонічних тріщинах, які опускаються під землю.

Льодовикові печери утворюються в льодовиках під впливом талої води. Розтала вода проходить по тілу льодовика по великих тріщинах і по їх розгалуженнях; за таких умов утворюються ходи, висотою до кількох метрів; довжина таких печер може становити до кількох сотень метрів, а глибина – до 100 м і більше.

Вулканічні печери з'являються при виверженнях вулканів. Потік лави остигають, і зверху покриваються твердою корою, утворюючи під поверхнею лавові трубки. А в їх середині ще протягом певного часу може протікати розплавлена порода. Після того як виверження закінчилося, то розплавлена лава витікатиме з утворених лавових трубок у найнижчому місці. У таких випадках в середині лавової трубки залишатиметься порожнина. Оскільки лавові печери залягають на схилах вулканів близько до поверхні, то їх верхня частина часто може обвалюватися. На Землі лавові печери досягають до 70 км у довжину і мають глибину понад 1 км.

Метою роботи є встановлення природи вертикальних провальних отворів на поверхні Марса.

3. Основні результати

Майже половина поверхні планети Марс [15, 16] вкрита старими вулканічними [13] і ударними кратерами та гірськими масивами, а друга половина – молодими кратерами та рівнинними відкладеннями (рис. 1). У південних районах планети кратерних утворень знайдено значно більше, ніж у північних. У південній півкулі лише низинні рівнини Hellas Planitia [4, 8] та Argyre Planitia, які розташовані в середині величезних ударних кільцевих структур, характеризуються порівняно невеликою густиною кратерів. Переважна більшість вулканічних кратерів [9, 11] розташовані на вершинах куполоподібних підвищень.

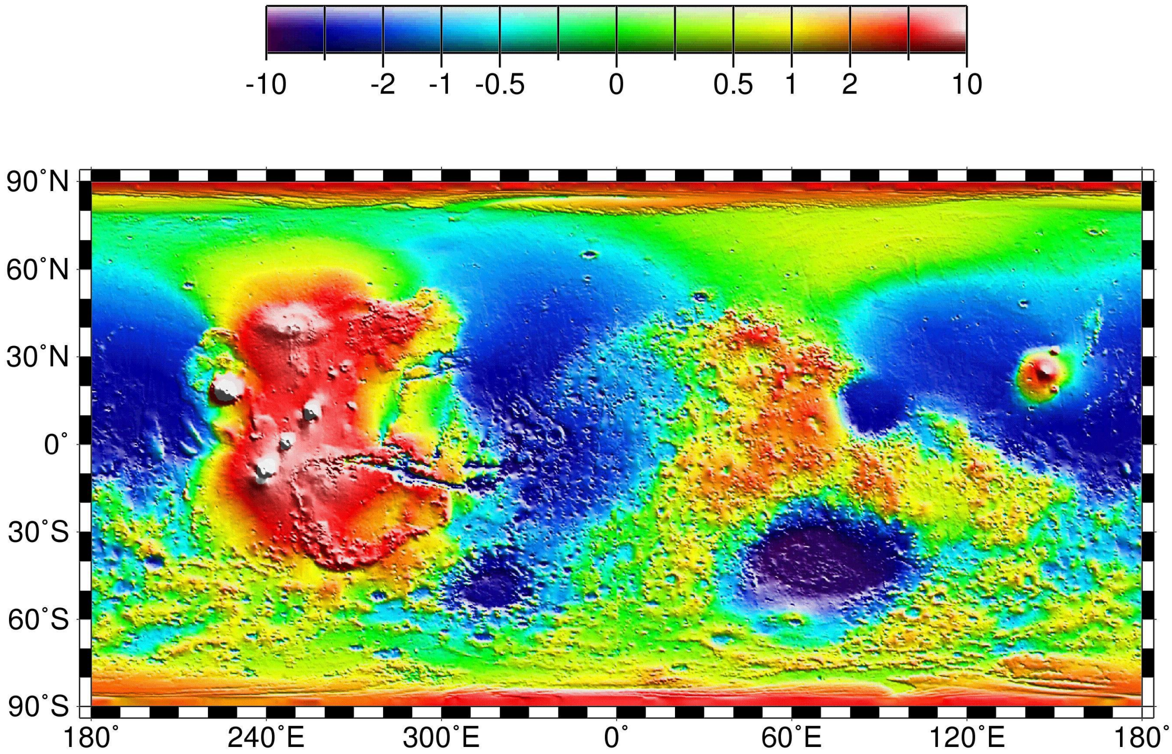


Рис. 1. Рельєф Марса (https://www.jpl.nasa.gov/images/pia02035-map-of-mars-topography)

Найхарактернішими представниками кратерів вулканічного походження є великі кратери, розташовані на вершинах чотирьох найвищих на Марсі гір: Olympus, Arsya, Pavonis та Askraeus. Переважна більшість великих кратерів покрита дрібнішими кратерними утвореннями.

У 2004 році камерою «THEMIS» космічного апарату «Mars Odyssey» з низькою просторовою роздільною здатністю були зроблені численні фотографії вулканічного плато Tharsis. На цьому марсіанському плато знаходяться найбільші у Сонячній системі вулкани. Саме на цих зображеннях вперше вдалося побачити сім загадкових темних провалів округлої форми. Вони були знайдені на схилах вулканічної гори Arsya. Їх назвали «Сім сестер» і вони отримали такі жіночі імена: Венді, Ені, Дена, Хлоя, Еббі, Ніккі та Джінн. Одна з них показана на рис. 2. Пізніші вивчення показали, що ці темні плями на поверхні Марса є своєрідними кам’янистими колодязями. Для того, щоб пояснити їх природу було запропоновано, що дані плями є вхідними отворами до глибоких вулканічних печер, які знаходяться під поверхнею планети. Тобто, дуже можливо, що вони, по аналогії із деякими земними вулканами, є провалами в стелі великих печер.

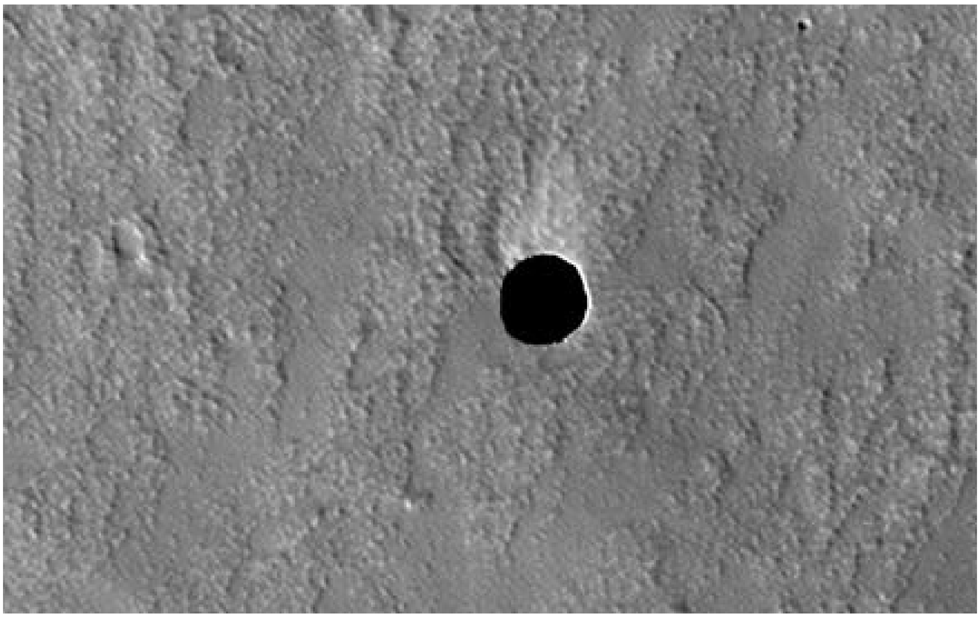


Рис. 2. Одна з темних плям на схилах вулкану Arsya на Марсі (http://photojournal.jpl.nasa.gov/)

Зображення на рис. 3 були отримані у травні 2007 р. камерою «High Resolution Imaging Science Experiment» («HIRISE») з космічного апарата «Mars Reconnaissance Orbiter». Показаний отвір є глибоким, і його дно майже не освітлюється Сонцем. Пізніше на схилах вулкану були отримані зображення ще одного провалу, названого Джінн. На перших фотографіях (рис. 3, посередині) він виглядає чорною плямою з розміром 150×157 м. Там не видно жодних натяків на дно та на зовнішній вал по його периметру. Нові зображення цього ж провалу Джінн вдалося отримати в час, коли Сонце в районі зйомки почало рухатися до заходу. На представленому на рис. 3 (праворуч) знімку вже добре видно деякі деталі на стінках усередині об'єкту, освітлених косими сонячними променями з її східного боку. Ці стінки йдуть майже вертикально. Проте наскільки глибоким є даний провал все ще залишалося неясним. Стало відомо лише, що на глибині близько 80 м – дна ще немає.

Оскільки в знайдених отворах освітленого Сонцем дна все ще не було видно і їх стіни – є майже вертикальними, то вони не є зруйнованими ерозією ямами. Усі сім знайдених тоді отворів знаходилися недалеко від провальних кратерів на вершині, або ж продовжують їх ланцюжки. Вважається, що по аналогії із земними вулканічними печерами, такі провали утворюються у моменти, коли потоки розплавленої лави «випалюють» під поверхнею планети порожнечі та сповзають по схилу щитових вулканів. Потім у результаті землетрусів зовнішні шари можуть провалюватися в утворені порожнечі і створювати темні «колодязі» на Марсі. Дуже різкі краї цих провалів свідчать про їх відносну молодість. Адже на Марсі є атмосфера із постійними вітрами, котрі весь час засипають нові ями піском і пилом [1-3, 14].

На Землі такі кратери також знаходять на схилах молодих щитових вулканів. Можливо, що таким же способом утворилися й темні «колодязі» на Марсі. Вік наймолодших слідів вулканічної активності на Марсі оцінюють в декілька десятків мільйонів років [20]. Діаметри знайдених отворів знаходяться в межах від 100 до 252 м.

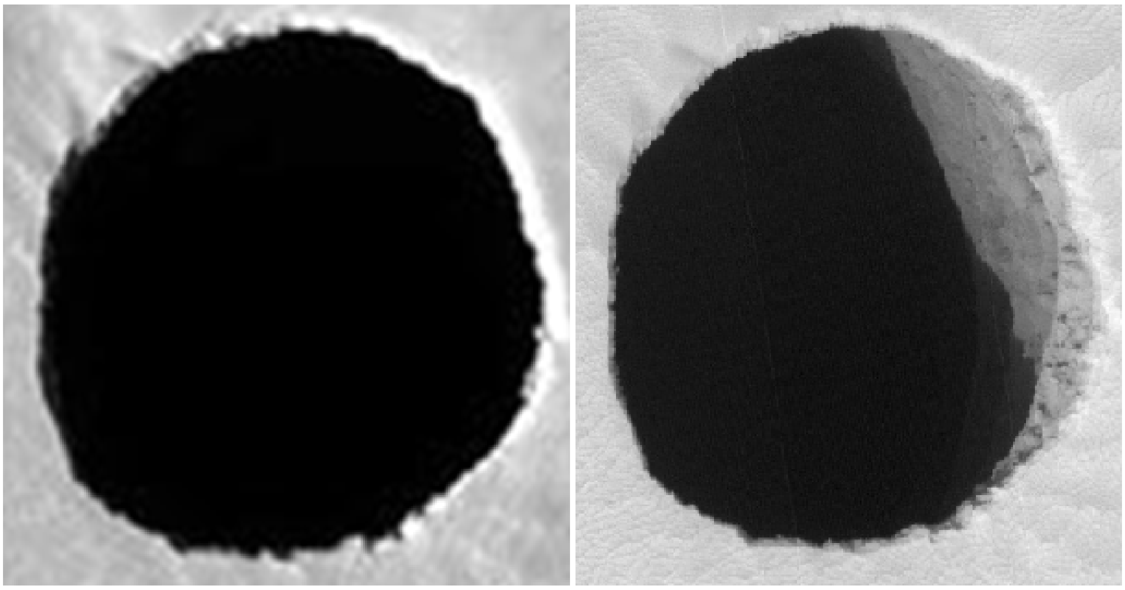


Рис. 3. Провал Джінн, розміром 150×157 м; він освітлюється вертикально (ліворуч) і косими (праворуч) сонячними променями 08.08.2007 (http://photojournal.jpl.nasa.gov/)

Два із семи таких об’єктів були досліджені також ще й за допомогою інфрачервоної зйомки. Виявилось, що температура їх не залежить від сезону [7, 12] на планеті і є досить постійною у будь-який час доби: на денному світлі ці провали холодніші за решту частини поверхні, а вночі ці об’єкти є теплішими від навколишньої місцевості. Це говорить на користь гіпотези про те, що дані об’єкти є «вікнами» в значної товщини стелі вулканічних печер.

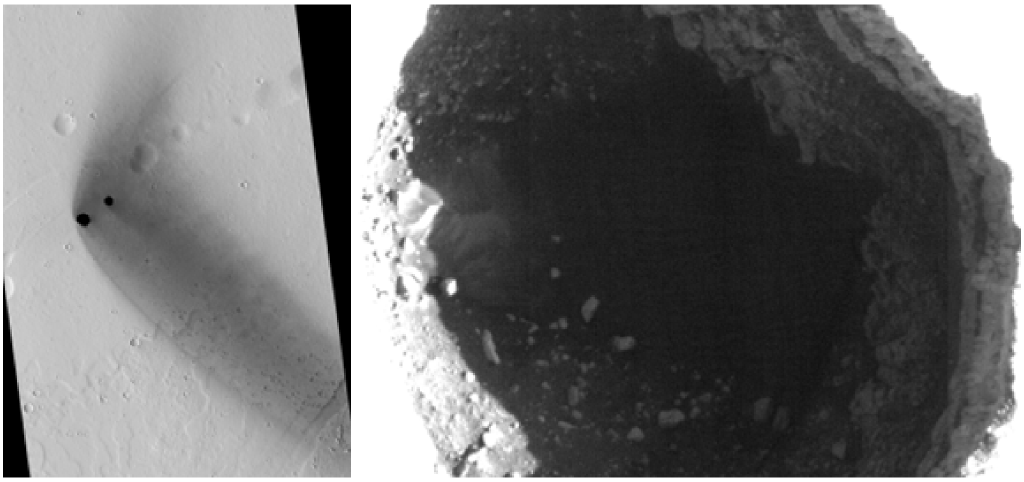


Рис. 4. Ліворуч – два темні отвори на північно західному схилі від Askraeus Mons (01.12.2010) діаметром 180 м і 310 м (http://hirise.lpl.arizona.edu/ESP_ 019997_1975). Праворуч – більший отвір зблизька (https://hirise-pds.lpl_RED.browse.jpg)

Дослідження понад двох сотень зображень ділянки на вулкані Pavonis Mons, отриманих за допомогою камери «THEMIS» з роздільною здатністю до 18 м, дозволило знайти чимало інших лавових трубок та знайти ще кілька марсіанських отворів. Зображення отримане камерою «HiRISE» [5] включає дві темні ями приблизно 180 і 310 м у діаметрі (рис. 4, ліворуч), які, очевидно, внизу з’єднані більшою печерною западиною, розташованою на схилі Askraeus Mons. Ці ями розташовані посеред великого тонкого темного викиду з них у формі бумеранга. Викиди можуть складатися з матеріалу, винесеного або з ям, або з якогось іншого джерела та розвіяного місцевими вітрами. Зображення на рис. 4 (праворуч) показує внутрішню частину більшої ями. Яма має дуже стрімку східну стінку (праворуч) і значно більш пологу – західну. Тіні та виступи закривають частину інтер'єру, але на дні ями видно світлі валуни, осад уздовж стінок і яскраві еолові відкладення. Дані об'єкти можуть бути основною метою досліджень найпершими поселенцями.

Висновки. Ретельні вивчення темних плям на поверхні Марса показали, що вони є своєрідними кам'яними колодязями (чи провалами в стелі) до глибоких вулканічних печер, які розташовані під поверхнею планети. Стінки усередині провалів йдуть майже вертикально; тому вони не можуть бути зруйнованими ерозією ямами. Ці провали до вулканічних печер могли утворюватися в моменти, коли потоки лави випалювали під поверхнею планети порожнечі на схилах щитових вулканів. Пізніше, внаслідок землетрусів, зовнішні шари у стелях печер могли провалюватися та утворювати темні плями на Марсі. А різкі краї таких провалів вказують на їхню молодість. Вік наймолодших слідів активності вулканів на Марсі оцінюють у мільйони років. Діаметри таких вулканічних печер оцінюють від кількох десятків до кількох сотень метрів. Якраз ці лавові печери та печери у льодовиках на Марсі мають стати основною метою досліджень найпершими поселенцями на цій планеті, та можуть бути використані ними для розміщення житлових приміщень. Адже радіаційний фон на поверхні Марса майже у два десятки разів вищий, ніж на нашій планеті.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Kahn R. The evolution of CO_2 on Mars. *Icarus*. 1985. Vol. 62, №2. P. 175-190.

2. Morozhenko A. V., Vid'machenko A. P. Polarimetry and Physics of Solar System Bodies. *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*, м. Ялта, 20 вересня - 4 жовтня 2003 р. Ялта, 2003. С. 369-384.

3. Morozhenko A. V., Vidmachenko A. P. Optical parameters of Martian dust and its influence on the exploration of Mars. *Dust in the Atmosphere of Mars and Its Impact on Human Exploration. Proceedings of the conference held.* LPI Contribution. Houston, Texas, 13-15 June, 2017. No. 1966. Houston, Texas, 2017. id.6010.

4. Vid'machenko A. P., Morozhenko A. V. Mapping of the physical characteristics and mineral composition of a superficial layer of the Moon or Mars and ultra-violet polarimetry from the orbital station. 36 *Annual Lunar and Planetary Science Conference*. In League City, Texas, March 14-18, 2005. League City, 2005. #1015.

5. Відьмаченко А. П. Дослідження Марса космічними апаратами. *11 Міжнародна наукова конференція* "*Астрономічна школа молодих учених"*, м. Херсон, 26-29 травня 2009 р. Херсон, 2009. С. 11-12.

6. Відьмаченко А. П. Вода на Марсі. *Астрон. календар*. 2009. Вип. 56. С. 225-249.

7. Відьмаченко А. П. Сезонні зміни на Юпітері: 1. Фактор активності півкуль. *Кінематика та фізика небесних тіл.* 2016. Т. 32, № 4. С.189-195.

8. Vidmachenko A. P. Where Should Search Traces of Life, Which Could Appear on Mars in the First 300 Million Years. *Fourth International Conference on Early Mars: Geologic, Hydrologic, and Climatic Evolution and the Implications for Life, Proceedings of the conference.* In Flagstaff, Arizona, 2-6 October 2017. LPI Contribution No. 2014. Flagstaff, 2017. id.3005.

9. Відьмаченко А. П. Порівняльні особливості вулканів на тілах Сонячної системи. *20 Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених"*, м. Умань, 23-24 травня 2018 р. Умань, 2018. С. 9-12.

10. Відьмаченко А. П. Сучасна вулканічна діяльність на Місяці. *20 Міжнародна наукова конференція* "*Астрономічна школа молодих вчених"*, м. Умань, 23-24 травня 2018 р. Умань, 2018. С. 5-7.

11. Vidmachenko A. P. Comparison of features of impact and volcanic craters on the surface of Mars. *Proceedings of VIII ISPCo "Progressive research in the modern world"* (April 27-29, 2023), Boston, USA. Chapter 43. Boston: BoScience Publisher, 2023. P. 237-246.

12. Vidmachenko A. P. Thermal properties of the surface of Mars. *Proceedings of VII ISPCo.* "*Progressive research in the modern world*" (March 29-31, 2023), Boston, USA. Chapter 42 Boston: BoScience Publisher, 2023. P. 243-252.

13. Vidmachenko A. P. Volcanoes of Mars, Conference Proceedings of the VIII ISPCo "*Theories of world science and technology implementation*" (May 08-10), Osaka, Japan. Chapter 2. Osaka, 2023. P. 3-19.

14. Відьмаченко А. П., Клименко В. М., Мороженко А. В. Уявне спектральне альбедо диска Марса у вересні-жовтні 1977 р. *Дослідження Сонячної системи*. 1981. Т. 14, № 4. С. 157-159.

15. Відьмаченко А. П., Мозговий О. В., Стеклов О. Ф. Про вулкани на Марсі. *Матеріали 11 Всеукраїнської НКО «Астрономія і сьогодення»*, м. Вінниця, 12 квітня 2023 р. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2023. С. 76-81.

16. Відьмаченко А. П., Мозговий О. В., Стеклов О. Ф. Особливості рельєфу поверхні Марса. *Матеріали 11 Всеукраїнської НКО «Астрономія і сьогодення»*, м. Вінниця, 12 квітня 2023 р. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2023. С. 66-71.

17. Відьмаченко А. П., Мозговий О. В., Стеклов О. Ф. Вулканічні печери Марса та їх придатність для колоністів. *Матеріали 11 Всеукраїнської НКО «Астрономія і сьогодення»*, м. Вінниця, 12 квітня 2023 р. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2023. С. 81-87.

18. Відьмаченко А. П., Мозговий О. В., Стеклов О. Ф., Грудинін Б. О. Особливості рельєфу поверхні Марса, обумовлені водою. *Матеріали 11 Всеукраїнської НКО «Астрономія і сьогодення»*, м. Вінниця, 12 квітня 2023 р. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2023. С. 113-118.

19. Vidmachenko A. P., Steklov A. F. Features of volcanic structures on Venus. *Proceedings of the 9th ISPCo.* "*Modern directions of scientific research development*", 23-25.02.2022, Chicago, USA. Chicago: BoScience Publisher, 2022. P. 195-204.

20. Vidmachenko A. P., Steklov A. F. How long ago has water flowed on Mars surface*? Results of modern scientific research and development, Proceedings of XI ISPCo*, 16-18.01.2022, Madrid, Spain. Madrid: Barca Academy Publishing, 2022. P. 226-232.

UDC 523.43

Vertical sinkholes to volcanic caves on the surface of Mars

Anatoliy Vidmachenko, Oleksandr Mozghovyi, Oleksii Steklov

Abstract. Studies of Mars have indicated the presence of caves of volcanic and possibly glacial origin on its surface. During volcanic eruptions, flows of lava flow out. As they cool, they are covered with a hard crust and form lava tubes. After the eruption is over, the lava flows out of the tubes at the lowest point and leaves the cavity. Therefore, lava caves are located on the slopes of volcanoes close to the surface. Sometimes their upper part collapses. A large part of the surface of Mars is covered with volcanic craters and mountain ranges. Dark, rounded spots were found in photographs of one of the volcanic plateaus of Tharsis. Their study showed that they are entrances to volcanic caves. The relative youth of these formations is indicated by the sharp edges of these dips. Lava tubes on Mars appear as straight chains of collapses with flat bottoms and nearly vertical slopes. Such objects should become the object of research by future settlers.

Keywords: Mars, volcanic caves, lava tubes, objects of research.

References

1. Kahn, R. (1985). *The evolution of CO_2 on Mars*. Icarus, **62** (2), 175-190.

2. Morozhenko, A. V., Vid'machenko, A. P. (2004). *Polarimetry and Physics of Solar System Bodies*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, 20 September - 4 October, 2003, Yalta, Ukraine, 369-384.

3. Morozhenko, A. V., Vidmachenko, A. P. (2017). *Optical parameters of Martian dust and its influence on the exploration of Mars*, Dust in the Atmosphere of Mars and Its Impact on Human Exploration, Proceedings of the conference held, 3-15 June, 2017, Houston, Texas, LPI Contribution, 1966, id.6010.

4. Vid'machenko, A. P., Morozhenko, A. V. (2005). *Mapping of the physical characteristics and mineral composition of a superficial layer of the Moon or Mars and ultra-violet polarimetry from the orbital station*, 36 Annual Lunar and Planetary Science Conference, March 14-18, 2005, in League City, Texas, #1015.

5. Vidmachenko, A. P. (2009). *Research of the Mars by space vehicles*, 11 International Scientific Conference "Astronomical School of Young Scientists", May 26-29, 2009, Kherson, Ukraine, 11-12. [in Ukrainian]

6. Vidmachenko, A. P. (2009). *Water on Mars*, Astron. Almanac, **56**, 225-249. [in Ukrainian]
7. Vidmachenko, A. P. (2016). *Seasonal changes on Jupiter: 1. Factor of activity of the hemispheres*, Kinematics and Physics of Celestial Bodies, **32** (4), 189-195.
8. Vidmachenko, A. P. (2017). *Where Should Search Traces of Life, Which Could Appear on Mars in the First 300 Million Years*. Fourth International Conference on Early Mars: Geologic, Hydrologic, and Climatic Evolution and the Implications for Life, Proceedings of the conference held 2-6 October, 2017 in Flagstaff, Arizona. LPI Contribution No. 2014, id.3005.
9. Vidmachenko, A. P. (2018). *Comparative features of volcanoes on Solar system bodies*, 20 International scientific conference "Astronomical School of Young Scientists", May 23-24, 2018, Uman, Ukraine, 9-12. [in Ukrainian]
10. Vidmachenko, A. P. (2018). *Modern volcanic activity on the Moon*, 20 International scientific conference "Astronomical School of Young Scientists", May 23-24, 2018, Uman, Ukraine, 5-7. [in Ukrainian]
11. Vidmachenko, A. P. (2023). *Comparison of features of impact and volcanic craters on the surface of Mars*, Proceedings of VIII ISPCo "Progressive research in the modern world" (April 27-29, 2023), Boston, USA, Chapter 43, BoScience Publisher, 237-246.
12. Vidmachenko, A. P. (2023). *Thermal properties of the surface of Mars*, Proceedings of VII ISPCo. "Progressive research in the modern world" (March 29-31, 2023), Boston, USA, Chapter 42, BoScience Publisher, 243-252.
13. Vidmachenko, A. P. (2023). *Volcanoes of Mars*, Conference Proceedings of the VIII ISPCo "Theories of world science and technology implementation" (May 08-10), Osaka, Japan, Chapter 2, 3-19.
14. Vidmachenko, A. P., Klimenko, V. M., Morozhenko, A. V. (1981). *Apparent spectral albedos of the disk of Mars in September-October 1977*, Solar System Research, **14** (4), 157-159.
15. Vidmachenko, A. P., Mozghovyi, O. V., Steklov, O. F. (2023). *About volcanoes on Mars*, Proceedings of 11 All-Ukrainian SCo "Astronomy and present day", April 12, 2023, Vinnytsia, Ukraine, LLC "TVORY", 76-81. [in Ukrainian]
16. Vidmachenko, A. P., Mozghovyi, O. V., Steklov, O. F. (2023). *Features of the relief on the surface of Mars*, Proceedings of 11 All-Ukrainian SCo "Astronomy and present day", April 12, 2023, Vinnytsia, Ukraine, LLC "TVORY", 66-71. [in Ukrainian]
17. Vidmachenko, A. P., Mozghovyi, O. V., Steklov, O. F. (2023). *Volcanic caves of Mars and their suitability for colonists*, Proceedings of 11 All-Ukrainian SCo "Astronomy and present day", April 12, 2023, Vinnytsia, Ukraine, LLC "TVORY", 81-87. [in Ukrainian]
18. Vidmachenko, A. P., Mozghovyi, O. V., Steklov, O. F., Grudynin B. O. (2023). *Features of the relief of the surface of Mars caused by water*, Proceedings of 11 All-Ukrainian SCo "Astronomy and present day", April 12, 2023, Vinnytsia, Ukraine, LLC "TVORY", 113-118. [in Ukrainian]
19. Vidmachenko, A. P., Steklov, A. F. (2022). *Features of volcanic structures on Venus*, Proceedings of the 9th ISPCo. "Modern directions of scientific research development", 23-25.02.2022, Chicago, USA, BoScience Publisher, 195-204.
20. Vidmachenko, A. P., Steklov, A. F. (2022). *How long ago has water flowed on Mars surface?* Results of modern scientific research and development, Proceedings of XI ISPCo, 16-18.01.2022, Madrid, Spain, Barca Academy Publishing, 226-232.

Про авторів / About the authors

Анатолій Відьмаченко, доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України, професор кафедри фізики Національного університету біоресурсів і природокористування України, головний науковий співробітник відділу фізики субзоряних і планетних систем Головної астрономічної обсерваторії НАН України, вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна;

Anatoliy Vidmachenko, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine, Professor of the Department of Physics of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Chief Researcher of the Department of Physics of Substellar and Planetary Systems of the Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, 15 Defense Heroes Str., Kyiv 03041, Ukraine;

Олександр Мозговий, кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Oleksandr Mozghovyi, Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics, Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олексій Стєклов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу фізики субзоряних і планетних систем Головної астрономічної обсерваторії НАН України, вул. Академіка Заболотного, 27, м. Київ, 02000, Україна;

Oleksiy Steklov, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher of the Department of Physics of Substellar and Planetary Systems of the Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, 27 Academician Zabolotniy Str., Kyiv 02000, Ukraine.

Отримано / Received 12.03.2024
Доопрацьовано / Revised 06.05.2024

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 36–47.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 36–47.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 678.01:[536+537]+678.046.2

Фізичні властивості нанокомпозитів ПХТФЕ-ТРГ та ПХТФЕ-ТРГ/SiO_2

Тарас Січкар[1], Максим Рокицький[2], Галина Рокицька[3], Людмила Благодаренко[4], Микола Шут[5]

[1, 2, 3, 4, 5]Український державний університет імені Михайла Драгоманова, кафедра загальної фізики та методики навчання фізики, м. Київ, Україна

[1]tsichkar@ukr.net
https://orcid.org/0000-0001-8885-0170

[2]maksalrokitskiy@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1057-5057

[3]galina-darla@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-3258-4640

[4]kzf@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-5501-5416

[5]mishut1@ukr.net
https://orcid.org/0000-0001-6342-2129

Анотація. Отримано полімерні нанокомпозити (ПНК) на основі поліхлортрифторетилену (ПХТФЕ) при малому вмісті диспергованого терморозширеного графіту ТРГ та модифікованого наповнювача ТРГ/SiO_2, що характеризуються високими показниками електрофізичних властивостей. Досліджено особливості електронної структури поверхні композитів. Встановлено закономірності зміни електрофізичних властивостей композитів залежно від вмісту наповнювачів та температури. На основі досліджень та порівняльного аналізу теплофізичних властивостей (питома теплоємність c_p, температурний коефіцієнт лінійного розширення α) систем досліджено вплив структурно морфологічного стану компонент та їх концентрації, рівня міжфазної взаємодії на фізичні властивості нанокомпозитів.

Встановлено, що модифікований нанонаповнювач проявляє більшу активність по відношенню до полімерної матриці ніж немодифікований. У композитах проявляється подвійна дія модифікованого нанонаповнювача на структуру матриці, яка полягає в утворенні потужної кристалічної структури в зонах впливу нанонаповнювача та аморфізації полімерної матриці в периферійних зонах. З’ясовано, що результатом аморфізації матриці є зменшення площі піків температурних рефлексів на температурних залежностях питомої теплоємності та зміна абсолютного значення температурного коефіцієнта лінійного розширення при збільшенні концентрації модифікованого ТРГ.

Ключові слова: поліхлортрифторетилен, терморозширений графіт, діоксид кремнію, електропровідність, теплоємність, лінійне розширення.

1. Вступ

Розробка нових ПНК із заданими властивостями та дослідження закономірностей їх зміни дозволяє створювати матеріали з динамічно керованими електрофізичними параметрами. Створення композиційних матеріалів може базуватися не тільки на пошуку та синтезі компонентів з унікальними властивостями, але і на наданні особливих властивостей вже відомим складовим ПНК. Такі властивості можуть бути отримані шляхом використання модифікаторів поверхні частинок наповнювача в ультрадисперсному стані за умови співрозмірності їх розміру з радіусом дії сил міжмолекулярної взаємодії. Використання нанорозмірних складових для отримання композиційних матеріалів дозволяє регулювати їх фазовий стан та структуру. Рівномірний розподіл високодисперсних частинок полімерної матриці при отриманні ПНК також є одним з важливих факторів, які призводять до поліпшення їх функціональних властивостей.

На особливу увагу заслуговують ПНК на основі ПХТФЕ та активного як чистого так і модифікованого SiO_2 ТРГ.

Властивості деяких композитів, що містять терморозширений графіт, досліджені авторами робіт [1-5], в яких на основі експериментальних досліджень систем ряду полімерів з ТРГ встановлені закономірності зміни їх макроструктури, електрофізичних та фізико-механічних властивостей. У роботах [1-7] запропоновано моделі процесів перколяції, побудови кластерів у бінарних системах, реалізації порогів перколяції та механізмів їх утворення залежно від зміни вмісту компонентів.

2. Постановка проблеми

Метою даної роботи є встановлення закономірностей впливу зміни вмісту компонентів та модифікування поверхні наповнювача на тепло- та електрофізичні властивості композитів систем ПХТФЕ-ТРГ та ПХТФЕ-ТРГ/SiO_2, а також способів отримання композиційних матеріалів з високими показниками тепло- та електрофізичних властивостей при малому вмісті наповнювачів із збереженням унікальних властивостей полімеру.

3. Експериментальна частина

В якості полімерної матриці для композитів був обраний ПХТФЕ, що характеризується стабільно високими показниками діелектричних властивостей та ударної в’язкості. Як дисперсні наповнювачі використовували чистий дисперсний ТРГ і дисперсний хімічно модифікований ультрадисперсним діоксидом олова ($S_{пит}$ = 300 м^2/г) ТРГ (ТРГ/SiO_2).

Дисперсні наповнювачі готували у два етапи. На першому етапі проводили диспергування терморозширеного графіту за допомогою диспергатора УЗДН-А на частоті 22 кГц [12]. На другому етапі проводили модифікування диспергованого ТРГ діоксидом кремнію [16]. Отримані порошкоподібні композити поміщали у герметично закриті судини для проведення досліджень методами електронної мікро- та рентгенівської фотоелектронної спектроскопії (РФС).

Вимірювання електропровідності проводили двоконтактним методом на частотах 0,1, 1 та 10 кГц. Електронну структуру поверхні диспергованих зразків ТРГ та ТРГ/SiO_2 досліджували методом рентгенівської фотоелектронної спектроскопії (РФС) на електронному спектрометрі з енергоаналізатором PHOIBOS CPECS (E MgK_α = 1253,6 еВ, P = 200 Вт, $p = 2\cdot10^{-7}$ Па). Форму та розмір диспергованого ТРГ і модифікованих частинок ТРГ/SiO_2 вивчали за допомогою електронного мікроскопа РЕМ 200.

Дослідження температурних залежностей питомої теплоємності ПКМ проводилися методом диференціальної скануючої калориметрії [13] в температурному інтервалі 293 - 503 К при різному об'ємному вмісті дисперсних наповнювача та модифікатора. Вивчення температурного коефіцієнта лінійного розширення (ТКЛР) проводили в температурному інтервалі 293 - 503 К за допомогою установки [13], що являє собою поєднання модифікованого лінійного дилатометра індукційного типу та кварцового дилатометра, в якому замість кварцу в якості еталону використано інвар.

4. Результати та їх обговорення

Як видно з рис. 1 а, у зв'язку з особливостями кристалічної решітки графіту, диспергація ТРГ, приводить до утворення певної "пелюсткової" системи частинок, розміри пелюстки вздовж складають порядку 1 ÷ 5 мкм, а в поперек – 4 ÷ 5 нм. Частинки SiO_2 мають розміри порядку 10 ÷ 20 нм (рис. 1 б).

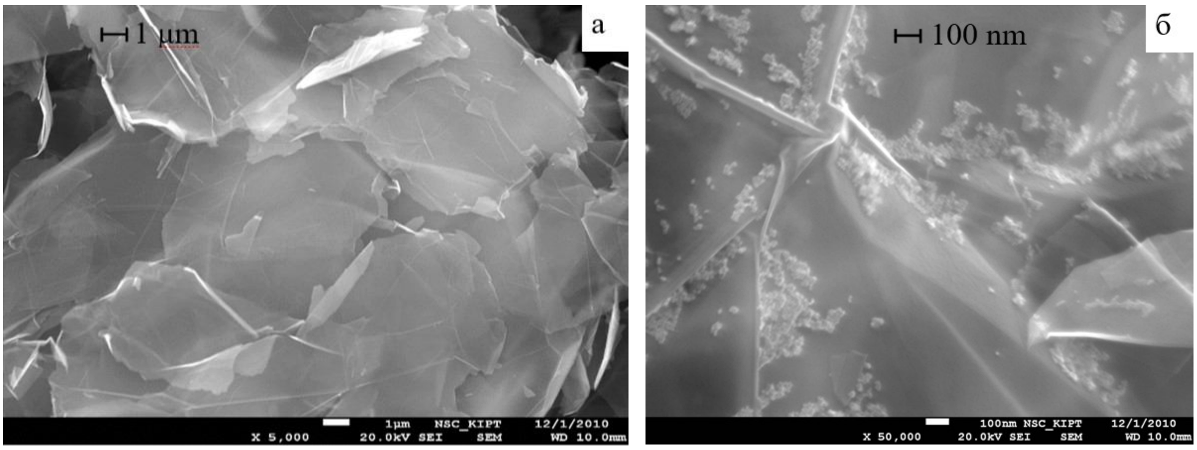


Рис. 1. Електронно-мікроскопічні зображення немодифікованого ТРГ (а) та ТРГ модифікованого частинками SiO_2 (б)

Дослідження електронної структури поверхні зразків проводились на основі вивчення спектрів C1*s*- та Si2*p*-рівнів, які були розкладені на компоненти за допомогою методу Гаусса-Ньютона. Площа компонентів визначалася без урахування фону методом Ширлі [8]. Дослідження не виявили хімічного зв'язку C-S, проте можлива наявність зв'язків типу C-O-Si. Фрагменти SiO_2 є діелектричними вкрапленнями, електрично ізольовані від поверхні карбону. ТРГ присутній у зразках у трьох основних станах, один з яких з енергією зв'язку $E_{зв}$ = 284,3 еВ плавно зникає зі збільшенням вмісту SiO_2 і може бути аморфною фазою ТРГ.

На відміну від алмазу в монокристалі графіту існують зв'язки σ і електронні хмари, що утворюють електронні шари, паралельні моношару атомів карбону і зумовлюють електропровідність в паралельному до них напрямку. У перпендикулярному напрямку графіт поводиться як напівпровідник, провідність якого визначається позитивно зарядженими "дірками". У зв'язку з цим електропровідність графіту в паралельному напрямку ~ на 2-3 порядки перевищує електропровідність у перпендикулярному напрямку. Тому залежність властивостей від температури є складною, оскільки електроопір напівпровідників зі збільшенням температури зменшується. Можливий мінімум температурної залежності опору, що зміщується в область нижчих температур. Таким чином, за нахилом кривих на температурній залежності опору можна оцінювати ступінь наближення структури до ідеальної графітової та вплив напівпровідникової складової електропровідності наповнювачів.

Як видно з рис. 2 а при збільшенні вмісту ТРГ до 0,96 і ТРГ/30%SiO_2 до 0,82 % (для ПНК з модифікованим наповнювачем) їх електропровідність на частоті 0,1 кГц спочатку монотонно зростає в порівнянні з електропровідністю полімеру, а потім, при збільшенні вмісту наповнювачів до 1,57 та 1,32 %, інтенсивно (~ на 7 порядків величини) зростає.

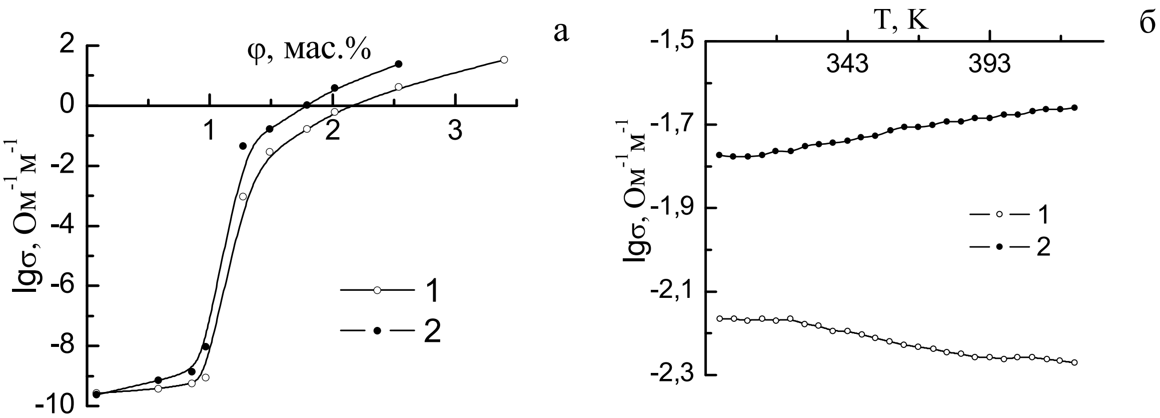


Рис. 2. Залежність електропровідності lgσ композитів систем на частоті 0,1 кГц 1 - ПХТФЕ - 1,53% ТРГ, 2 - ПХТФЕ - 1,55% ТРГ/30%SiO_2 від вмісту наповнювачів (а) та від температури (б)

Зростання електропровідності композитів системи ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 більш інтенсивне. Їх електропровідність значно вища за електропровідність композиту з немодифікованим наповнювачем. За подальшого збільшення вмісту наповнювачів (до 3,47 %) швидкість зростання електропровідності обох композитів значно уповільнюється (рис. 2 а). Концентраційні залежності lg$\sigma(\varphi)$ на частотах 1,0 та 10 кГц виявляють такий самий характер зміни електропровідності. Модифікування поверхні дисперсного ТРГ ультрадисперсним діоксидом кремнію призводить також до зміни температурної залежності електропровідності композитів (рис. 2 б). Характер зміни залежності lg$\sigma(T)$ композиту ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2, що містить 1,55% модифікованого наповнювача, при нагріванні змінюється від низхідної (для системи ПХТФЕ-ТРГ) до зростаючої.

Проведена оцінка товщини полімерного шару між дисперсними провідними частинами ТРГ у системах з урахуванням їхньої форми та розмірів показала, що для вмісту 1,55 % ТРГ вона становить 5,8 мкм, а для вмісту 1,53 % модифікованого ТРГ (ТРГ/30%SiO_2) – 6,3 мкм.

Як відомо [9], електропровідність σ ПНК з дисперсним наповнювачем у змінних електромагнітних полях має дві складові - наскрізну σ_d, яка збігається з електропровідністю при постійному струмі, та релаксаційну σ_τ:

$$\sigma = \sigma_d + \sigma_\tau \,. \qquad (2)$$

Релаксаційна складова, у свою чергу, визначається сукупністю релаксаційних процесів у полімері, наповнювачі та міжфазному шарі [9]. Серед них, як правило, домінуючим релаксаційним процесом, що визначає провідність композитів з електропровідним дисперсним наповнювачем, є процес міжфазної поляризації [9]. Це проявляється як у досліджуваному (0,1 – 10 кГц) так і у гігагерцовому діапазоні частот [8-10] при високих значеннях міжфазної поверхні, тобто при малому розмірі дисперсних частинок наповнювача та залежить від співвідношення вмісту компонентів.

Композити ПХТФЕ-ТРГ і ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 з концентраціями нижчими за поріг перколяції (φ_1 = 0,95 % і φ_2 = 0,82 %), поводяться як діелектрики (рис. 2 а). Їхня електропровідність при малому вмісті наповнювача визначається релаксаційною складовою σ_τ. Деяке зростання електропровідності зі збільшенням вмісту наповнювача порівняно з електропровідністю полімеру (рис. 2 а) у системі ПХТФЕ-ТРГ пов’язано переважно з виникненням процесів поляризації у міжфазному шарі полімер - дисперсний ТРГ [8, 9]. Більш інтенсивне наростання електропровідності при збільшенні вмісту наповнювача як до, так і після порога перколяції в композитах системи ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 у порівнянні з відповідними композитами системи ПХТФЕ-ТРГ відбувається за рахунок додаткової міжфазної поляризації в міжфазних шарах ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 міжфазних шарів ТРГ/30%SiO_2 та ПХТФЕ-SiO_2.

Зі збільшенням вмісту наповнювачів (φ_1 > 0,95 % і φ_2 > 0,82 %) електропровідність обох систем інтенсивно зростає (рис. 2 а) внаслідок перекриття більш електропровідних полімерних шарів між дисперсними провідними частинками ТРГ. Більш висока електропровідність композитів системи ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 при концентраціях вище порога перколяції в порівнянні з системою ПХТФЕ-ТРГ пов’язана, очевидно, з проявом релаксаційних складових міжфазних шарів ТРГ/30%SiO_2 і ПХТФЕ-SiO_2. Подібний ефект зростання електропровідності композитів з оксидними наповнювачами порівняно з електропровідністю провідного наповнювача виявлено в системах Al_2O_3/AgI, Al_2O_3/SiO_2, AgI/SiO_2, ПХТФЕ/SiO_2, CuI/SiO_2 [9], а також у системі пентапласт-AgI [10, 11].

Низькі пороги перколяції в обох системах (φ_1 = 0,95 % і φ_2 = 0,82 %) є свідченням високої ефективності запропонованого способу диспергування ТРГ у спиртовому середовищі з наступним змішуванням сумішей наповнювача з полімером, що мають порівнянну густину, випаровуванням спирту та термічним пресуванням. Як показали електронномікроскопічні дослідження, такий спосіб ефективно сприяє диспергації та рівномірному розподілу диспергованих та модифікованих частинок ТРГ у середовищі полімерної матриці.

Зміна нахилу кривих lg$\sigma(T)$ при нагріванні від низхідної залежності в системі ПХТФЕ-ТРГ до зростаючої в системі ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 (рис. 2 б) пов’язане з посиленням напівпровідникової складової електропровідності атомів карбону ТРГ в системі ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2, і, ймовірно, з проявом зв’язків C-O-Si, що виникають на межі розділу компонентів ТРГ/30%SiO_2 [7].

Результати дослідження температурних залежностей питомої теплоємності композитів систем ПХТФЕ-ТРГ та ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 з різним вмістом ТРГ представлені на рис. 3.

Аналіз температурних залежностей питомої теплоємності системи ПХТФЕ-ТРГ дозволяє виділити два основних рефлекси на вказаних термограмах. Це свідчить про розшарування кристалічної структури ПХТФЕ на дві складові: низькотемпературну при ≈ 175 – 185 °С та високотемпературну при ≈ 210 – 220 °С. Внесення нанонаповнювача зі збільшенням концентрації приводить до поступового зростання температур прояву вказаних рефлексів при досягненні порогу перколяції (≈ 0,95 %) [7, 12] (рис. 3 а).

Збільшення концентрації наповнювача, як в інтервалі перколяції, так і при перевищенні перколяційних значень демонструє припинення зростання температур вказаних рефлексів, які відповідають за плавлення двох складових кристалічної структури композиту (рис. 3. б, в).

Така особливість температурних залежностей питомої теплоємності свідчить про подвійну дію нанонаповнювача на кристалічну структуру композиту [13, 14]. З одного боку, частинки нанонаповнювача ініціюють появу центрів кристалізації, а з іншого боку, наповнювач при взаємодії із полімерними ланцюгами зв'язує достатньо довгі ділянки макромолекул.

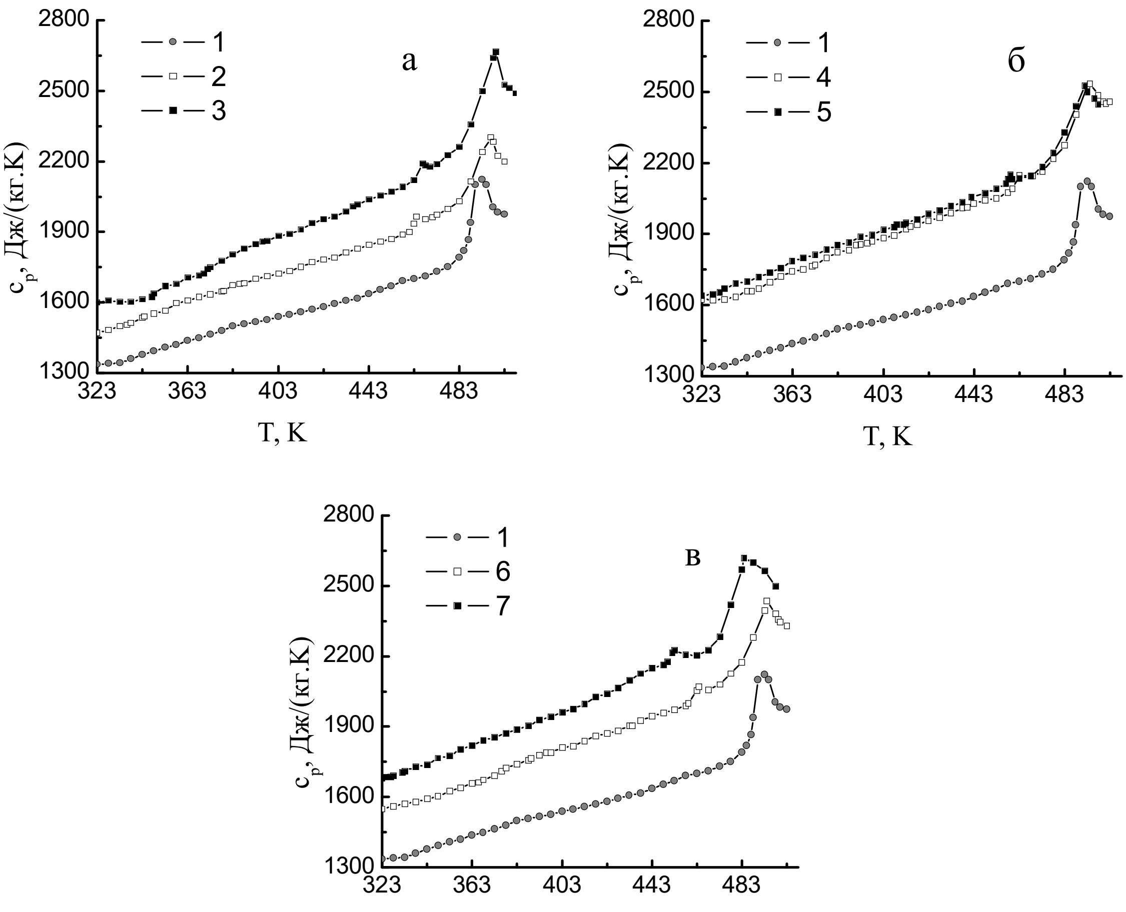


Рис. 3. Температурні залежності питомої теплоємності c_p композитів систем 1 - ПХТФЕ, 2 - ПХТФЕ - 0,96% ТРГ, 3 - ПХТФЕ - 0,95% ТРГ/30%SiO_2, 4 - ПХТФЕ - 1,55% ТРГ, 5 - ПХТФЕ - 1,53% ТРГ/30%SiO_2, 6 - ПХТФЕ - 2,5% ТРГ і 7 - ПХТФЕ - 2,43% ТРГ/30%SiO_2 відповідно

Таким чином, така дія нанонаповнювача носить точковий характер і зі збільшенням концентрації таких точок стає все більше. За рахунок цього в зонах контакту полімер - наповнювач формуються кристаліти більшого розміру. Разом з тим, точкова фіксація ділянок макромолекул обмежує їх рух в периферійних зонах, тому кристалізація в цих зонах стає утрудненою.

Існування таких конкурентних факторів приводить до їх взаємної компенсації, про що свідчить стабілізація температур рефлексів на термограмах після досягнення та перевищення порогу перколяції, що підтверджується даними рис. 4. Додатковим підтвердженням цього є характер зміни площі рефлексів на термограмах для обох складових кристалічної структури матриці.

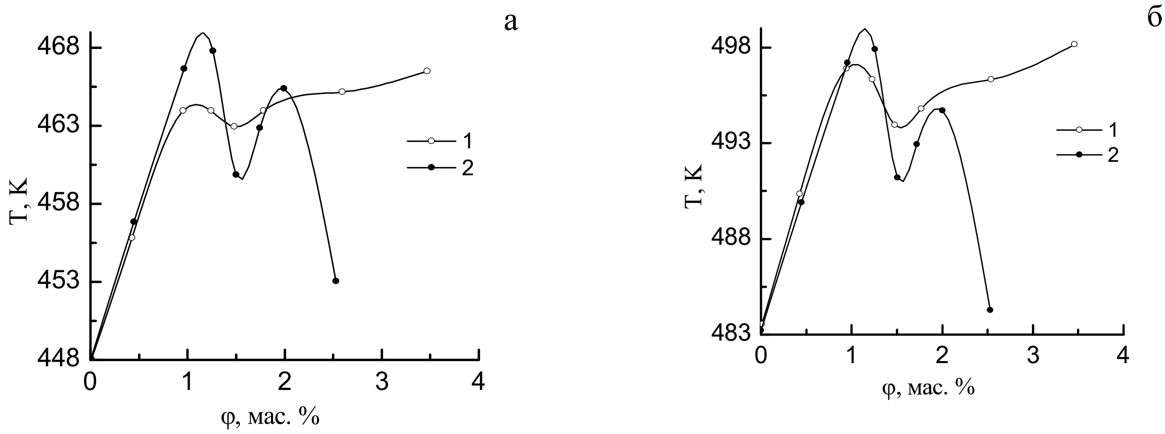


Рис. 4. Концентраційні залежності температури плавлення низькотемпературної складової систем 1 - ПХТФЕ – ТРГ та 2 - ПХТФЕ - ТРГ/30%SiO_2 (а) і високотемпературної складової систем 1 - ПХТФЕ – ТРГ та 2 - ПХТФЕ - ТРГ/30%SiO_2 (б)

Аналіз концентраційних залежностей питомої теплоємності системи ПХТФЕ - модифікований диспергований ТРГ також дозволяє виділити два основних рефлекси. Внесення модифікованого нанонаповнювача із збільшенням концентрації приводить до поступового зростання температур прояву рефлексів до порогу перколяції та включаючи її інтервал (0,95 ÷ 1,55 %).

Подвійна дія модифікованого нанонаповнювача на кристалічну складову структури матриці полягає в тому, що відбувається утворення більш розвиненої кристалічної структури в зонах взаємодії полімер - модифікований нанонаповнювач та, навпаки, певна аморфізація в периферійних зонах. Одночасно, збільшення концентрації модифікованого нанонаповнювача приводить до конкуренції росту сусідніх кристалітів та можливості фіксування макромолекул "з обох кінців" на частинках модифікованого нанонаповнювача.

Якщо у випадку немодифікованого диспергованого ТРГ одночасна дія конкуруючих факторів призводить до їх взаємної компенсації і, як наслідок, стабілізування температур прояву рефлексів після досягнення порогу перколяції та перевищення порогу перколяції, то у випадку модифікованого нанонаповнювача взаємодія полімер-наповнювач підсилюється і при перевищенні порогу перколяції другий фактор стає переважаючим, що приводить до зменшення температур відповідних рефлексів практично до їх значення, які відповідають чистій матриці.

Надійність викладених вище результатів підтверджується дослідженнями температурних залежностей ТКЛР та $d\alpha/dT$ композицій ПХТФЕ - ТРГ і ПХТФЕ - ТРГ/30%SiO_2 (рис. 5).

Як видно з рис. 5 склування аморфної складової чистого ПХТФЕ спостерігається в температурному інтервалі 45 ÷ 50 °C, що цілком узгоджується із літературними даними [15]. Внесення до складу систем 0,96% ТРГ та 0,95% ТРГ/30%SiO_2 призводить до пониження температур склування полімерної матриці, що свідчить про її розрихлення, що одночасно зі збільшенням температур плавлення полімерної складової (рис. 3) підтверджує складний характер подвійної дії модифікованого нанонаповнювача на кристалізацію ПХТФЕ. При збільшенні концентрації нанонаповнювачів до значень 2,5% ТРГ та 2,43% ТРГ/30%SiO_2 відповідно, спостерігається зростання температур склування полімерної матриці до значень близьких до характерних для чистого полімеру у випадку немодифікованого диспергованого ТРГ та до вищих значень у випадку модифікованого нанонаповнювача. Так температура склування полімерної матриці у складі системи ПХТФЕ - ТРГ/30%SiO_2 змінюється від 44 до 59 °C (рис. 5 б), що підтверджує вищу активність модифікованого ТРГ по відношенню до немодифікованого.

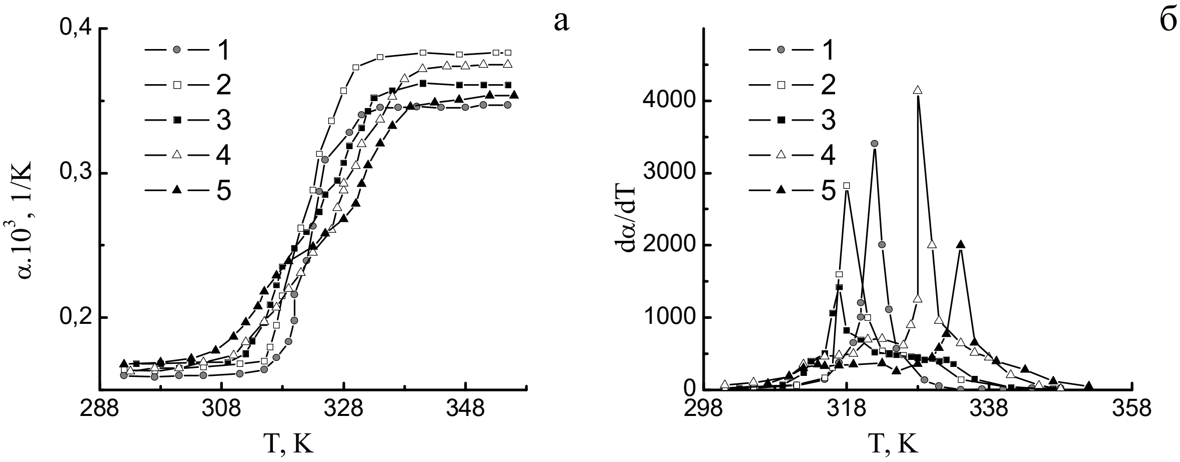


Рис. 5. Температурні залежності α (а) та dα/dT (б) 1 - ПХТФЕ, 2 - ПХТФЕ - 0,96% ТРГ, 3 - ПХТФЕ - 0,95% ТРГ/30%SiO_2, 4 - ПХТФЕ - 2,5% ТРГ і 5 - ПХТФЕ - 2,43% ТРГ/30%SiO_2 відповідно

Комплексний аналіз результатів дослідження концентраційних залежностей густини [13, 16] і температурних залежностей питомої теплоємності та термічного коефіцієнта лінійного розширення дозволили встановити, що: модифікований нанонаповнювач проявляє більшу активність по відношенню до полімерної матриці ніж немодифікований; проявляється подвійна дія модифікованого нанонаповнювача на структуру матриці, яка полягає в утворенні потужної кристалічної структури в зонах впливу нанонаповнювача та аморфізації матриці в периферійних зонах; результатом аморфізації є зменшення площі піків температурних рефлексів на температурних залежностях питомої теплоємності та зміна абсолютного значення температурного коефіцієнта лінійного розширення при збільшенні концентрації модифікованого ТРГ.

Висновки. В результаті проведених робіт були отримані композити систем ПХТФЕ-ТРГ та ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 з малим вмістом (1,55 - 3,47 %) наповнювачів (ТРГ та ТРГ/30%SiO_2) та високими показниками тепло- та електрофізичних властивостей. Композити системи ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 характеризуються вищою електропровідністю порівняно з системою ПХТФЕ-ТРГ, що, очевидно, пов'язано з проявом релаксаційних складових міжфазних шарів ТРГ/30%SiO_2 та ПХТФЕ-SiO_2. Встановлено що в залежності від концентрації нанонаповнювача структура матриці і системи в цілому демонструє перетворення за розміром неоднорідності. Зміна розміру неоднорідності структури системи пов'язана з переходом від неоднорідності, як розміру кристалітів, ріст яких активований нанонаповнювачем при низьких концентраціях, через поріг перколяції, до неоднорідностей, пов'язаних з коагуляцією наночастинок при концентраціях, що перевищують поріг перколяції. Встановлено, що у випадку нанонаповнювачів недоцільно використовувати концентрації, що значно перевищують поріг перколяції, оскільки це призводить до коагуляції частинок наповнювача та рихлення матриці.

Проведені дослідження тепло- та електрофізичних властивостей свідчать, що модифікація нанонаповнювача (ТРГ/30%SiO_2) сприяє збільшенню міжмолекулярної взаємодії в системі наповнювач-матриця, а модифікований нанонаповнювач проявляє більшу активність по відношенню до полімерної матриці ніж немодифікований. Виявлено, що у композитах досліджуваних систем проявляється подвійна дія нанонаповнювача на структуру матриці, що полягає в утворенні потужної кристалічної структури в зонах впливу нанонаповнювача та аморфізації матриці в периферійних зонах.

Таким чином, запропоновані способи поліпшення тепло- та електрофізичних властивостей композитів системи ПХТФЕ-ТРГ та ПХТФЕ-ТРГ/30%SiO_2 засобами диспергування та модифікації поверхні ТРГ ультрадисперсним діелектриком - SiO_2 показали себе дієвими та дозволяють отримати нові високотехнологічні матеріали для приладобудування та електротехніки.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Семко Л. С., Черныш И. Г., Рево С. Л., Дашевский Н. Н. Механические свойства композиционных материалов на основе полиэтилена и терморасширенного графита. *Механика композитных материалов*. 1992. № 3. С. 307–314.
2. Семко Л. С., Черныш И. Г., Свинцицкий Н. I. Динамические механические свойства композиционных материалов на основе полиэтилена и терморасширенного графита. *Проблемы прочности*. 1994. № 7. С. 84–91.
3. Semko L. S., Popov P. E., Kocherov V. L. Badanie wlaśeiwoci kompozytów z polipropylenu i grafitu termorozszerzalnego. *Polimery*. 1997. Vol. 42, № 4. P. 244–250.
4. Семко Л. С., Кручек Я. I., Горбик П. П. Сучасні підходи до створення макроструктури полімерних композиційних систем. *Хімічна промисловість України*. 1997. № 4. P. 46–50.
5. Семко Л. С., Кручек Я. И., Шевляков Ю. А., Горбик П. П., Оранская Е. И. Влияние диоксида титана на лектросопротивление и сенсорные свойства композиционных материалов и терморасширенного графита. *Неорганические материалы*. 2007. Т. 43, № 4. С. 420–426.
6. Семко Л. С., Кручек Я. I., Шевляков Ю. А., Дзюбенко Л. С., Горбик П. П., Чуйко О. О. Взаємозв'язок між структурою, електрофізичними і сенсорними властивостями композиційних матеріалів на основі полівінілхлориду та терморозширеного графіту. *Фізика і хімія твердого тіла*. 2005. Т. 6, № 4. С. 685–691.
7. Семко Л. С., Шевляков Ю. А., Кручек Я. I., Чуйко О. О., Горбик П. П. Вплив газоподібних сполук на електричні властивості вуглець-наповнених полімерних композиційних матеріалів. *Доповіді НАН України*. 2004. № 6. С. 100–106.
8. Briggs D., Seah M.P. Practical surface eanalysis by Auger and X-ray photoelectron spectroscopy. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1983. 533 p.
9. Махно С. М. Електрофізичні властивості систем полімер – іонний провідник у надвисокочастотному діапазоні. *Химия, физика и технология поверхности*. 2008. Вып. 14. С. 115–121.
10. Мудрак І. М., Котенок О. В., Рокицький М. О., Левандовський В. В., Міщенко В. М., Махно С. М., Горбик П. П. Електрофізичні властивості систем пентапласт–йодид срібла. *Фізика і хімія твердого тіла*. 2010. Т. 11, № 1. С. 166–169.
11. Rokitsky M.A., Gorbyk P.P., Levandovsky V.V., Makhno S.M., Kondratenko O.V., Shut N.I. Electrophysical properties of polymer composites penton – silver iodide system in 8 - 12 GHz frequency region. *Functional Materials*. 2007. Vol. 14, № 1. P. 125–129.
12. Січкар Т. Г., Рокицький М. О., Янчевський Л. К., Рокицька Г. В., Урсул К. В., Шут М. І. Фізико-механічні та релаксаційні властивості системи ПХТФЕ – нанодисперсний графіт. *Фізика*

аеродисперсних систем. 2020. № 58. С. 15-25. DOI: http://dx.doi.org/10.18524/0367-1631.2020.58.206183
13. Січкар Т. Г., Рокицький М. О., Янчевський Л. К., Рокицька Г. В., Урсул К. В., Шут М. І. Теплофізичні властивості полімерних композитів на основі наповненого терморозширеним графітом поліхлортрифторетилену. *Фізика аеродисперсних систем*. 2022. № 60. С. 31-39. https://doi.org/10.18524/0367-1631.2022.60.265987
14. Rokytskyi M.O., Shut M.I., Sichkar T.G., Rokytska H.V., Shut A.M., Ursul K.V. Heat properties of PCTFE - TEG and PHTFE - TEG/SiO_2 nanocomposites. *The International research and practice conference: "Nanotechnology and nanomaterials (NANO-2022)"*: abstracts, Lviv, 25-27 August, 2022. P. 211.
15. James E.M. Polymer Data Handbook. New York: Oxford University Press, 1999. 1264 p.
16. Січкар Т. Г., Рокицький М. О., Янчевський Л. К., Рокицька Г. В., Урсул К. В., Шут М. І. Вплив модифікації на фізико-механічні та релаксаційні властивості системи полімер – нанодисперсний графіт. *Фізика аеродисперсних систем*. 2021. № 59. С. 17-25. DOI: https://doi.org/10.18524/0367-1631.2021.59.227104

UDC 678.01:[536+537]+678.046.2

Physical properties of PCTFE-TEG and PHTFE-TEG/SiO_2 nanocomposites

Taras Sichkar, Maksym Rokytskyi, Halyna Rokytska, Liudmyla Blagodarenko, Mykola Shut

Abstract. Polymeric nanocomposites based on polychlorotrifluoroethylene (PCTFE) with a low content of dispersed thermally expanded graphite TRG and modified filler TRG/SiO_2, characterized by high electrophysical properties, were obtained. The features of the electronic structure of the composite surface have been investigated. The regularities of changes in the electrophysical properties of the composites depending on the content of fillers and temperature have been established. On the basis of studies and comparative analysis of the thermophysical properties (specific heat capacity c_p, temperature coefficient of linear expansion α) of the systems, the influence of the structural morphological state of the components and their concentration, the level of interfacial interaction on the physical properties of nanocomposites have been investigated.

It has been established that the modified nanofiller is more active towards the polymer matrix than the unmodified one. The composites exhibit a double effect of the modified nanofiller on the matrix structure, which consists in the formation of a powerful crystal structure in the zones of influence of the nanofiller and amorphization of the polymer matrix in the peripheral zones. It has been found that the amorphization of the matrix results in a decrease in the area of temperature reflexes peaks on the temperature dependences of the specific heat capacity and a change in the absolute value of the temperature coefficient of linear expansion with an increase in the concentration of the modified TRG.

Keywords: polychlorotrifluoroethylene, thermally expanded graphite, silicon dioxide, electrical conductivity, heat capacity, linear expansion.

References

1. Semko, L. S., Chernysh, I. G., Revo, S. L., Dashevskij, N. N. (1992). *Mehanicheskie svojstva kompozicionnyh materialov na osnove polietilena i termorasshirennogo grafita*, Mehanika kompozitnyh materialov, **3**, 307–314. [in Russian]
2. Semko, L. S., Chernysh, I. G., Svincickij, N. I. (1994). *Dinamicheskie mehanicheskie svojstva kompozicionnyh materialov na osnove polietilena i termorasshirennogo grafita*, Problemy prochnosti, **7**, 84–91. [in Russian]
3. Semko, L. S., Popov, P. E., Kocherov, V. L. (1997). *Badanie własćiwoci kompozytów z polipropylenu i grafitu termorozszerzalnego*, Polimery, **42** (4), 244–250. [in Polish]
4. Semko, L. S., Kruchek, Ya. I., Gorbik, P. P. (1997). *Suchasni pidhodi do stvorennya makrostrukturi polimernih kompozicijnih sistem*, Himichna promislovist Ukrayini, **4**, 46–50. [in Ukrainian]
5. Semko, L. S., Kruchek, Ya. I., Shevlyakov, Yu. A., Gorbik, P. P., Oranskaya, E. I. (2007). *Vliyanie dioksida titana na elektrosoprotivlenie i sensornye svojstva kompozicionnyh materialov i termorasshirennogo grafita*, Neorganicheskie materialy, **43** (4), 420–426. [in Russian]
6. Semko, L. S., Kruchek, Ya. I., Shevliakov, Yu. A., Dziubenko, L. S., Horbyk, P. P., Chuiko, O. O. (2005). *Vzaiemozviazok mizh strukturoiu, elektrofizychnymy i sensornymy vlastyvostiamy kompozytsiinykh*

materialiv na osnovi polivinilkhlorydu ta termorozshyrenoho hrafitu, Fizyka i khimiia tverdoho tila, **6** (4), 685–691. [in Ukrainian]
7. Semko, L. S., Shevliakov, Yu. A., Kruchek, Ya. I., Chuiko, O. O., Horbyk, P. P. (2004). *Vplyv hazopodibnykh spoluk na elektrychni vlastyvosti vuhlets-napovnenykh polimernykh kompozytsiinykh materialiv*, Dopovidi NAN Ukrainy, **6**, 100–106. [in Ukrainian]
8. Briggs, D., Seah, M. P. (1983). *Practical surface eanalysis by Auger and X-ray photoelectron spectroscopy*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester.
9. Makhno, S. M. (2008). *Elektrofizychni vlastyvosti system polimer – ionnyi providnyk u nadvysokochastotnomu diapazoni*, Himiya, fizika i tehnologiya poverhnosti, **14**, 115–121. [in Ukrainian]
10. Mudrak, I. M., Kotenok, O. V., Rokytskyi, M. O., Levandovskyi, V. V., Mishchenko, V. M., Makhno, S. M., Horbyk, P. P. (2010). *Elektrofizychni vlastyvosti systemy pentaplast/iodyd sribla*, Fizyka i khimiia tverdoho tila, **11** (1), 166–169. [in Ukrainian]
11. Rokitsky, M. A., Gorbyk, P. P., Levandovsky, V. V., Makhno, S. M., Kondratenko, O. V., Shut, N. I. (2007). *Electrophysical properties of polymer composites penton – silver iodide system in 8 - 12 GHz frequency region*, Functional Materials, **14** (1), 125–129.
12. Sichkar, T. H., Rokytskyi, M. O., Yanchevskyi, L. K., Rokytska, H. V., Ursul, K. V., Shut, M. I. (2020). *Fizyko-mekhanichni ta relaksatsiini vlastyvosti systemy PKhTFE – nanodyspersnyi hrafit*, Fizyka aerodyspersnykh system, **58**, 15-25. http://dx.doi.org/10.18524/0367-1631.2020.58.206183
13. Sichkar, T. H., Rokytskyi, M. O., Yanchevskyi, L. K., Rokytska, H. V., Ursul, K. V., Shut, M. I. (2022). *Teplofizychni vlastyvosti polimernykh kompozytiv na osnovi napovnenoho termorozshyrenym hrafitom polikhlortryftoretylenu*, Fizyka aerodyspersnykh system, **60**, 31-39. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.18524/0367-1631.2022.60.265987
14. Rokytskyi, M. O., Shut, M. I., Sichkar, T. G., Rokytska, H. V., Shut, A. M., Ursul, K. V. (2022). *Heat properties of PCTFE - TEG and PHTFE - TEG/SiO$_2$ nanocomposites*, The International research and practice conference: “Nanotechnology and nanomaterials (NANO-2022)”: abstracts, Lviv.
15. James, E. M. (1999). *Polymer Data Handbook*, Oxford University Press, New York.
16. Sichkar, T. H., Rokytskyi, M. O., Yanchevskyi, L. K., Rokytska, H. V., Ursul, K. V., Shut, M. I. (2021). *Vplyv modyfikatsii na fizyko-mekhanichni ta relaksatsiini vlastyvosti systemy polimer – nanodyspersnyi hrafit*, Fizyka aerodyspersnykh system, **59**, 17-25. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.18524/0367-1631.2021.59.227104

Про авторів / About the authors

Тарас Січкар, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри загальної фізики та методики навчання фізики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, вул. Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна;

Taras Sichkar, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of General Physics and Teaching Methods of Physics, Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohov Str., Kyiv 01601, Ukraine;

Максим Рокицький, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра загальної фізики та методики навчання фізики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, вул. Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна;

Maxym Rokytskyi, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of General Physics and Teaching Methods of Physics, Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohov Str., Kyiv 01601, Ukraine;

Галина Рокицька, кандидат фізико-математичних наук, кафедра загальної фізики та методики навчання фізики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, вул. Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна;

Halyna Rokytska, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Department of General Physics and Teaching Methods of Physics, Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohov Str., Kyiv 01601, Ukraine;

Людмила Благодаренко, доктор педагогічних наук, професор, кафедра загальної фізики та методики навчання фізики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, вул. Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна;

Liudmyla Blagodarenko, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of General Physics and Teaching Methods of Physics, Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohov Str., Kyiv 01601, Ukraine;

Микола Шут, академік Національної академії педагогічних наук України, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра загальної фізики та методики навчання фізики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, вул. Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна;

Mykola Shut, Academician of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of General Physics and Teaching Methods of Physics, Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohov Str., Kyiv 01601, Ukraine.

Отримано / Received 14.02.2024
Доопрацьовано / Revised 07.05.2024

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ

Theory and methods of teaching mathematics, computer science, physics and astronomy

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 48–55.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 48–55.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 517.37.02:512

Проблеми вивчення математики в межах реалізації концепції Нової Української Школи

Михайло Білик[1], Євгенія Калашнікова[2], Ігор Калашніков[3]

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра алгебри та методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
bilmisha2@gmail.com
https://orcid.org/0009-0000-7177-9582

[2]Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
кафедра вищої математики, м. Київ, Україна
evgeniak885@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0274-7031

[3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
кафедра алгебри та методики навчання математики, м. Вінниця, Україна
ihor.kalashnikov@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7961-8134

Анотація. В даній публікації ми звертаємо увагу на проблеми вивчення математики в умовах реалізації концепції Нової Української школи. В межах підготовки до публікації, було проведено бесіди з учителями математики, та їх анкетування. Проведено анкетування учнів. Проаналізовано джерела інформації в розрізі інформування вчительства, що до реалізації концепції Нової Української Школи, та методик навчання математики в НУШ. Зроблено порівняльний аналіз навчальних досягнень учнів сьомих класів, які навчались в експериментальних і контрольних класах. Проаналізовано завдання випускних іспитів школярів гімназій за кордоном, і наших випускників, зроблено відповідні висновки.

Ключові слова: методика навчання математики, анкетування, Нова Українська Школа.

1. Вступ

Зміна системи освіти в Україні назрівала давно.

e-ISSN 3041-1955 DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2024-01-07

Вдосконалення системи освіти, це природній процес, який покликаний підготувати підростаюче покоління до тих умов в яких їм випало жити, творити і розвиватись.

Зміни, які торкнулися зараз нашої шкільної системи освіти відбуваються в межах реалізації концепції Нової Української Школи (НУШ). І в публікації ми звертаємо увагу на:

- вивчення математики в межах реалізації концепції Нової Української Школи;
- проблеми, які є у вчителів, зокрема у вчителів математики;
- екстраполяцію отриманих результатів на майбутнє.

2. Постановка проблеми

Мета даної публікації, звернення уваги на проблеми вивчення математики в умовах реалізації концепції Нової Української Школи (НУШ).

В межах підготовки до публікації нами, була проороблена така робота:

- проведено бесіди з учителями математики, та їх анкетування;
- проведено анкетування учнів;
- проаналізовано джерела інформації в розрізі інформування вчительства, що до реалізації концепції Нової Української Школи, та методик навчання математики в НУШ;
- зроблено порівняльний аналіз навчальних досягнень учнів сьомих класів, які навчались в експериментальних і контрольних класах;
- проаналізовано завдання випускних іспитів школярів гімназій за кордоном, і наших випускників;
- зроблено висновки.

3. Основні результати

1. Проведено бесіди та анкетування учителів математики.

Результат анкетування учителів математики вказує на можливі невідповідності реальних справ у навчанні математиці з певними очікуваннями.

Відповіді учителів, на запитання дещо повторюються і з позиції економії викладу матеріалу, ми їх об'єднали, дещо пропустили, але намагалися залишити авторську думку, і емоції.

Запитання 1. Оцініть рівень підготовки учнів початкової школи, з якими Ви працювали в п'ятому класі.

Відповіді.

- Низький. Переважна більшість не володіє навичками усного рахунку, не знає таблиці множення, не вміє виконувати найпростіші геометричні побудови. Вони навіть не можуть об'єктивно оцінити свої знання.
- Початковий та середній.
- Рівень підготовки досить непоганий. Але сприйняття матеріалу дається їм дуже важко.
- Між середнім та достатнім.
- Середній, достатній, високий.

Запитання 2. Чи потрібно, змінювати підходи до вивчення математики в початковій школі? Як саме?

Відповіді.

- Так. Диференційований підхід можливий, але не на уроці, а в рамках паралелей.
- Однозначно змінювати потрібно. Діти віднімати не вміють, а що вже говорити про таблицю множення та можливість ділити у стовпчик.
- Так. Слід посилити роботу щодо відпрацювання практичних навичок виконання стандартних завдань: дії з числами, аналіз умови задачі та планування її розв'язування, встановлення зв'язків між математичними величинами.
- Так. Слід виконувати практичні завдання з розвитку навичок обчислення, а також встановлення логічних зв'язків у процесі розв'язування задач.
- Так. Потрібно приділяти більше уваги практичному застосуванню знань.
- Так. Діти не знають таблицю множення.
- Так. В початковій школі потрібно ввести бальне оцінювання.
- Кардинально міняти не потрібно.
- Не потрібно.

Запитання 3. Чи потрібні учителям орієнтовні навчальні програми, і календарні тематичні планування за авторством розробників відповідних модельних програм і підручників з математики?

В основному, відповідь, — так.

Запитання 4. З якими проблемами зіткнулись вчителі математики в 5 — 6 класах, які працюють в НУШ?

Відповіді.

- Деякі учні не отримали базових знань та умінь. Наприклад, діти не уміють працювати в колективі, вчитись самостійно, відчуття уроку та перерви, у них однакові. Та й у математичних поняттях вони не розуміються. Більшість із них працюють по аналогії.
- Діти не підготовлені у плані елементарних навичок у виконанні арифметичних дій, компоненти в найпростіших числових виразах визначають неправильно, про розв'язування рівнянь навіть мова не йде ... .
- Низький рівень знань з математики.
- Діти не знають таблицю множення, не можуть зосередитись, не можуть працювати в команді.
- Мало годин відведено на вивчення матеріалу, розуміння і вміння розв'язувати задачі.
- Діти не мають навичок додавання, віднімання, А особливо множення і ділення. Деякі учні втрачають мотивацію через незрозумілі завдання.
- Для того щоб формувати у дітей математичну компетентність, потрібно щоб дитина володіла основними математичними поняттями та обчислювальними навичками, вміла аналізувати умову задачі, а вони у 5-му класі цього не вміють, також діти важко переходять на бальне оцінювання.
- Не достатній рівень підготовки, діти слабо орієнтуються в навчальному матеріалі, мають нестійкі обчислювальні навички, важко встановлюють зв'язки між відомими і невідомими математичними величинами немає повноцінної підтримки, роздаткових матеріалів.
- Діти не дисципліновані, не вміють висловлювати свою думку, не вчать правила.
- Учні не розуміють умови тексту задач, їм складно ділити, проблеми з рівняннями.
- Є проблеми з формувальним оцінюванням.

Запитання 6. Якою Ви бачите сучасну систему математичної освіти в Україні? Що на вашу думку потрібно змінити?

Відповіді.

- Потрібно збільшити кількість годин на вивчення математики.
- Потрібно збільшити кількість прикладних задач. Можливо доцільними будуть збірники прикладних задач під підручники.
- Школи повинні мати належне технічне і дидактичне забезпечення для викладання математики, має бути збільшено кількість якісних завдань прикладного спрямування в навчальній літературі. Має проводитись планова, серйозна робота з підготовки учителів до навчання дітей математиці в умовах НУШ.
- Потрібно формувальну систему оцінювання модифікувати в накопичувальну систему оцінювання.
- Хочете зацікавити дітей, то введіть додатковий урок для інтерактивних ігор, але ж не на уроці гратися.
- Поки-що все влаштовує.

Зараз в тренді формувальне оцінювання, і учителі мають з цим певні проблеми.

Особисто ми, за накопичувальне оцінювання в умовах сучасної школи.

Є семестр чи четверть (не принципово). Є певні компетенції, які учень набуває впродовж опрацювання визначених тем в семестрі. Впродовж цього опрацювання він: відповідає біля дошки пише самостійні, контрольні роботи і отримує за це бали. Наприклад разом 100 балів — компетентний на 100%, ну і там хто менше. В кінці року порахували середнє і визначили його рівень компетентності з математики за рік.

Тоді хоть-щось ця дитина і її батьки будуть уявляти про рівень підготовки. А так, вони приходять в кінці одинадцятого класу до репетитора і кажуть, — « ... в нас з математики 10, нам би узагальнити матеріал і гарно здати НМТ».

При першому знайомстві з цим учнем, як правило в присутності його батьків виявляється, що учень не знає, ... не вміє ... .

Запитання, що робити, чому так, ... Звісно, значною мірою в цьому винні батьки. Опишемо таку ситуацію, яка спостерігалась насправді.

Мати одного учня шостого класу, в деякій школі спілкується з певним вчителем математики:

— Поставте моєму, наприклад, Вадіку 10.

— Та як я йому можу поставити ... того не знає, те не вміє, ... Як я буду виглядати в очах учнів класу? ...

І відбувається така полеміка.

Прикінцеве слово мами. Пряма мова, «Ви поставте йому 10, а якщо мені буде потрібно, щоб він знав, я знайду йому в 11 класі репетитора і він буде знати ... ».

В сучасних умовах моніторинг рівня компетентності учнів на загальнодержавному рівні, на основі накопичувального оцінювання, ми думаємо, здійснити можна.

Потрібно зробити такий загальний Всеукраїнський класний журнал, в який вносились би оцінки учня в режимі реального часу.

Є центри професійного розвитку педагогічних працівників, обласні, районні відділи освіти там є спеціалісти, якщо нема, то є університети, там точно є. В кінці семестру, вибірково, вибрали школи, скільки можна охопить, приїхали, дали дітям підсумкові контрольні роботи, які сформували, наприклад, в міністерстві, ті хто давав самі ж перевірили, і занесли в той самий журнал у відповідну графу поряд з оцінкою учителя.

Тоді буде видно ситуацію в країні. І це робити потрібно не лише з математики, а й таких дисциплін як: фізика, хімія, ... — стратегічних предметів, від яких залежить існування держави.

2. Побачивши цю ситуацію про яку ми описали вище, ми провели анкетування учнів в розрізі впливу цифровізації середовища, яке оточує учня на його компетентнісний рівень з математики. Думали, що проблема в тому, що учні велику частину часу витрачають на соціальні мережі, комп'ютерні ігри і т.д.

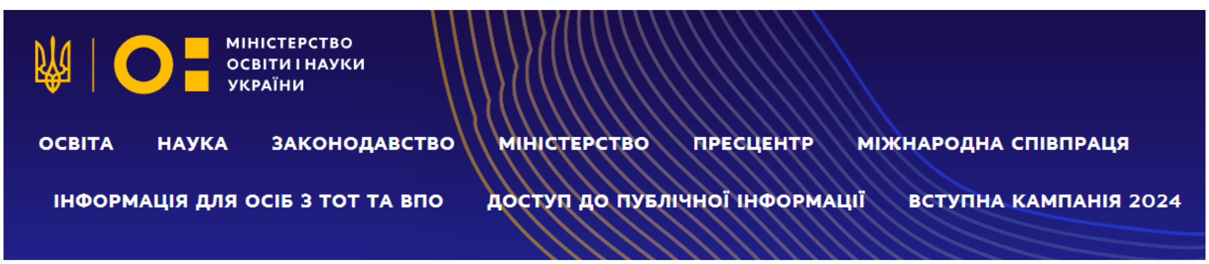
В результаті отримали наступні висновки.

- Організований учень не відчуває негативного впливу цифрових технологій на свій рівень навчальних досягнень, навпаки, самостійно, або скерований учителем, чи рідними він використовує їх з метою поліпшення своїх знань переглядаючи певні науково-популярні, або навчальні фільми та передачі.
- Підбір навчального контенту має бути керованим.
- Комп'ютерні ігри негативно впливають на рівень навчальних досягнень учнів класів, тому час гри має бути регламентований.
- Відповідно до сучасних критеріїв оцінювання школа може в масі забезпечити середній рівень знань учня з математики.
- Учні, які мать високий рівень знань з математики, у своїй переважній більшості займаються з репетиторами, а також, як правило, відвідують спортивні секції.

3. В межах нашого дослідження нами також проаналізовано джерела інформації в розрізі інформування вчительства, що до реалізації концепції Нової Української Школи, та методик навчання математики в НУШ.

Так, є сайти, які стосуються організації навчального процесу в НУШ

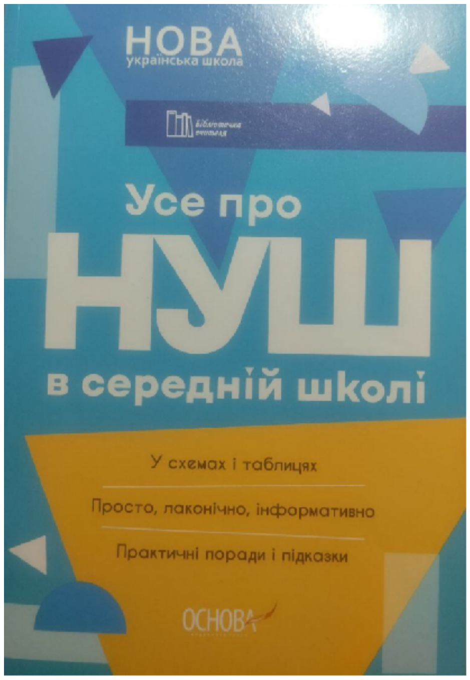
Сайт МОН

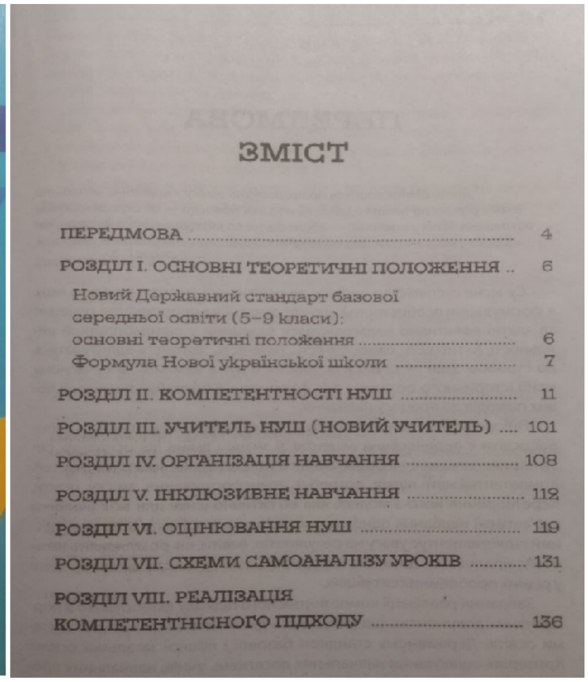


Сайт НУШ

Але дуже мало інформації про методику викладання окремих предметів, наприклад, математики в умовах НУШ.

Є також література, яка позиціонується як така, що містить відповіді на запитання учителя, а по факту не дуже допомагає. [2]




ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 4
РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ .. 6
Новий Державний стандарт базової середньої освіти (5–9 класи): основні теоретичні положення 6
Формула Нової української школи 7
РОЗДІЛ ІІ. КОМПЕТЕНТНОСТІ НУШ 11
РОЗДІЛ ІІІ. УЧИТЕЛЬ НУШ (НОВИЙ УЧИТЕЛЬ) 101
РОЗДІЛ IV. ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ 108
РОЗДІЛ V. ІНКЛЮЗИВНЕ НАВЧАННЯ 112
РОЗДІЛ VI. ОЦІНЮВАННЯ НУШ 119
РОЗДІЛ VII. СХЕМИ САМОАНАЛІЗУ УРОКІВ 131
РОЗДІЛ VIII. РЕАЛІЗАЦІЯ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ 136

Хоча, звісно, автори проробили велику роботу. Але на мою думку така література має проходити досить серйозне рецензування, оскільки стосується проекту загальноукраїнського рівня.

4. Також нами зроблено порівняльний аналіз навчальних досягнень учнів сьомих класів, які навчались в експериментальних (інтелект, НУШ) і контрольних класах.

7-А (інтелект)	7-Б	7-В (НУШ)	7-Г	7-Д
5	9	10	6	6
10	6	7	5	8
8	11	9	8	10
6	7	7	6	7
6	10	8	10	10
11	10	9	9	7
10	10	9	6	10
7	9	9	9	9
8	8	8	8	4
9	7	9	5	10
7	10	9	9	7
7	8	8	11	6
7	9	6	7	10
6	11	8	5	8
10	9	10	8	7
5	11	9	8	11
...	...	...	...	...
8,2	8,9	8,5	7,6	8,3
Середня арифметична				

Рис. 1: алгебра

7-А (інтелект)	7-Б	7-В (НУШ)	7-Г	7-Д
8	9	10	12	5
10	5	8	8	8
6	11	9	6	10
6	6	7	9	8
7	11	8	6	9
9	10	9	11	8
10	10	9	10	10
6	10	10	7	8
9	10	9	10	4
9	7	9	11	8
6	10	9	9	7
7	8	8	6	6
7	9	7	5	9
7	10	8	9	10
8	9	10	11	8
...	...	...	...	...
8,3	8,9	8,7	8,2	8,2
Середня арифметична				

Рис. 2: геометрія

Спілкуючись з учителями, представниками адміністрацій шкіл, можна зробити висновок, що рівень навчальних досягнень учнів, в основному залежить від підбору учнів в класах, компетентності вчителів і вже меншою від решти факторів.

5. На завершення нами проаналізовано завдання випускних іспитів школярів гімназій за кордоном, і наших випускників. Завдання які пропонувались нашим випускникам на ЗНО і наразі пропонуються на НМТ ми знаємо.

За посиланням Mathematik, Normales Niveau наведено варіант завдань, які пропонуються випускникам в Швейцарії, наприклад, перше завдання одного з варіантів.

Завдання 1 (10 балів) Коло, пряма, дотична

Aufgabe 1 (10 Punkte) **Kreis, Geraden, Tangenten**

Задано коло k

Gegeben sei der Kreis k : $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0.$

a) *(3 P)* Bestimmen Sie Mittelpunkt M und Radius r des Kreises k. Skizzieren Sie anschliessend den Kreis. а) (3 б) Визначте центр M та радіус r кола k. Потім накресліть коло.

b) *(2 P)* Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(3|7)$ und $Q(4|6)$ auf dem Kreis k liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade g durch P und Q. b) (2 Б) Перевірте, чи лежать точки P(3|7) і Q(4|6) на колі k. Складіть рівняння прямої g, яка проходить через точки P і Q.

c) *(5 P)* Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Kreis k, die parallel zur Gerade g verlaufen. c) (5 P) Складіть рівняння дотичних до кола k, які паралельні прямій g.Здесь ваш текст 8

Вони набагато складніші за наші.

І, щоб наші випускники були конкурентно-здатними, на нашу думку, потрібно продовжувати працювати в плані пошуку ефективної організації навчального процесу. Потрібно придумати його таким, або ж перейняти, щоб наші школярі були на рівні з своїми однолітками з про держав.

Висновки. Рівень навчальних досягнень учнів, в основному залежить від підбору учнів в класах, компетентності вчителів і вже меншою мірою від решти факторів.

Конфлікт інтересів і етика. Деякі результати викладені вище, були представлені на всеукраїнському круглому столі «Математична освіта + НУШ***. Задача з трьома зірочками», що організовував «Інститут модернізації змісту освіти».

Подяки. Хочемо висловити подяки тим учителям математики, та учням, які брали участь в пропонованих нами анкетуваннях і висловили свою власну точку зору. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Калашніков І. В., Калашнікова Є. І. Підвищення ефективності навчання математики шляхами відеовізуалізації. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*: зб. наук. пр. 2013. №2. С. 197–202.
2. Коновалова М. В., Семиволос О. П., Ковтик Р. Д., Шкльода С. Ю. Усе про НУШ в середній школі. Харків: Основа, 2023. 143 с.

UDC 517.37.02:512

Problems of learning mathematics within the framework of the implementation of the concept of the New Ukrainian School

Bilyk Mykhailo, Yevheniia Kalashnikova, Igor Kalashnikov

Abstract. In this publication, we pay attention to the problems of learning mathematics in the context of the implementation of the concept of the New Ukrainian School.

During preparation for publication, the following work was done. Conversations with mathematics teachers and their questionnaires were conducted. A survey of students was conducted. Sources of information in terms of informing teachers about the implementation of the concept of the New Ukrainian School and methods of teaching mathematics at the National University of Ukraine were analyzed. A comparative analysis of educational achievements of seventh-grade students who studied in experimental and control classes was made. The tasks of the final exams of high school students abroad and our graduates were analyzed.

Keywords: methods of teaching mathematics, questionnaires, New Ukrainian School.

References

1. Kalashnikov, I. V., Kalashnikova, Ye. I. (2013). *Increasing the effectiveness of teaching mathematics by means of video visualization*, Actual issues of science and mathematics education, **2**, 197–202. [in Ukrainian]
2. Konovalova, M. V., Semivolos, O. P., Kovtyk, R. D., Shkloda, S. Yu. (2023). *Everything about NUS in secondary school*, Osnova, Kharkiv. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Михайло Білик, аспірант, кафедра алгебри та методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Mykhailo Bilyk, PhD student, Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Євгенія Калашнікова, аспірантка, кафедра вищої математики, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Пирогова, 9, м. Київ, 01601, Україна.

Yevheniia Kalashnikova, PhD student, Department of Higher Mathematics, Dragomanov Ukrainian State University, Pirogov, 9, Kyiv, 01601, Ukraine.

Ігор Калашніков, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра алгебри і методики навчання математики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна.

Ihor Kalashnikov, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematics Teaching Methods, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 10.05.2024
Доопрацьовано / Revised 11.06.2024

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 56–62.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 56–62.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 373.5.091.64:004.774

Методика навчання інформатики у профільній школі: аналіз посібників з вебтехнологій

Олена Косовець[1], Олена Соя[2], Ярослав Крупський[3]

[1, 2, 3] Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна

[1] helen.kosovets@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8577-3042

[2] soya.o.m@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

[3] krupskyi.ya@vspu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-6324-2697

Анотація. У роботі обговорено особливості змісту, структури та методики навчання вибіркового модуля «Веб-технології» для учнів профільної школи. Вивчення вебтехнологій у школі не лише забезпечує учнів базовими знаннями про створення вебсайтів та вебдодатків, але й сприяє розвитку критичного мислення, творчого підходу та технічних навичок, які є необхідними у сучасному цифровому світі. В статті здійснено аналіз основних навчальних матеріалів посібників для навчання старшокласників вебтехнологій, розкрито основні концепції вибіркового модуля та висвітлені основні проблеми, на які слід звернути увагу в процесі навчання. Розглянуті у статті навчальні посібники з вебтехнологій містять матеріал практичного спрямування, також автори прагнули подати короткий та змістовний теоретичний навчальний матеріал в достатньому обсязі для самостійного вивчення вибіркового модуля "Веб-технології" учнями профільної школи закладів загальної середньої освіти в умовах сучасності.

Ключові слова: методика навчання інформатики, вибірковий модель "Веб-технології", навчання учнів профільної школи.

1. Вступ

Сучасна українська школа розбудовується на засадах особистісно зорієнтованого, компетентнісного й діяльнісного підходів. Навчання інформатики, згідно чинних програм і підручників, відповідно до освітнього Державного стандарту, істотно змінює акценти в побудові організації навчального процесу у бік активного застосування сучасних цифрових освітніх технологій. У час Інтернет-технологій, зокрема і вебтехнологій, багато аспектів нашого життя переноситься в мережу, прискорюючи тим самим темпи розвитку інформаційного суспільства, долаючи географічні бар'єри, дозволяючи розвивати та навчати учнів загальної середньої освіти під час проведення онлайнових уроків інформатики.

Особливо важливим у цьому контексті є навчання учнів основам вебтехнологій. Вивчення вебтехнологій у школі не лише забезпечує учнів базовими знаннями про створення вебсайтів та вебдодатків, але й сприяє розвитку критичного мислення, творчого підходу та технічних навичок, які є необхідними у сучасному цифровому світі. Розвиток цифрових технологій зумовлює появу нових професій: SMM-менеджер, PR-менеджер, спеціаліст з ІТ-технологій, верстальник, дизайнер та інші. Однією із найкреативніших та найзатребуваніших у ІТ-сфері вважаються професії, які пов'язані зі створенням і розробкою вебсайтів та вебдодатків. Вже кілька років вони займають почесне місце в «топ-5» на ринку затребуваних вакансій. Серед нових понять, методів та задач особливе місце займає вивчення вебтехнологій, що є особливо актуальним для старшокласників.

Вивчення вибіркового модуля "Веб-технології" у профільній школі дозволяє учням здобути необхідні знання та навички, які вони можуть використовувати у майбутньому для реалізації своїх професійних амбіцій у сфері веброзробки.

2. Постановка завдань

Учні базової і профільної школи згідно програми з інформатики вивчають основи вебтехнологій та графічного дизайну, які є одними з провідних напрямків інформаційних технологій, що наразі розвивається найбільш динамічно. Навчальні модулі шкільної програми з інформатики «Веб-технології» та «Графічний дизайн» є сучасними, корисними і допоможуть учням 10-11 класів у визначенні та виборі майбутньої професії. Окрім теоретичного і практичного навчального матеріалу, учні ознайомлюються з сучасними інтерактивними освітніми напрямками вивчення основ веб-дизайну з графічним поєднанням та анімацією.

Питання вирішення проблематики методичних особливостей навчання вебтехнологій учнів закладів загальної середньої освіти в сучасних школах визначали та досліджували такі провідні дослідники і педагоги сучасності, як Н. Морзе, О. Барна, І.Завадський, О.Коршунова, Й. Ривкінд, В. Шакотько та багато інших науковців та вчителів.

Мета статті: проаналізувати методичні особливості подання навчального матеріалу з вебтехнологій у підручниках та посібників для учнів профільної школи.

3. Основні результати

Уміння розробляти та створювати якісні, сучасні і цікаві вебсайти наразі стає однією з найважливіших складових інформаційної культури людини, адже від того, як вона зможе представити у світовому інформаційному просторі себе, коло своїх професійних та особистих інтересів, або ж реалізувати в Інтернеті той чи інший проект, пов'язаний із професійною діяльністю, багато в чому залежить успішність її кар'єри.

Саме такі вміння вже не пов'язані з певною професією, вони необхідні для будь-якого активного члена сучасного суспільства, і тому навчання основам вебтехнологій є однією зі складових базового курсу інформатики в середній школі.

Доцільно зазначити, що у більшості діючих програм з інформатики відповідної теми не передбачено, а отже, найпоширенішою формою викладання у школі основ вебтехнологій може стати проведення курсу за вибором.

Методика навчання вебтехнологій полягає у розробці учнями індивідуальних проектів. Тобто під час вивчення вибіркового модуля «Веб-технології» вчитель використовує метод проектів.

Г. Ісаєва у своїй роботі «Метод проектів – ефективна технологія навчання» визначає метод проектів як педагогічну технологію, що зорієнтована не на інтеграцію фактичних знань, а на їх застосування і набуття нових (часто шляхом самоосвіти) [1].

А. Нісімчук, О. Падалка, О. Шпак наводять «поняття технологій навчання як законовідповідну педагогічну діяльність, яка реалізує науково обґрунтований проект дидактичного процесу і володіє більш високим ступенем ефективності, надійності та гарантованості результату, ніж це має місце при традиційних методиках навчання» [4].

Розвиток комп’ютерних та вебтехнологій неминуче призводить до інформатизації всіх видів навчальної діяльності, в більшості – створення інформаційно-навчального простору.

С. Науман у своїй статті аналізує результати дослідження різних стилів навчання, їх технологічних переваг та їх академічну успішність [3].

Варто проаналізувати підручник «Основи веб-технологій та дизайну». Він розрахований на проведення 35-годинного навчального курсу, протягом якого учні мають виконати 11 практичних робіт (на кожну з них слід відвести 20-25 хвилин).

Окрім цих робіт, які підсумовують результати вивчення тієї чи іншої теми, передбачені численні вправи з покроковим описом дій, виконуваних учнями за комп'ютером. Кожний розділ книжки також містить тест із дванадцяти запитань та завдання для самостійного виконання.

Слід зазначити, що у навчальній літературі поняття вебтехнологій часто підмінюється поняттям вебпрограмування та супутніх технологій. Даний посібник у цьому контексті є винятком, адже в ньому значну увагу приділено просторовому і колірному оформленню вебсторінок, дизайну інформаційного наповнення сайту та іншим питанням, пов'язаним із художніми аспектами розробки вебресурсів. Варто встановити, що робота вебдизайнера неможлива без володіння певним технічним мінімумом. Тому у виданні детально й ґрунтовно висвітлюються такі теми, як основи мови HTML, графіка, подання на веб-сторінках аудіо- та відеоінформації, використання графічного редактора веб-сайтів тощо.

Модульна структура посібника дозволяє поділити матеріал за рівнями складності, гнучко пристосовуючи обсяг та глибину курсу до специфіки навчального закладу. Так, для закладів гуманітарного профілю курс може бути обмежений вивченням 1 і 7 розділів посібника, в яких розглядається процес автоматизованого створення веб-ресурсів та художній дизайн сайтів.

Задля більшості інших закладів доцільним буде також вивчення розділів 2-4 та 6, де описується мова HTML, використання графіки, звуку та відео на веб-сторінках і робота з Microsoft FrontPage – графічним редактором вебсайтів. Варто встановити, що задля закладів інформаційно-технологічного профілю призначено ще й розділ 5, у якому викладено основи динамічного HTML.

Акумулювавши власний та чужий досвід викладання вебтехнологій, спрямувавши значні зусилля на те, щоб зробити матеріал посібника доступним, сучасним і необхідним українській школі, автори водночас усвідомлюють, що як перше видання ця книжка є далекою від досконалості, й тому сподіваються на активну співпрацю з тими, хто використовуватиме посібник у своїй педагогічній роботі та навчальній практиці.

Для вивчення вибіркового модуля «Веб-технології» рекомендуємо вчителям інформатики використовувати навчальні підручники та посібники різних українських авторів.

Навчальний посібнику Н. Речич «Інформатика. Вебтехнології» складається з п'яти розділів і містить основні теоретичні відомості про онлайн-інструменти для розробки структури сайту, опис базових тегів мови HTML, алгоритми проєктування та створення сайту, початкові відомості з вебпрограмування, приклади застосування базових правил ергономіки сайту та пошукової оптимізації тощо; також він містить ряд ключових понять, які вивчають діти. До цих понять відноситься: візуалізація даних, персоналізація сайтів, синемаграфіка, особисті блоги, комерційні сайти, форуми, вебсервіси, інформаційна структура сайта, гіпертекст, теги, каскадні таблиці стилів, медіа-запити, адаптивні сайти, анімовані зображення, мультимедіа, об'єктна модель документа, вебсторінка, вебпрограмування, вебхостинг та багато інших [7].

В першому розділі «Напрямки та інструменти вебдизайну» учні знайомляться із сучасними тенденціями вебдизайну, класифікацією та структурою сайтів. Учні отримують відомості про види цільової аудиторії; дізнаються про сервіси для роботи із спеціальними медіа та інструментами веброзробника.

В другому розділі «Проектування та верстка вебсторінок» описується про проектування та верстку сайту.

В третьому розділі «Графіка та мультимедіа для вебсередовища» учні продовжують вивчати верстку сайту, але вже детальніше (статичні зображення, анімаційні ефекти, підключення аудіо- та відео-файлів до сайту).

У четвертому розділі «Вебпрограмування» учні приділятимуть увагу тому як виглядає їх сайт із позицій бекенда, тобто, з боку сервера.

В п'ятому розділі «Основи дизайну та просування вебсайта» вивчатимуть базові правила ергономіки сайту й пошуку оптимізації.

Цей посібник також містить 12 практичних робіт, що дають змогу опрацювати навчальний матеріал.

Навчальний посібник «Веб-технології та веб-дизайн» авторів О. Трофименко, О. Козіна, О. Задерейко, О. Плачінда містить багато вправ та прикладів для вивчення вибіркового модуля «Вебтехнології». Автори намагалися показати специфіку сучасних інструментів веб-дизайну та можливості створення сайту з урахуванням аналізу та оптимізації сайту.

Навчальний посібник присвячено теоретичним і практичним аспектам вебтехнології та вебдизайну. Наведено опис основних засобів HTML та CSS для проектування, макетування й редагування веб-сайтів. Містить численну кількість прикладів працездатного HTML та CSS коду з демонстрацією структурування та форматування тексту й табличних даних, вбудовування зображень на веб-сторінці, розміщення медіаконтенту, створення форм, засобів позиціонування об'єктів тощо. Детально розглянуто специфіку застосування сучасних онлайн вебконструкторів сайтів (наприклад, WordPress). Приділено увагу етапам розроблення сайту, засобам формування адаптивного вебдизайну сторінок, різним видам верстки вебсторінок, вимогам до якості контенту при інформаційному наповненні сайту, сучасним тенденціям та стильовим рішенням у вебдизайні. Сформульовані вимоги, підходи й специфіка аналізу та оптимізації роботи сайтів як важливого етапу у підтримці вебсайту [8].

Посібник містить сім розділів. Перший розділ – це опис засобів мови HTML, опис предмету і задач дисципліни, історія появи мови, засобів створення веб-сторінок, атрибути тегів, заголовки, вирівнювання та форматування тексту. Другий розділ присвячений вивченню засобів стильного форматування вмісту веб – сторінок сайту – CSS (каскадної таблиці стилів). Третій розділ містить матеріал щодо застосовування сучасних онлайн вебконструкторів сайтів. З їх допомогою можна створити сайт без володіння спеціальних знань (що є дуже зручним для учнів 8-9 класу базової школи).

У четвертому розділі увага приділяється етапам розробки сайту:

– проектуванню інтерфейсу майбутнього ресурсу;
– складанню технічного завдання;
– розробці дизайну сайту;
– тестуванню;
– перенесенню сайта на хостинг.

П'ятий розділ присвячений способам та засобам розмітки веб – документів таким як таблична верстка, фреймова верстка, блокова верстка, семантична верстка, розмітка флексбоксами, концепція адаптивного веб-дизайну.

Шостий розділ описує елементи та принципи вебдизайну, які визначають правила взаємодії всіх елементів вебсайту.

Сьомий розділ містить складові та специфіку аналізу роботи як найважливішого етапу у підтримці вебсайту. Основні складові аналізу роботи сайту, юзабіліті-аналіз, біла оптимізація сайту, сіра оптимізація сайту, помаранчева оптимізація сайту, інструменти для веб-аналітики, плагіни веб-розробника- ці всі теми містяться у цьому розділі.

Для кращого сприйняття навчального матеріалу та формування практичних навиків, після кожного розділу у навчальному посібнику «Веб-технології та веб-дизайн» розміщені запитання для самоконтролю знань.

Автори О. Пасічник, О. Пасічник, І. Стеценко навчального посібника «Основи веб-дизайну» подають навчальний матеріал з орієнтацією на проведення 35-годинного навчального модуля «Веб-технології», протягом якого учні мають виконати 11 практичних робіт (на які відводиться 20-25 хвилин). Окрім практичних, передбачені ще численні вправи з покроковим описом дій, які виконуватимуться учнями за допомогою комп'ютера. Кожен розділ у підручнику закінчується тестом із дванадцяти запитань та завдань для самостійної роботи [6].

Модульна структура посібника дозволяє розділити матеріал по рівнях складності, адаптуючи обсяг та глибину курсу в залежності від специфіки навчального закладу.

Наприклад, для шкіл із гуманітарним напрямом, курс може вивчатися тільки по першому та сьомому розділах посібника. У цих розділах описується процес автоматизованого створення веб-ресурсів (у цьому розділі передбачені такі теми як основи Інтернету, адресація в Інтернеті, форуми та чати на веб-сторінках, створення та ведення блогів) та художнього оформлення сайтів (типи сайтів та їх особливості, планування веб-сайту та етапи роботи над ним, основні складові веб-дизайну, проектування структури сайту, компонування та визначення набору сторінок сайту).

Для шкіл з іншими напрямами доречно вивчати другий, третій, четвертий та шостий розділи, в яких описується мова розмітки HTML (поняття тегу, нумеровані й марковані списки, створення таблиці, колірне оформлення таблиць), створення та опрацювання графіки, аудіо- та відео-розміщення на вебсторінках (використання зображень у веб-документах, розміщення та відтворення на веб-сторінках мультимедійних даних). Також описується робота з Microsoft FontPage – графічним редактором вебсайтів.

Для вивчення теми з основ вебпрограмування пропонуємо підручник Р. Мельника «Програмування веб-застосувань (фронт-енд та бек-енд)» [2].

Наведений матеріал призначений для проектування динамічних вебсторінок. Розділи охоплюють вивчення мови розмітки тексту HTML версії 5, CSS версії 3, JQUERY, Bootstrap, AngularJS, мови програмування JavaScript та PHP, технологію Ajax, зберігання даних у серверних масивах та базах даних MySQL. Наведено приклади доступу до них із вебсторінок. Дано основи проектування вебсторінок у технологіях NET та JAVA, зокрема з класами з бібліотек ASP.NET, класами сервлетів javax.servlet та інструментами JSP для проектування динамічних веб-сторінок.

Усі розділи закінчуються контрольними питаннями. Матеріал містить фрагменти програм, які можуть бути корисними учням для перевірки та при самостійній розробці власних програм, практичних та індивідуальних завдань.

Висновки. Розглянуті у статті навчальні посібники з вебтехнологій містять матеріал практичного спрямування, але попри це автори прагнули подати короткий та змістовний теоретичний навчальний матеріал, в обсязі, достатньому для самостійного вивчення вибіркового модуля “Веб-технології” учнями профільної школи закладів загальної середньої освіти в умовах сучасності.

Список використаних джерел

1. Ісаєва Г. Метод проектів – ефективна технологія навчання. URL: http://osvita.ua/school/method/technol/1415/
2. Мельник Р. А. Програмування веб-застосувань (фронт-енд та бек-енд). Львів : Вид-во «Львівська політехніка», 2018. 248 с.
3. Науман С., Ян Ю. Сінаппан С. Нові вебтехнології у вищій освіті: приклад включення блогів, подкастів та соціальних закладок у курс вебпрограмування на основі стилів навчання та технологічних переваг студентів. URL: https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.12.4.98
4. Нісімчук А.С., Падалка О.С., Шпак О.Т. Сучасні педагогічні технології: навч. посіб. Київ: «Просвіта», 2000. 368 с.
5. Пасічник В. В., Пасічник О.В., Угрін Д.І. Веб-технології та Веб-дизайн: підручник. Львів: «Магнолія 2006», 2018. 336 с.
6. Пасічник О. Г., Пасічник О. В., Стеценко І. В. Основи веб-дизайну : навч. посіб. Київ: Вид. група BHV, 2009. 336 с. URL: http://school1k24.at.ua/10CLASS_WEB/OsnovyWebDis.pdf
7. Речич Н. В. Інформатика: вебтехнології (вибірковий модуль для 10- 11 класів, рівень стандарту). Харків: Вид-во «Ранок», 2020. С. 64-70.
8. Трофименко О. Г., Козін О. Б., Задерейко О. В., Плачінда О. Є. Веб-технології та веб-дизайн : навч. посібник. Одеса: Фенікс, 2019. 284 с. URL: http://document.kdu.edu.ua/info_zab/061_75.pdf

UDC 373.5.091.64:004.774

Methods of Teaching Informatics in a Specialised School: Analysis of Web Technology Textbook

Olena Kosovets, Olena Soia, Yaroslav Krupskyi

Abstract. The paper discusses the peculiarities of the content, structure and methods of teaching the elective module ‘Web Technologies’ for pupils of a specialised school. Studying web technologies at school not only provides pupils with basic knowledge about creating websites and web applications, but also contributes to the development of critical thinking, creativity and technical skills that are essential in the modern digital world. The article analyses the main teaching materials of textbooks for teaching high school pupils web technologies, reveals the main concepts of the elective module and highlights the main problems that should be addressed in the learning process. The web technologies textbooks considered in the article contain practical material, and the authors also tried to present a short and meaningful theoretical educational material sufficient for independent study of the elective module ‘Web Technologies’ by pupils of a specialised school of general secondary education institutions in the modern conditions.

Keywords: methods of teaching informatics, selective model ‘Web technologies’, teaching of specialised school pupils.

References

1. Isaeva, G. Project method - an effective learning technology. [in Ukrainian]. http://osvita.ua/school/method/technol/1415/
2. Melnyk, R. (2018). Programming of web applications (front-end and back-end), Lviv Polytechnic Publishing House, Lviv. [in Ukrainian]

3. Nauman, S., Yang, Y. Sinappan, S. New web technologies in higher education: an example of incorporating blogs, podcasts and social bookmarking into a web programming course based on students' learning styles and technological preferences. [in Ukrainian]. https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.12.4.98
4. Nisimchuk, A. S., Padalka, O. S., Shpak, O. T. (2000). Modern pedagogical technologies: a study guide, Prosvita, Kyiv. [in Ukrainian]
5. Pasichnyk, V. V., Pasichnyk, O. V., Uhryn, D. I. (2018). Web technologies and Web design: a textbook, Magnolia 2006, Lviv. [in Ukrainian]
6. Pasichnyk, O. G., Pasichnyk, O. V., Stetsenko, I. V. (2009). Fundamentals of web design: a textbook, BHV Publishing Group, Kyiv. [in Ukrainian]. http://school1k24.at.ua/10CLASS_WEB/OsnovyWebDis.pdf
7. Rechych, N. V. (2020). Informatics: Web Technologies (elective module for grades 10-11, standard level), Ranok Publishing House, Kharkiv, 64-70. [in Ukrainian]
8. Trofymenko, O. H., Kozin, O. B., Zadeiko, O. V., Plachinda, O. E. (2019). Web technologies and web design: a textbook, Phoenix, Odesa. [in Ukrainian]. http://document.kdu.edu.ua/info_zab/061_75.pdf

Про авторів / About the authors

Олена Косовець, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Kosovets, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Ярослав Крупський, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Yaroslav Krupskyi, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 10.04.2024
Доопрацьовано / Revised 07.06.2024

М І Ф
Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 63–74.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 63–74.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 373.5.091.33:004.94]:53

Використання засобів комп'ютерного моделювання з метою підвищення інтересу учнів до вивчення фізики

Анатолій Сільвейстр [1], Микола Моклюк [2], Марія Копитко [3]

[1, 2, 3]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра фізики і методики навчання фізики, астрономії, м. Вінниця, Україна

[1]silveystram@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3633-3910

[2]mokljuk@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8717-5940

[3]mkopitko23@gmail.com
https://orcid.org/0009-0007-6308-3324

Анотація. У статті здійснено аналіз наукових досліджень з проблеми розвитку пізнавального інтересу: розглянуто сутність поняття «пізнавальний інтерес», описано особливості формування пізнавального інтересу учнів на заняттях з фізики.

Охарактеризовано напрямки впровадження в освітній процес інформаційних технологій, які включають розробку та практичне використання науково-практичного забезпечення, якісне та ефективне використання програмних засобів, систем комп'ютерного навчання і контролю знань, системну інтеграцію цих технологій в існуючі освітні процеси та організаційні структури.

З'ясовано, що проведення експериментів, які важко або неможливо відтворити в реальному експерименті ефективним може бути реалізоване на основі використання мультимедійних моделей.

Запропоновано можливості використання комп'ютерного моделювання під час вивчення фізики.

Підтверджено, що використання елементів комп'ютерного моделювання є доцільним і виправданим під час вивчення навчального матеріалу, для якого є обмеженим проведення різного роду навчального фізичного експерименту. Таким є вивчення основних понять квантової фізики.

Описано особливості вивчення розділу «Квантова оптика», особливу увагу у якому приділяють дослідженню явища фотоефекту. Наведено приклади інтерактивних комп'ютерних моделей, використання яких дає можливість підвищити інтерес учнів до вивчення даного матеріалу з фізики, стимулювати формування та розвиток пізнавальної активності і творчого мислення, формувати в учнів уявлення про явища мікросвіту, їх закономірності та сучасну фізичну картину світу.

Ключові слова: комп’ютерне моделювання, комп’ютерна модель, вивчення фізики, пізнавальний інтерес, підвищення інтересу.

1. Вступ

Пізнавальний інтерес як мотив навчання особистості постійно перебуває в центрі уваги освітнього процесу. На сьогодні його розглядають як визначальний фактор активізації навчання та розвитку пізнавальної самостійності здобувачів освіти, важливий аспект підвищення ефективності освітньої діяльності. Однак, дослідження показують, що в останні роки, за умов інформаційного суспільства та реформування системи освіти, зафіксовано зниження інтересу учнів до навчання. Це явище пов’язане з загальними соціальними тенденціями та з особливостями сучасного стану освітньої системи та педагогічної науки в Україні. Врахування цих обставини свідчить, що дослідження розвитку пізнавального інтересу стає актуальним, враховуючи потреби сучасності.

Сьогодні можна виділити низку наукових досліджень з проблеми розвитку пізнавального інтересу: по-різному подається дефініція «пізнавальний інтерес», розкривається механізм виникнення та психолого-педагогічна класифікація рівнів його розвитку, різним чином задаються дидактичні засади, які сприяють формуванню пізнавального інтересу, існують різноманітні зв’язки між пізнавальним інтересом і шляхами підвищення ефективності процесу навчання. Важливим елементом формування та розвитку пізнавального інтересу учнів на заняттях в закладах середньої освіти (ЗСО) є використання інформаційних технологій навчання. Вони стимулюють їх пізнавальну активність та мотивацію навчальної діяльності і тим самим спрямовують розвиток мотиваційної сфери особистості [1, с. 134].

Відомо, що пізнавальний інтерес стимулює пізнавальну активність та мотивацію освітньої діяльності здобувачів і тим самим сприяє розвитку розумової, психічної, соціальної та мотиваційної сфери особистості, забезпечує умови для формування їх творчої навчальної діяльності [10].

В педагогіці проведено ряд досліджень, що стосуються питання розвитку пізнавального інтересу. Автори надають різне тлумачення цьому терміну, розкривають механізм його виникнення та наводять психолого-педагогічну класифікацію рівнів його розвитку. Також відзначаються різні дидактичні принципи, використання яких сприяє формуванню пізнавального інтересу. Також з’ясовуються зв’язки між цим інтересом та методами підвищення ефективності освітнього процесу. Використання інформаційних технологій на заняттях відіграє важливу роль у формуванні пізнавального інтересу учнів. Це, в свою чергу, підтримує їхню пізнавальну активність та мотивацію до навчання, сприяючи розвитку різних аспектів особистості, включаючи розумовий, психічний, соціальний та мотиваційний рівні, а також стимулює творчу навчальну діяльність [10].

Тому варто зазначити, що у сучасній психолого-педагогічній літературі велика увага приділяється дослідженню проблем розвитку пізнавального інтересу (Н. Бібік, В. Білий, Д. Водзинський, Б. Кобзар, В. Корнєєв, О. Ковальов, В. Крутецький, В. Лозова, В. Оніщук, В. Паламарчук, О. Савченко, Т. Сущенко та ін.); вагомий внесок у розвиток підвищення пізнавального інтересу у вивченні фізики зробили вчені-методисти О. Бугайов, С. Гончаренко, Є. Коршак, Д. Костюкевнч, О. Ляшенко, Б. Миргородський та інші українські фахівці.

2. Постановка проблеми

Аналіз науково-методичної та психолого-педагогічної літератури вказує на те, що поряд з різноманітністю є спільні аспекти, які допомагають зрозуміти феномен інтересу та його взаємозв'язки з різними психічними процесами.

Наприклад, С. Гончаренко [3, с. 147] під *інтересом* розглядає форму прояву пізнавальної потреби, що передбачає спрямованість особистості на усвідомлення мети діяльності й тим самим сприяє орієнтації, ознайомленню з новими фактами, більш повному і глибокому відображенню дійсності. Інтерес у навчанні – активне пізнавальне ставлення здобувачів освіти до навчання і праці, їх виховання й методичне використання. На думку автора [3, с. 148], інтерес є одним із найсуттєвіших стимулів набуття знань, розширення кругозору. За наявності інтересу знання засвоюються ґрунтовно, міцно; за його відсутності навчальний матеріал сприймається важко, часто формально, не знаходить застосування в житті, легко й швидко забувається.

Схожим для більшості науковців є погляд на пізнавальний інтерес як суб'єктивне прагнення особистості до пізнання предметів і явищ навколишньої дійсності. Його пов'язують з особливими емоційними проявами та різними аспектами особистого розвитку. Разом з тим психічна природа пізнавального інтересу складна.

Що стосується формування пізнавального інтересу учнів на заняттях з фізики, то більшість учених констатують, що визначальне значення має сам зміст дисципліни. Який має бути зрозумілим, доступним, цікавим, яскраво та логічно поданим, актуальним і практично орієнтованим та мати життєвий сенс для них [11]. У зв'язку з цим і виникає необхідність дослідження використання засобів комп'ютерного моделювання для формування пізнавального інтересу учнів до вивчення фізики.

Мета статті – показати доцільність та необхідність використання комп'ютерного моделювання в освітньому процесі закладів середньої освіти, як фундаменту для підвищення інтересу учнів у формуванні предметних понять з фізики.

3. Основні результати

Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки та програмного забезпечення є однієї з характерних рис розвитку сучасного суспільства. Технології, основним компонентом яких є комп'ютер або сучасний телефон, проникають практично в усі сфери людської діяльності. Інформаційні технології застосовують у видавництвах, бібліотеках, парламенті і міністерствах, банках і на складах, системах зв'язку та системах керування транспортом, податкових інспекціях і в медицині тощо. Комп'ютер став неодмінним атрибутом робочого місця представників багатьох професій [5].

Тому варто зазначити, що у сучасному суспільстві використання інформаційних технологій є необхідним в будь якій сфері діяльності людини. Набуття навичок використання цих технологій ще за шкільною партою багато в значній мірі визначає успішність майбутньої професійної підготовки. Досвід показує, що оволодіння цими навичками відбувається значно ефективніше, якщо реалізується не лише на заняттях з інформатики, але й знаходить своє продовження та розвиток в інших предметах.

Широке впровадження в освітній процес інформаційних технологій включає розробку та практичне використання науково-практичного забезпечення, якісне та ефективне використання програмних засобів, систем комп'ютерного навчання і контролю знань, системну інтеграцію цих технологій в існуючі освітні процеси та організаційні структури [5].

Таким чином, інформаційній технології у освітньому процесі виконують декілька функцій: слугують засобами спілкування, партнерами, інструментами, джерелами інформації, контролюють дії здобувачів освіти, створюють проблемні ситуації і надають їм нових когнітивних можливостей [10]. Варіанти використання інформаційних технологій різноманітні. Їх використання можливе: під час роботи всією групою, у малих групах, парами або індивідуально. Вони обумовлені не лише наявністю чи відсутністю достатньої кількості пристроїв, гаджетів, але й дидактичними цілями .

Разом з тим під час навчання учнів фізики інформаційні технології набувають особливого значення, яке зумовлене специфікою фізики як науки та навчального предмету. Досягнення високої ефективності освітнього процесу є важливим завданням для кожного учителя, успішне розв'язання якого визначає рівень його майстерності. Разом з тим не завжди можна ефективно і швидко зацікавити учнів змістом предмету. Варто забезпечити наступні умови, за яких повноцінне засвоєння основ наукових знань було б доступним для кожного здобувача освіти та сприяло розвитку його інтелектуальних можливостей. Для вчителів фізики це завдання ускладнюється, адже потрібно досягати глибокого усвідомлення та розуміння законів і процесів, які вивчаються в рамках навчальної програми. Для проведення експериментів, які важко або неможливо відтворити в реальному експерименті ефективним стає використання мультимедійних моделей. Це сприяє розширенню можливостей діяльності вчителя у навчанні фізики, сприяє глибшому проникненню в зміст фізичних явищ, процесів і закономірностей. Комп'ютерне моделювання являється потужним чинником формування в учнів уявлень про природу, формування відповідних понять. Тому варто сказати, що фізика має бути значною мірою наповнена експериментальними дослідженнями, в тому числі комп'ютерними.

Використання комп'ютерного моделювання під час вивчення фізики дає можливість [8]:

- покращити сприйняття фізики як навчального предмета. Опанувати явища і закономірності без надмірних зусиль, а тому і формування предметних понять з фізики;
- відтворювати фізичні явища та процеси, які на уроках фізики вивчаються, звертаючись лише до уяви учнів, опираючись на їх абстрактне та логічне мислення;
- сприяти організації позитивної атмосфери, яка є визначальною для сприйняття інформації і сприяє забезпеченню підвищення мотивації учнів до вивчення фізики;
- підвищити рівень підготовки учнів у галузі сучасних інформаційних технологій;
- продемонструвати можливості інформаційних технологій не тільки як засобу для гри.

Комп'ютерні технології та Інтернет дуже міцно увійшли в наше життя, а сучасна молодь виявляє до них неабиякий інтерес. У зв'язку з цим завдання вчителя полягає в тому, щоб перетворити їх на свого безпосереднього помічника. Застосування інформаційних технологій підвищує пізнавальний інтерес учнів до навчального матеріалу, розширює можливості цілеспрямованого впорядкованого формування, поглиблення та засвоєння теоретичних знань, робить процес навчання технологічнішим і результативнішим. Реалізацію даних завдань учителі фізики мають можливість здійснювати і шляхом використання комп'ютерного моделювання під час вивчення фізики.

Комп'ютерне моделювання є дієвим засобом для наукового пізнання та організації дослідницької діяльності суб'єктів навчання. Використання комп'ютерного моделювання під час вивчення фізики дає можливість для учнів поглянути на фізичні процеси на мікро або макрорівні. З іншого боку, це сприяє розвитку їх творчого мислення.

У фізиці та під час вивчення фізики моделювання є невід'ємною частиною методів пізнання, зокрема під час проведення експерименту. Тому можна зазначити, що це дає можливість вирішувати різноманітні проблеми та розв'язувати задачі прикладного характеру. Разом з тим учні не лише ознайомлюються з методами, на основі яких будуються наукові знання, але й краще розуміють сутність фізичних понять, які вивчаються. Комп'ютерне моделювання в класі та в позаурочній діяльності може бути незамінним засобом для розвитку творчих здібностей здобувачів освіти, їх пізнавальної активності. Також варто зазначити, що процес моделювання посилює міжпредметні зв'язки, забезпечує умови для проведення дослідницької діяльності учнів з використанням сучасних інформаційних технологій.

Як підсумок можна зазначити, що використання комп'ютерного моделювання під час вивчення фізики сприяє формуванню пізнавального інтересу здобувачів освіти до дослідницької діяльності, глибшому усвідомленню та розумінню навчального матеріалу, ефективному формуванню предметних понять тощо.

Найбільш доцільним на нашу думку є використання елементів комп'ютерного моделювання під час вивчення навчального матеріалу, для якого є обмеженим проведення різного роду навчального фізичного експерименту. До таких можна віднести вивчення основних понять квантової фізики.

Квантова фізика – це фізична теорія, у якій відкрили своєрідність властивостей і закономірностей мікросвіту. Методи, які використовують у квантовій фізиці, знаходять широке застосування у квантовій електроніці, фізиці твердого тіла, сучасній хімії.

Квантова фізика є вищим ступенем пізнання у порівнянні з класичною фізикою. Вона встановила обмеженість багатьох класичних уявлень. Аналіз навчальних програм засвідчує, що елементи квантової фізики введені в шкільний курс. Інакше знання, здобуті учнями у вивченні основ фізики, залишалися б на рівні XIX в. Уявлення здобувачів освіти про будову і властивості навколишнього світу були б неповними і не відповідали б сучасному науковому знанню про них.

У навчальній програмі з фізики для середньої школи посилюється увагу до питань квантової фізики. Її вивчення відбувається під час розгляду наступних тем:

1. Квантова оптика.
2. Атомна фізика.
3. Фізика атомного ядра.
4. Фізика елементарних частинок.

Під час формування предметних понять квантової фізики необхідно широко використовувати різноманітні засоби наочності [9]. Але кількість демонстраційних дослідів, які можна поставити для вивчення даного матеріалу в середній школі дуже обмежене.

Одним із актуальних напрямків вирішення даного питання є використання елементів комп'ютерного моделювання. Це дає можливість відтворити тонкі деталі фізичного експерименту, які не можна помітити в реальному експерименті (швидкоплинні процеси, повільні), змінювати масштаб часу, будувати, при одночасному спостереженні того чи іншого фізичного процесу відповідні графіки тощо. Комп'ютерна модель експерименту на екрані монітора має бути гарним наочним відображенням, вона легко керована учителем, не вимагає значних затрат часу на зарисовку. На основі використання мультимедійного проектора можна чітко продемонструвати дрібні деталі установки тощо, концентрувати увагу на найважливіших для розуміння змісту явищ та процесів деталях [7].

Комп'ютерні моделі, які використовуються для постановки демонстраційних експериментів, можна поділити на дві великі групи [4]:

- моделі, які дають можливість вивчати будову і принцип дії різних експериментальних установок (дослідів Резерфорда, Герца, Столєтова, фотоелементів різного типу тощо);
- моделі, що є матеріальним відтворенням ідеальних наукових моделей (квантового характеру випромінювання, ефекту Комптона).

У дослідженні В.П. Муляра [9] описано можливості й умови використання комп’ютерів під час вивчення квантової фізики, використання навчальних комп’ютерних моделей як об’єкта дослідницької діяльності здобувачів освіти.

Моклюк М.О. у своїх працях [6-8] описував можливості використання елементів комп’ютерного моделювання під час вивчення фізики.

Під час вивчення «Квантова оптика» особливу увагу приділяють дослідженню явища фотоефекту, яке займає центральне місце в цьому матеріалі. Це явище стало одним із ключових у вивченні квантової теорії загалом та квантової теорії світла зокрема [2].

З метою підвищення ефективності вивчення явища фотоефекту шляхом збільшення наочності було розроблено ряд комп'ютерних моделей на основі використання Microsoft Office PowerPoint.

На початкових етапах учні знайомляться з виникненням концепції квантів, вводяться поняття фотона, його енергії, маси та імпульсу, а потім переходять до вивчення явища фотоефекту.

Методика вивчення фотоефекту включає кілька етапів, в яких учні ознайомлюються з історією відкриття цього явища через експерименти вчених, таких як Г. Герц та О. Столєтов.

Для кращого усвідомлення та розуміння явища фотоефекту та його закономірностей найкраще підвести учнів за допомогою експерименту.

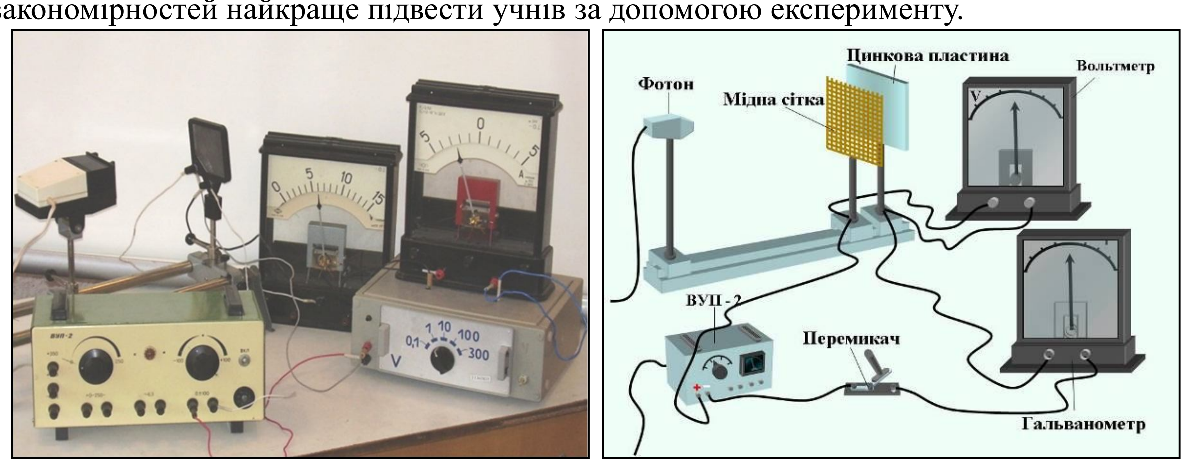


Рис. 1. Вигляд експериментальної установки і її комп’ютерна модель

Учням спочатку демонструють реальний експеримент або записаний на відео, після чого застосовують ефекти анімації для переходу до перегляду комп'ютерної моделі досліду, в якій розміщення всіх приладів відтворюється так само, як у реальному експерименті (рис. 1). Потім наводиться серія дослідів з розряджання металевих пластин під впливом випромінювання.

Після перегляду даних демонстрацій в учнів виникає ряд запитань, серед яких: чому заряджена пластина може утримувати заряд протягом тривалого часу, якими способами її можна розрядити, як пояснити швидкий розряд негативно зарядженої пластини під час освітлення ультрафіолетовим випромінюванням? Також розглядається можливість розряду позитивно зарядженої цинкової пластини під дією ультрафіолетового світла і спостереження розряду мідної пластини за тих же умов.

На основі відповідей на ці запитання учні під керівництвом учителя роблять наступні висновки:

1) Світло здатне розряджати лише негативно заряджені тіла або частинки. Це викликається фотоефектом, який полягає у вибиванні електронів з поверхні твердих і рідких тіл під дією світла.
2) Розряджання розпочинається відразу після початку освітлення, що свідчить про майже миттєву реакцію фотоефекту. Точні досліди показали, що час між початком опромінювання і початком фотоефекту надзвичайно короткий і не перевищує 10^{-9} с.
3) Наявність і швидкість розряджання залежать від характеристик металу, спектрального складу випромінювання та від інтенсивності.

Під час вивчення закономірностей фотоефекту учням демонструються інтерактивні комп’ютерні моделі для дослідження залежності фотоструму від спектрального складу (рис. 2), інтенсивності випромінювання (рис. 3) та прикладеної напруги.

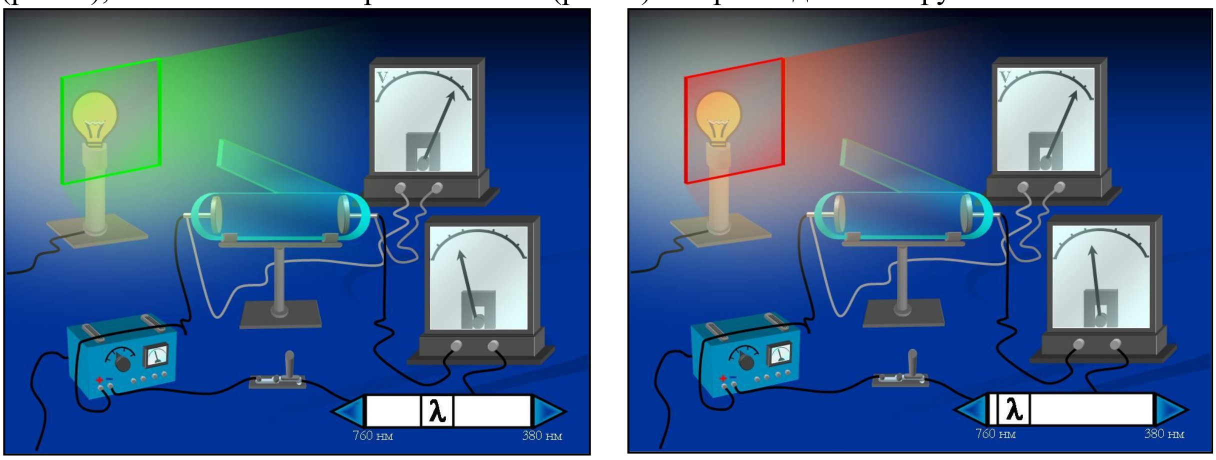


Рис. 2. Комп’ютерна інтерактивна модель дослідження залежності фотоструму від спектрального складу випромінювання

Дослідження залежності фотоструму від спектрального складу випромінювання проводяться на основі комп’ютерної моделі. Використовуючи різні світлофільтри домагаються зміни довжину (частоту) падаючого світла і визначають за допомогою гальванометра значення фотоструму.

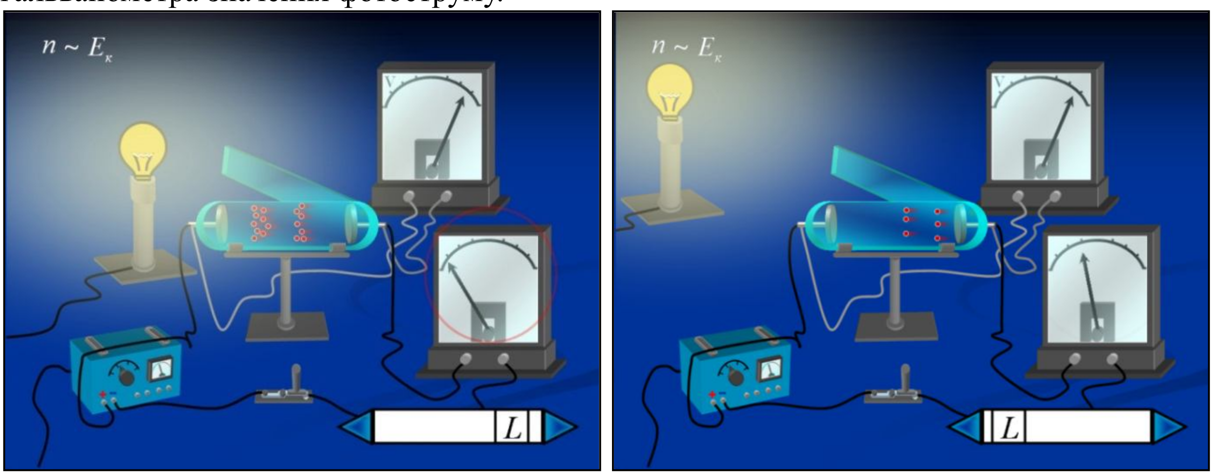


Рис. 3. Комп’ютерна інтерактивна модель дослідження залежності фотоструму від інтенсивності випромінювання

На основі отриманих результатів учні можуть зробити висновки, що сила фотоструму, що визначається швидкістю вилітання електронів, залежить від частоти падаючого світла і не залежить від інтенсивності світла.

Дослідження, що стосуються залежності сили фотоструму від потужності випромінювання, демонструються через використання інтерактивної комп'ютерної моделі. Шляхом зміни відстані від джерела випромінювання спостерігається зміна сили фотоструму. Це дає можливість зробити висновок, що фотострум насичення пропорційний світловій енергії, яка падає на поверхню за одиницю часу.

На основі демонстрації запропонованих комп’ютерних моделей учнів під керівництвом учителя роблять висновки і результаті цього приходять до «відкриття» законів зовнішнього ефекту на якісному рівні.

Наступним прикладом використання засобів комп’ютерного моделювання є програмний засіб «Світлові кванти» (рис. 4), який розроблений за допомогою об’єктно-орієнтованої мови програмування Delphi.

Розглянемо фрагменти проведення заняття з використанням комп’ютерних моделей даного засобу. Під час розгляду питання «Фотоелектричні явища», яке є основою теми «Квантова оптика», для кількісного дослідження законів зовнішнього фотоефекту варто провести комп’ютерний експеримент (рис. 5).

Рис. 4. ППЗ «Світлові кванти»

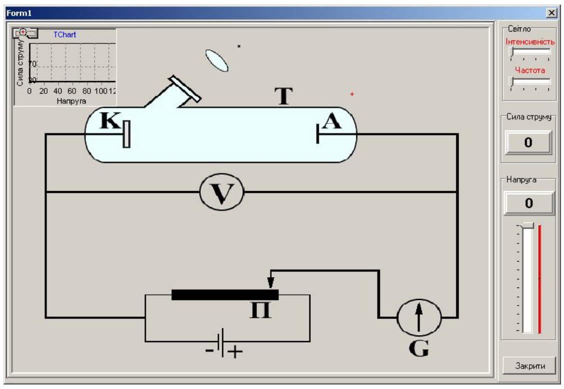


Рис. 5. Комп’ютерна інтерактивна модель установки

Як видно з рисунку 5, дана комп’ютерна модель є інтерактивною. Учні під час дослідження можуть задавати частоту та інтенсивність світла, а також визначати затримуючу напругу (рис. 6). У верхньому лівому куті екрану буде відображатися графік залежності сили фотоструму від напруги. Якщо натиснути на знак (+), який знаходиться у верхньому крайньому куті, то графік відкривається на весь екран (рис. 7). Графік можна будувати в автоматичному режимі і в ручному - за точками.

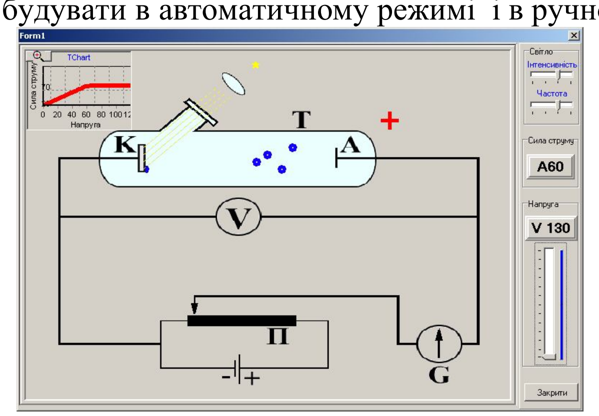


Рис. 6. Дослідження явища фотоефекту

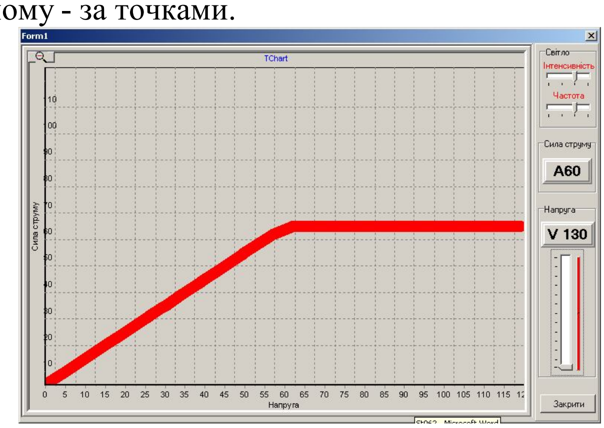


Рис. 7. Графік залежності сили струму від напруги

Використовуючи таку інтерактивну модель, учитель ознайомлює учнів із установкою для дослідження властивостей зовнішнього фотоефекту; демонструє залежність сили фотоструму від напруги між електродами за сталого світлового потоку і від світлового потоку за сталої напруги; вводить поняття фотоструму насичення, аналізує вольт-амперну характеристику фотоструму; дає формулювання і пояснює фізичний зміст законів зовнішнього фотоефекту кількісно.

Таким чином, вивчаючи закони зовнішнього фотоефекту, необхідно звернути увагу учнів на значення дослідів О. Столєтова із зовнішнього фотоефекту для розвитку передумов у створенні квантової теорії світла. Обґрунтовуючи рівняння А. Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту, необхідно вказати на універсальність закону збереження енергії, а також повідомити учнів про дослід Р. Міллікена щодо перевірки рівняння Ейнштейна і розрахунку сталої Планка.

Враховуючи вищесказане, треба зазначити, що впровадження інформаційно-комунікаційних технологій не зменшує ролі учителя в освітньому процесі, а учні в свою чергу перетворюються на активних учасників процесу пізнання. Учитель визначає, виходячи з певних форм, видів занять та індивідуальних особливостей учнів, які саме програмні засоби (репродуктивні чи проблемні, навчальні чи програми-тренажери тощо) найбільш доцільно використовувати на тому чи іншому етапі уроку для формування пізнавального інтересу та мотивації навчальної діяльності учнів до вивчення фізики.

Отже, застосування засобів комп’ютерного моделювання на уроках фізики є доцільним і сприяє підвищенню інтересу та формує мотивацію до вивчення навчального матеріалу, загострює і спрямовує увагу, підсилює активність сприйняття, сприяє міцному запам’ятовуванню фізичних явищ і процесів, підвищує рівень використання наочності та обсяг виконаної роботи на занятті, збільшує продуктивність заняття, економить час. Поєднання використання засобів комп’ютерного моделювання і традиційних засобів навчання забезпечує підвищення якості та ефективності освітнього процесу.

Висновки. Запропоновані нами методичні прийоми використання засобів комп’ютерного моделювання були апробована в комунальному закладі «Сосонський ліцей Вінницького району Вінницької області». Аналіз результатів досягнень учнів свідчить про ефективність використання комп’ютерного моделювання для підвищення інтересу учнів до вивчення фізики.

Разом з тим опанування квантової фізики на основі використання засобів комп’ютерного моделювання дає змогу підвищити інтерес учнів до вивчення даного матеріалу з фізики, стимулювати формування та розвиток пізнавальної активності і творчого мислення, формувати в учнів уявлення про явища мікросвіту, їх закономірності та сучасну фізичну картину світу.

Отже, використання засобів комп'ютерного моделювання в навчанні фізики має велику важливість для підвищення інтересу учнів до предмету. Адже за цих умов реалізується:

- *візуалізація*. Комп'ютерні моделі дозволяють учням бачити абстрактні фізичні концепції у дії, що полегшує їх розуміння і сприяє візуальному запам'ятовуванню.

- *залучення*. Інтерактивність комп'ютерних моделей заохочує учнів до активної участі в навчальному процесі, що збільшує їхню залученість і підтримує зацікавленість у вивченні фізики.

- *експериментування*. Віртуальні експерименти дозволяють учням випробувати різні сценарії та параметри без обмежень фізичних ресурсів, що робить навчання більш доступним та стимулюючим.

- *практичність*. Використання комп'ютерного моделювання дозволяє учням розвивати навички роботи з сучасними технологіями, що може бути корисним у подальшій кар'єрі.

Отже, використання засобів комп'ютерного моделювання в навчанні фізики є важливим і ефективним методом для збільшення зацікавленості учнів та покращення їхнього розуміння матеріалу. Сприяє підвищенню інтересу до складного вивчення навчального матеріалу, якості та ефективність формування важливих понять квантової оптики, а тому забезпечує усвідомлене розуміння сучасної фізичної картини світу.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Богданов І.Т. Предмет, цілі і завдання вивчення загальної фізики на нефізичних спеціальностях. *Зб. наук. праць Кам’янець-Подільського державного педагогічного університету. Серія педагогічна : Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей.* Кам’янець-Подільський: К-ПДПУ, 2002. Вип. 8. С. 129–136.
2. Бугайов О.І., Горбунцова Л.Г., Савченко В.І. Квантова фізика: Дидактичний матеріал. Київ: Рад. школа, 1988. 88 с.
3. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. НАПН України, Ін-т пед. освіти і освіти дорослих. Київ: Либідь, 1997. 376 с.
4. Заболотний В.Ф., Мисліцька Н.А., Моклюк М.О. Використання демонстраційних комп’ютерних моделей при вивченні фізики. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: зб. наук. пр*. Випуск 11 / Редкол. : І.А. Зязюн (голова) та ін. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2006. С. 208-212.
5. Лисий М.В., Сільвейстр А.М., Тичук Р.Б. Використання інформаційних технологій навчання в освіті. *Сучасні інноваційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. пр.* / Ін-т пед. освіти і освіти дорослих АПН України, Вінницький держ. пед. ун-т ім. М. Коцюбинського. Київ-Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2008. Вип. 19. С. 388–395.
6. Моклюк М.О. Моделювання явища радіоактивності та особливості його використання учителем на уроках фізики. *Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: Серія педагогічна* / [редкол.: П.С.Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін..]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 17: Інноваційні технології управління компетентнісно-світоглядним становленням учителя: фізика, технології, астрономія. С. 23-26.
7. Моклюк М.О., Моклюк О.О., Лисий М.В. Вивчення явища радіоактивності за допомогою засобів комп’ютерного моделювання. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти.* Випуск 8 Частина 2. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. С. 115-119.
8. Моклюк М.О., Сільвейстр А.М. Використання комп’ютерного моделювання у вивченні фізики. *Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми фізико-математичної освіти і науки»*, присвяченої 95-річчю від дня народження доктора технічних наук, професора Дущенка В.П. 25-26 травня 2017 року, Київ, Україна. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2017. С.224-227.
9. Муляр В.П. Комп’ютерне моделювання як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів при вивченні розділу «Квантова фізика». *Матеріали науково-практичної конференції «Пізнавальний інтерес і його вплив на процес навчання і самовиховання школярів»,* Луцьк, 1995. С.12-13.
10. Сільвейстр А. М. Теоретико-методичні засади навчання фізики майбутніх учителів хімії і біології : дис. … доктора пед. наук : 13.00.02. Кропивницький, 2017. 633 с.
11. Сільвейстр А.М. Формування пізнавальних інтересів студентів нефізичних спеціальностей на заняттях з фізики засобами інформаційних технологій навчання. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки : реалії та перспективи : зб. наук. пр.* Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. Вип. 34. С. 168–174.

UDC 373.5.091.33:004.94]:53

Use of computer simulation tools with the purpose of increasing students' interest in the study of physics

Anatolii Silveistr, Mykola Mokliuk, Maria Kopytko

Abstract. The article analyzes scientific research on the problem of the development of cognitive interest: the essence of the concept of "cognitive interest" is considered, the features of the formation of students' cognitive interest in physics classes are described.

The directions of the introduction of information technologies into the educational process are characterized, which include the development and practical use of scientific and practical support, the high-quality and effective use of software, computer training and knowledge control systems, the systematic integration of these technologies into existing educational processes and organizational structures.

It has been found that conducting experiments that are difficult or impossible to reproduce in a real experiment can be effectively implemented based on the use of multimedia models.

Possibilities of using computer modeling during the study of physics are offered.

It has been confirmed that the use of computer simulation elements is appropriate and justified during the study of educational material, for which conducting various kinds of educational physical experiments is limited. This is the study of the basic concepts of quantum physics.

The peculiarities of the study of the "Quantum optics" section are described, in which special attention is paid to the study of the phenomenon of the photoeffect. Examples of interactive computer models are given, the use of which makes it possible to increase the interest of students in studying this material in physics, to stimulate the formation and development of cognitive activity and creative thinking, to form in students an idea of the phenomena of the microcosm, their regularities, and the modern physical picture of the world.

Keywords: computer simulation, computer model, study of physics, cognitive interest, increase of interest.

References

1. Bohdanov I. T. (2002). *The subject, goals and tasks of studying general physics in non-physics majors*, Coll. of science works of Kamianets-Podilskyi State Pedagogical University. Pedagogical series: Didactics of physical, mathematical and technological educational fields, **8**, K-PDPU, Kamianets-Podilskyi, 129–136. [in Ukrainian]
2. Bugaiov O. I., Gorbuntsova L. G., Savchenko V. I. (1988). *Quantum physics: Didactic material*, Rad. School, Kyiv. [in Ukrainian]
3. Honcharenko S. U. (1997). *Ukrainian pedagogical dictionary*. National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Pedagogy education and adult education. Lybid, Kyiv. [in Ukrainian]
4. Zabolotny V. F., Myslitska N. A., Mokliuk M. O. (2006). *The use of demonstration computer models in the study of physics*, Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems: coll. of science Ave, **11**, «Planer» LLC, Kyiv-Vinnytsia, 208-212. [in Ukrainian]
5. Lysiy M. V., Sylveistr A. M., Tychuk R. B. (2008). *The use of information technologies of learning in education*, Modern innovative technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems: coll. of science Ave., **19**, Institute of Pedagogy of education and adult education of the APN of Ukraine, Vinnytsia state. ped. University named after M. Kotsyubynskyi, «Vinnytsia» LLC, Kyiv-Vinnytsia, 388–395. [in Ukrainian]
6. Mokliuk M. O. (2011). *Modeling the phenomenon of radioactivity and the peculiarities of its use by the teacher in physics lessons*, Collection of scientific works of Kamianets-Podilskyi National University named after Ivan Ohienko: Pedagogical series, Ser.: Innovative technologies for managing the teacher's development of competence and outlook: physics, technology, astronomy / [edited by: P.S. Atamanchuk (chairman, scientific editor) and others..], **17**, Kamianets-Podilskyi National University named after Ivan Ohienko, Kamianets-Podilskyi, 23-26. [in Ukrainian]
7. Mokliuk M. O., Mokliuk O. O., Lysyy M. V. (2015). *Studying the phenomenon of radioactivity using computer simulations*, Proceedings, Series: Problems of the methodology of physical, mathematical and technological education, **8** (2), RVV KDPU named after V. Vinnichenko, Kirovohrad, 115-119. [in Ukrainian]
8. Mokliuk M. O., Sylveistr A. M. (2017). *The use of computer modeling in the study of physics*, Abstracts of reports of the international scientific and practical conference «Modern problems of physical and mathematical education and science», dedicated to the 95th anniversary of the birthday of Doctor of Technical

Sciences, Professor V.P. Dushchenko, May 25-26, 2017, Kyiv, Ukraine, NPU named after M. P. Dragomanov, 224-227. [in Ukrainian]
9. Mular V. P. (1995). *Computer modeling as a means of activating students' cognitive activity when studying the «Quantum Physics» section*, Materials of the scientific and practical conference «Cognitive interest and its influence on the process of learning and self-education of schoolchildren», Lutsk, 12-13. [in Ukrainian]
10. Sylveistr A. M. (2017). *Theoretical and methodological principles of teaching physics to future teachers of chemistry and biology*: diss. ... doctor of pedagogy Sciences: 13.00.02, Kropyvnytskyi. [in Ukrainian]
11. Sylveistr A. M. (2012). *Formation of cognitive interests of students of non-physics majors in physics classes by means of educational information technologies*. Scientific journal of the National Pedagogical University named after M. P. Drahomanova, Series 5. Pedagogical sciences: realities and prospects: coll. of science pr., **34**, Publishing House of M. P. Drahomanov State University of Applied Sciences, Kyiv, 168–174. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Анатолій Сільвейстр, доктор педагогічних наук, професор, кафедра фізики і методики навчання фізики астрономії, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Anatolii Silveistr, Doctor of Science in Pedagogy, Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Микола Моклюк, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра фізики і методики навчання фізики астрономії, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mykola Mokliuk, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Physics and Teaching Methods of Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Марія Копитко, магістрантка, кафедра фізики і методики навчання фізики астрономії, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Maria Kopytko, Master’s Student, Department of Physics and Teaching Methods of Physics and Astronomy, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 08.04.2024
Доопрацьовано / Revised 18.05.2024

ТЕОРІЯ І МЕТОДИКА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ

Theory and methods of vocational education

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 75–88.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 75–88.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК 378.091.64-028.27:51]:37.018.4-025.26(477)

Навчальний посібник як елемент освітнього простору бакалавра математики в умовах змішаного навчання в Україні

Мар'яна Ковтонюк[1], Олена Соя[2], Оксана Туржанська[3], Олена Косовець[4], Іванна Леонова[5]

[1, 2, 3, 4, 5]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна

[1] kovtonyukmm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7444-1234

[2] soya.o.m@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0937-299X

[3] turganskaoksana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2636-354X

[4] helen.kosovets@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8577-3042

[5] ivannaleonova6@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0319-1370

Анотація. Розглянуто особливості створення та функціонування посібника (цифрового посібника) з вищої математики для бакалаврів математики в умовах змішаного навчання в Україні, зроблено огляд літератури з теми дослідження.

Мета статті: проаналізувати проблеми та перспективи створення посібників та цифрових посібників нового типу з математичних дисциплін для закладів вищої освіти в умовах змішаного навчання в Україні.

Обговорено особливості сучасного цифрового посібника з математичних дисциплін у підготовці бакалавра математики:

1) теоретичні аспекти створення навчальних посібників в освітньому просторі бакалавра математики в умовах змішаного навчання в Україні;

2) структуру та зміст цифрового посібника відповідно до чинної нормативної бази та практичного досвіду викладачів;

3) техніки візуалізації навчального матеріалу з математичних дисциплін й продемонстровано деякі з них в авторських посібниках;

4) використання СКМ і цифрових технологій у посібниках, що базуються на виваженій математичній ідеї; головним критерієм ефективності

застосування програм математичного призначення у навчанні вищої математики є наявність методичної системи їх використання;

5) результати анкетування, що свідчать про позитивне ставлення студентів до використання СКМ при вивченні математичних дисциплін; на думку студентів, роль програм математичного призначення у навчанні має бути допоміжною.

Показано, що якісний цифровий посібник забезпечує формування не лише математичної культури майбутнього фахівця, але й формування таких базових компетентностей, як здатність і готовність до самонавчання, застосовування знань, умінь і навичок роботи з системами комп'ютерної математики, самоосвіти й майбутньої професійної діяльності. Використання цифрового посібника, інтегрованого у технологію навчання, яку проєктує і впроваджує викладач, дозволяє йому обирати власну творчу стратегію та методику навчання здобувачів освіти.

Ключові слова: освітній простір бакалавра математики, навчальний цифровий посібник з вищої математики, візуалізація навчального контенту, системи комп'ютерної математики, змішане навчання.

1. Вступ

Створення посібника – це складний процес підготовки, видання, апробації, оцінювання та впровадження його в освітній процес. Головна роль та широкий спектр функцій посібника в навчанні завжди привертали незмінну увагу до проблем його змісту, якості та створення. І це не випадково.

По-перше, посібник, як навчальна книга, детально відображає зміст освіти, навчальну інформацію, що підлягає засвоєнню. Цю інформацію він передає не тільки у вигляді тексту, а й в ілюстраціях, рисунках, схемах, графіках. По-друге, також не менш важливою функцією посібника є функція управління пізнавальною діяльністю студентів. Апарат організації засвоєння навчального матеріалу складається з двох частин: допоміжних знань, що включені до основного навчального матеріалу, і завдань, вправ, питань та іншого, що повинно забезпечити процес засвоєння знань. Саме тому вчені трактують посібник як інформаційну модель навчання, як своєрідний сценарій освітнього процесу, що є втіленням дидактично та методично опрацьованого і систематизованого навчального матеріалу. З цих позицій посібник має відображати цілі та зміст навчання, визначати систему пізнавальних дій з матеріалом, організаційні форми навчання і способи контролю [26, с. 340].

Мексиканські науковці M. Pineda Becerril, O. García, A. Aguilar, F. León [9, с. 7550-7555] зауважують, що "цифрова книга – це видання, основою якого є електронний файл, що може зберігатися на різних цифрових носіях і дозволяє включати інтерактивні та мультимедійні елементи". Авторами розроблено мультимедійний посібник з розподілу ймовірностей. Зауважимо, що дидактичний матеріал розміщено в цифрових посібниках, інтегрованих у відповідні віртуальні середовища з метою, щоб студенти більше не були обмежені статичними зображеннями, що ілюструють традиційні тексти, а мали можливість зануритися в зображення з інтерактивними субтитрами, обертати об'єкт у 3D або оживити відповідь.

У статті [5, с. 9-12] розглядаються питання трансформації шкільних навчальних матеріалів у контексті цифрового суспільства в Латинській Америці та Європі. Цифрові технології присутні в усіх соціокультурних вимірах. В освітній цифровій екосистемі постійно з'являються численні простори, онлайн-портали та веб-сайти, що пропонують ресурси, програми, середовища та/або цифрові навчальні матеріали, призначені для використання в закладах освіти. Тому питання їх створення й поширення на міжнародному, національному та регіональному рівнях, технологічні та педагогічні характеристики цифрових навчальних матеріалів є актуальними.

Іспанські дослідники N. Rodríguez-Regueira та J. Rodríguez-Rodríguez [10, c. 172-187] проаналізували цифрові посібники для початкової освіти в Іспанії (30 цифрових навчальних матеріалів). Новизна їхнього дослідження полягає в розробленні й апробації посібника для аналізу такого типу матеріалів з урахуванням їхніх основних технологічних, педагогічних та функціональних характеристик у зв'язку з еволюцією цифрового освітнього ринку.

Дослідження сучасних науковців показують, що цифрові посібники особливо важко інтегрувати у викладання математики [8, с. 799-812] і що варто детальніше досліджувати як умови навчання математики змінюються завдяки сучасним цифровим підручникам [14] і посібникам, які використовують штучний інтелект [15, с. 2320-2320] і як можна розвивати навчання за допомогою них.

Про використання відкритих посібників у закладах вищої освіти та фінансову вигоду студентам від цього, без зниження їхніх результатів навчання, наголошується в статті [4, с. 573–590; 6, с. 393–396]. Це має спонукати викладачів використовувати високоякісні відкриті посібників в постпандемічному світі для розширення можливостей цифрового навчання у XXI столітті.

2. Постановка завдань

Останнім часом ми спостерігаємо деяку активізацію у виданні посібників і практикумів з математичних дисциплін для підготовки бакалавра математики за спеціальностями 111 Математика, 014.04 Середня освіта (Математика) та 014.09 Середня освіта (Інформатика) [1, 2, 2, 12, 21, 22, 29,30], а також публікацій, присвячених проблемам змісту посібників і практикумів для вказаних спеціальностей, , з урахуванням потреб студентів з особливими освітніми потребами [24], розширенню напрямів застосування цифрових технологій у створенні цифрових посібників та практикумів тощо. На нашу думку, актуальності даній проблемі надало змішане навчання студентів, яке функціонує в Україні з різних об'єктивних причин.

Мета статті: проаналізувати проблеми та перспективи створення посібників та цифрових посібників нового типу з математичних дисциплін для закладів вищої освіти в умовах змішаного навчання в Україні.

3. Основні результати

3.1. Теоретичні аспекти створення навчальних посібників в освітньому просторі бакалавра математики в умовах змішаного навчання в Україні.

Необхідність впровадження цифрових технологій в освітній процес показано у дослідженнях, здійснених Національним тренінговим центром у США. Результати досліджень одержали назву «Піраміда навчання» і показують, що під час використання відео, аудіо матеріалів засвоюється на 20% матеріалу більше, при використанні демонстрацій – на 30% більше від засвоєного матеріалу, ніж під час прослуховування звичайної лекції. Найбільший відсоток приросту знань впродовж навчання (робота в малих групах, робота в парах) і застосування одержаних знань одразу після вивчення («мозковий штурм», «акваріум») складає 90% [28].

Наші дослідження свідчать про те, що в умовах змішаного навчання посібники для студентів мають відповідати послідовності:

студент → посібник → викладач

(або студент → навчально-методичний комплекс (цифровий НМК) → викладач)

У цьому випадку роль викладача не зменшується, а, навпаки, посилюється, адже саме тут викладач не лише подає готову інформацію, а привчає студентів до самостійного пошуку, аналізу й опрацювання нової інформації.

Посібник має бути інтегрований у технологію навчання, котру проєктує і впроваджує викладач. Тоді логіка і структура заняття будуть елементом творчості викладача, і він спроможний обирати власну стратегію та методику навчання, а не лише йти за викладом матеріалу, запропонованим іншими авторами. В умовах, коли ідея студентоцентрованого навчання, побудованого на інноваційній діяльності викладача, є основоположною в освіті, такий підхід до навчальної книги, на нашу думку, набуває вирішального значення в посібникотворенні.

Згідно з Національним стандартом України «Видання. Основні види. Терміни та визначення понять» (ДСТУ 3017:2015) [27], посібник визначається як:

– **практичний посібник** (англ. guidebook) – це виробничо-практичне видання, що містить опис технології практичної діяльності, призначене для оволодіння якою-небудь професією, знаннями, навичками та (або) підвищення фахової кваліфікації й майстерності. Примітка: до практичних посібників належить самоучитель;

– **методичний посібник** (англ. teaching guide) – виробничо-практичне видання, основним змістом якого є методика виконання будь-якого виду практичної діяльності;

– **навчальний посібник** (англ. study aid; teaching aid) – це навчальне видання, що доповнює або частково (повністю) замінює підручник і має відповідний офіційно наданий гриф;

– **навчально-методичний посібник** (анг. guidance manual; methods handbook) – навчальний посібник, основним змістом якого є методика викладання навчальної дисципліни (її розділу, частини) або методика щодо розвитку та виховання особистості.

При створенні навчальних посібників необхідно враховувати що:

– навчальні книги повинні мати високий науково-методичний рівень, містити необхідний довідковий апарат;

– навчальні посібники мають бути написані в доступній формі, навчальний матеріал має бути пов’язаний з практичними завданнями, в книзі повинні прослідковуватися тісні міжпредметні зв’язки [25].

Наприклад, у підручнику авторів М. Ковтонюк, А. Клімішина, І. Леонова, О. Соя реалізовано глосарій математичних термінів українською та їхні відповідники англійською мовами (рис. 1).


Частинні похідні вищих порядків

§ 6. Частинні похідні вищих порядків

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Частинні похідні другого порядку	Second order partial derivatives
Змішані частинні похідні	Mixed partial derivatives
Частинні похідні вищих порядків	Partial derivatives of still higher orders
Диференціал другого порядку	Differential of the second order
Диференціали вищих порядків	Differentials of higher orders

1. Сформулювати означення частинних похідних другого

Рис. 1. Фрагмент навчального посібника з вищої математики [19,22]

Видання підручників і практикумів в Україні із навчальної дисципліни “Математичний аналіз” за останні 35 років зростає. Зокрема студенти спеціальностей 111 Математика, 014.04 Середня освіта (Математика) та 014.09 Середня освіта (Інформатика) використовують посібники А. Дороговцева (1994), І. Ляшка, А. Боярчука, Я. Гая, А. Калайди (1979) (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), Л. Дюженкової, Т. Колесник, М. Ляшенко, Г. Михаліна, М. Шкіля (2003) (Украї́нський держа́вний університе́т і́мені Миха́йла Драгома́нова), Н. Шунди, А. Томусяка, авторські М. Ковтонюк, А. Клімішиної, І. Леонової, О. Сої (2008, 2009, 2011, 2015, 2022, 2023) (Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, 1993), С. Гургули, В. Мойсишина, В. Воробйової (2008) (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу), Б. Ковальчук, Й. Шіпки (2002, 2004, 2006, 2010) (Львівський національний університет імені Івана Франка) та ін.

Проєктування змісту професійної математичної освіти є необхідною ключовою умовою успішної побудови навчальної дисципліни спеціальності. Особлива увага повинна приділятися складанню навчального плану спеціальності, робочій програмі, технологіям навчання, управлінню якістю навчання. На основі цих документів проєктуються і створюються навчально-методичні і цифрові навчально-методичні комплекси дисципліни, до яких входять, зокрема, авторські навчально-методичні розробки, посібники, включені у технологію навчання [20].

Поглиблення теоретичної і практичної складових професійної освіти бакалавра математики пропонуємо на основі посилення шкільної компоненти математичної освіти з подальшим фундуванням знань на різних рівнях. *Принцип фундування* у процесі навчання математики розуміють як процес виокремлення базових навчальних елементів шкільної математики з наступним їх теоретичним узагальненням, що розкривають цілісність, сутність, трансдисциплінарні зв’язки, і спрямовані на інтелектуальний розвиток студентів [20]. Особливістю принципу фундування є визначення основи для спіралевидної схеми моделювання предметних компетентностей бакалавра математики (спіраль фундування). У кожній математичній дисципліні варто виділяти базові поняття шкільної математики з подальшим аналізом їх фундування. Вони й складуть фундаментальне ядро математичних дисциплін.

Проаналізуємо цей процес на декількох прикладах. Освітній курс «Математика» у закладах загальної середньої освіти традиційно викладається як навчальні дисципліни: алгебра, алгебра і початки аналізу, геометрія. У Державних Стандартах шкільної математичної освіти визначено вісім змістових ліній шкільного курсу математики [18]: 1) Числа та дії над ними [Ч]; 2) Вирази та їх тотожні перетворення [В]; 3) Рівняння, нерівності та їх системи [РН]; 4) Функції, їх властивості та графіки [Ф]; 5) Елементи прикладної математики [ПМ]; 6) Початки математичного аналізу [МА]; 7) Геометричні фігури, їх елементи і властивості [ГФ]; 8) Геометричні величини, їх вимірювання та обчислення [ГВ].

Визначення змістових ліній дозволяє виокремити вихідні об’єкти фундування (рис. 2).

Важливим є те, що всі базові шкільні знання включаються у перелік елементів навчальних дисциплін підготовки бакалавра математики вище зазначених спеціальностей та переводяться з бази даних (формальне оперування у шкільній математиці) у базу предметних і професійних компетентностей студента. Наприклад, для поняття похідної необхідно обґрунтувати перехід від означення похідної на основі похибки різницевого відношення приросту функції до приросту аргументу до визначення граничного переходу і дельта-епсілон мови та мови послідовностей. Заповнення цих «переходів» між поняттями, теоремами, методами доведень, орієнтовними основами діяльності – це є одним із основних завдань навчальної дисципліни «Математичний аналіз».

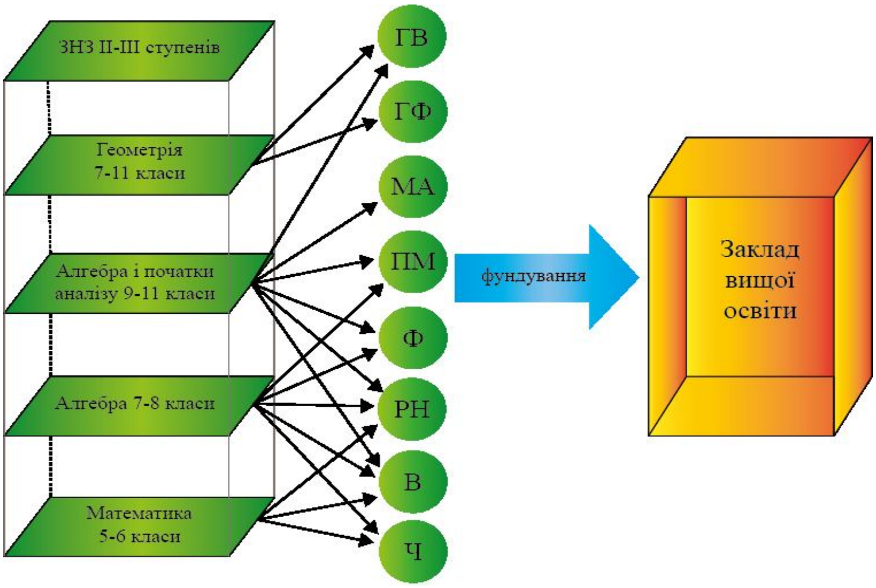


Рис. 2. Вихідні об'єкти фундування (авторська розробка)

Поняття первісної і визначеного інтеграла, що вивчаються в 11 класі закладі загальної середньої освіти, поступово узагальнюється через визначений інтеграл Рімана для функції однієї змінної, кратні інтеграли (подвійні, потрійні, поверхневі, криволінійні) для функцій багатьох змінних, і, нарешті, у курсі сучасного математичного (функціонального) аналізу вивчається інтеграл Лебега на вимірних множинах.

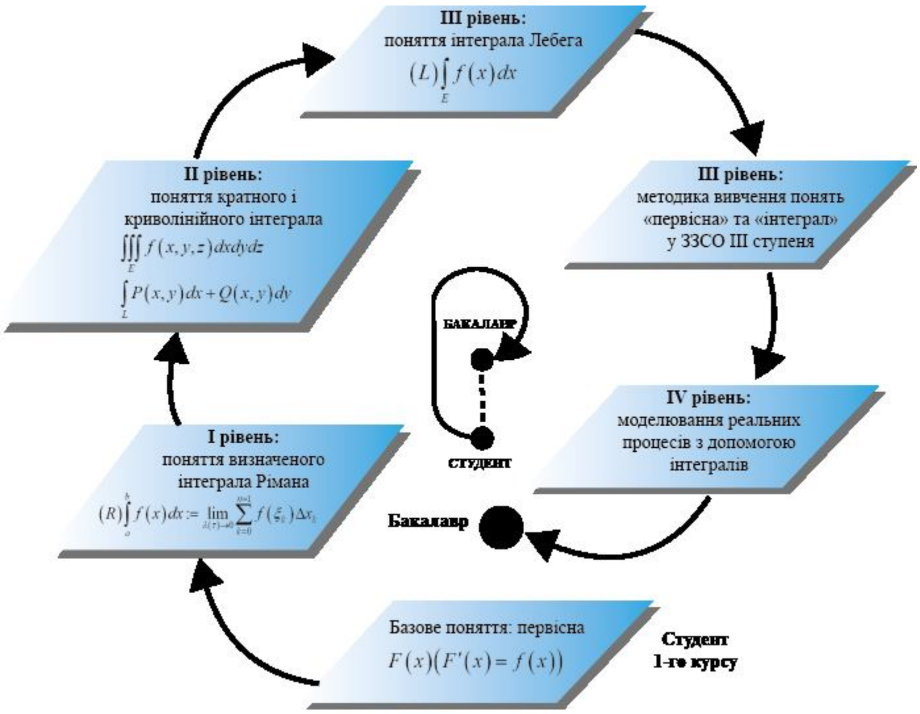


Рис. 3. Схема фундування шкільних понять первісної і визначеного інтеграла (авторська розробка)

Досягнувши певного рівня абстрактності даного поняття, студенти починають опрацьовувати методичний аналіз понять первісної і визначеного інтеграла у курсі методики навчання математики (рис. 3). Найвищий рівень фундування здійснюється під час моделювання реальних процесів і явищ за допомогою інтегралів, коли студент застосовує якісні математичні методи дослідження, системи комп’ютерної математики, виробляє практичні рекомендації.

На кожному рівні фундування особливу увагу слід звертати на розуміння суті кожного базового поняття.

Отже, підсумовуючи вище сказане, можна стверджувати, що інформаційна складова створення посібників для бакалаврів математики має формуватися на основі принципу фундування математичних об’єктів.

3.2. Візуалізація у навчальних підручниках з математики

Одними з найважливіших засобів візуалізації, необхідних на сучасному етапі розвитку освіти, є інфографіка, таймлайн, інтелект-карти, скрайбінг, які дозволяють максимально ефективно застосовувати інноваційні педагогічні технології, враховувати індивідуальні особливості студентів, як в психічному, так і фізіологічному розвитку. Для успішного вирішення цього пріоритетного завдання необхідна підготовка педагогів, здатних розробляти та впроваджувати нові методи і форми навчання. Створення і застосування таких цифрових технологій вимагає оволодіння різними засобами візуалізації.

Термін «візуалізація» походить від латинського visualis – сприймається візуально, наочний. Візуалізація – це процес представлення даних у вигляді зображення з метою максимальної зручності їх розуміння; надання осяжної форми будь-якому об’єкту, суб’єкту, процесу тощо. Проте таке розуміння візуалізації передбачає мінімальну розумову і пізнавальну активність студентів, а візуальні дидактичні засоби виконують лише ілюстративну функцію [16].

Візуалізація – унаочнення, створення умов для візуального спостереження [17].

Використання таблиць, схем, малюнків сприяє швидкому запам’ятовуванню і осмисленню досліджуваного матеріалу. З урахуванням сучасних технічних можливостей ідея візуалізації інформації в процесі навчання набуває нових рис (рис. 4).

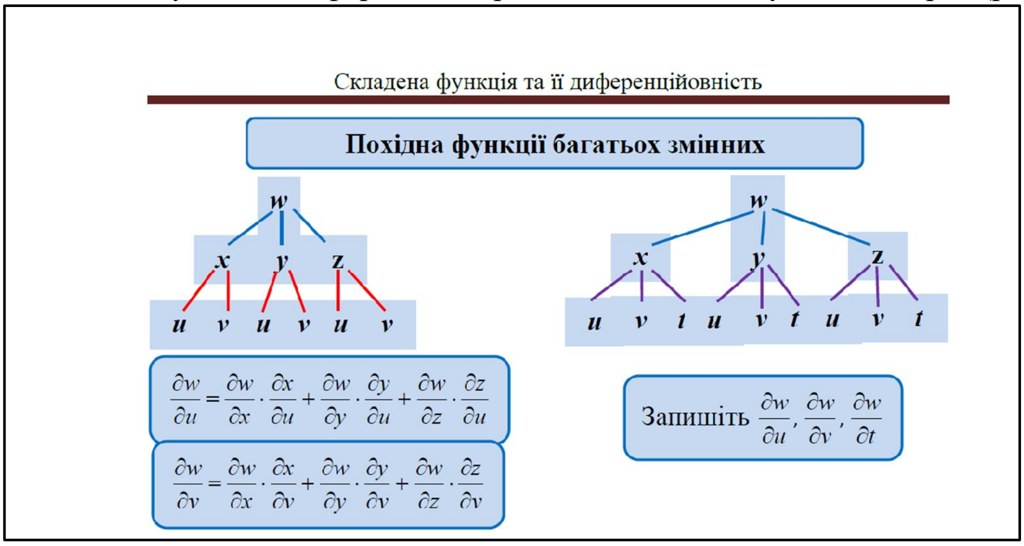


Рис. 4. Фрагмент навчального підручника з математики [19, 22]

Переваги візуалізації в навчанні математичних дисциплін:

– допомагає студентам правильно організовувати і аналізувати інформацію;

– діаграми, схеми, малюнки, карти пам'яті сприяють засвоєнню великих обсягів інформації, легко запам'ятовувати і простежувати взаємозв'язок між блоками навчального матеріалу;

– розвиває критичне мислення;

– допомагає студентам інтегрувати нові знання;

– дозволяє пов'язувати отриману інформацію в цілісну картину про ті чи інші явища або об'єкти (рис. 5).

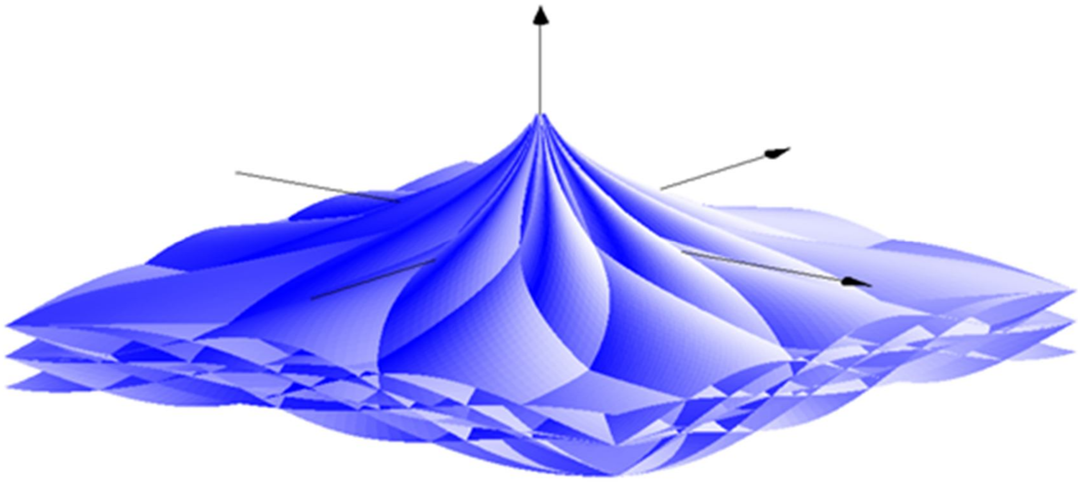


Рис. 5. Візуалізація поверхні "Снігова Лавина" (авторська розробка)

Представлення навчального матеріалу сучасними техніками візуалізації є невід'ємною частиною посібника з математики для студентів закладів вищої освіти. За допомогою візуалізації викладач демонструє складні абстрактні математичні поняття, що сприяє розвитку уяви, пам'яті студента та допомагає глибоко зануритись у навчальний матеріал.

3.3. Системи комп'ютерної математики в сучасних підручниках і практикумах з математичних дисциплін. Показати, як конкретно працює якийсь пакет при вивченні математики

З ключових слів дидактики: «Що вчити?», «Як вчити?» і «Для чого вчити? Навіщо мені це потрібно?», у посібниках в основному є відповіді на два перших запитання. Автори зарубіжних посібників значну частину присвячують розв'язуванню прикладних задач з фізики, економіки, біології та ін. [1, 2, 3,12]. Ще один важливий напрямок створення сучасних посібників з математичних дисциплін – це застосування систем комп'ютерної математики.

У зарубіжній літературі застосовується термін – Computer Mathematics Systems (CMS).

Завдяки СКМ у студента з'являються можливості за короткий час розв'язувати значну кількість математичних задач, готувати електронні книги [13]. Кожна із програм має певні особливості, які потрібно враховувати в процесі їх використання.

Розглянемо програмну реалізацію розв'язання деяких задач з математичного аналізу в СКМ, зокрема в середовищах Maxima, Mathcad.

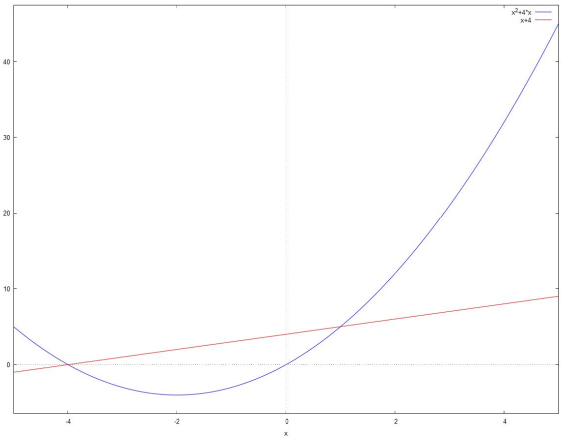
Задача. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої графіками функцій: $y = f(x), y = g(x)$.

Програмна реалізація в Maxima:

(%i1) wxplot2d(f(x),g(x)) ('зобразити плоску фігуру, обмежену графіками функцій f(x), g(x)');

(%i2) solve $(f(x) = g(x))$ (‘знайти межі інтегрування’);
(%i3) integrate (‘обчислити визначений інтеграл’).

Приклад програмного алгоритму, реалізованого в Maxima: знайти площу плоскої фігури, обмеженої графіками функцій $f(x) = x^2 + 4 \cdot x,\ g(x) = x + 4$.
*(%i1) wxplot2d([x^2+4*x,x+4], [x,-5,5])$*



*(%i2) solve([x^2+4*x=x+4], [x]);*
(%o2) [x=1,x=-4]
*(%i3) integrate(x+4-x^2-4*x, x, -4, 1);*
(%o3) 125/6.

Нами проведено анкетування студентів щодо використання СКМ у навчанні математичних дисциплін на базі Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. В анкетуванні взяли участь 42 студенти першого курсу.

Анкета містила такі питання:

1. Чи використовуєте Ви системи комп’ютерної математики при вивченні математичних дисциплін?
2. Для яких цілей Ви використовуєте системи комп’ютерної математики при вивченні математичних дисциплін?
3. Які переваги та недоліки використання систем комп’ютерної математики при вивченні математичних дисциплін Ви бачите?

Відповідно до результатів анкетування, 70% студентів першого курсу використовують системи комп’ютерної математики при вивченні математичних дисциплін. Найчастіше системи комп’ютерної математики використовуються студентами для розв’язування задач, перевірки правильності розв’язків, візуалізації математичних об’єктів.

До переваг використання систем комп’ютерної математики при вивченні математичних дисциплін студенти відносять: автоматизація рутинних обчислень, графічне відображення математичних об’єктів, краще засвоєння математичних методів та алгоритмів, доступність програм та інформації. Серед недоліків студенти відзначають: залежність від комп’ютера, необхідність оволодіння навичками роботи з системами комп’ютерної математики, більшість програм є комерційними.

Загалом, результати анкетування свідчать про те, що студенти позитивно ставляться до використання систем комп’ютерної математики при вивченні математичних дисциплін. На думку студентів, роль програм математичного призначення у навчанні має бути допоміжною.

Отже, поєднання навчального матеріалу з математичними середовищами має базуватися на виваженій математичній ідеї. Головним критерієм ефективності використання програм математичного призначення у навчанні математики є наявність методичної системи їх використання. Використання СКМ у навчанні математичних дисциплін сприяє інтеграції інформатики та математики, активізації самостійної роботи, саморегуляції математичних знань молоді, підвищенню їхньої математичної та інформатичної культури. У таких випадках, збільшується роль використання СКМ у дистанційному навчанні та самостійної роботи студентів.

Висновки. У статті розглянуто проблеми створення та функціонування посібника (цифрового посібника) з вищої математики для бакалаврів математики в умовах змішаного навчання в Україні. Показано, що якісний цифровий посібник забезпечує формування не лише математичної культури майбутнього фахівця, але й формування таких базових компетентностей, як здатність і готовність до самонавчання, здатність і готовність застосовувати знання, вміння і навички роботи з системами комп'ютерної математики для підвищення ефективності процесів освіти, самоосвіти і професійної діяльності. Використання цифрового посібника, інтегрованого у технологію навчання, яку проєктує і впроваджує викладач, дозволяє йому обирати власну творчу стратегію та методику навчання здобувачів освіти.

Обговорено особливості сучасного цифрового посібника з математичних дисциплін у підготовці бакалавра математики:

1) теоретичний аспект створення навчальних посібників в освітньому просторі бакалавра математики в умовах змішаного навчання в Україні;

2) структуру та зміст цифрового посібника відповідно до чинної нормативної бази та практичного досвіду викладачів;

3) техніки візуалізації навчального матеріалу з математичних дисциплін й продемонстровано деякі з них в авторських посібниках;

4) використання СКМ і цифрових технологій у посібниках, що базуються на виваженій математичній ідеї; головним критерієм ефективності застосування програм математичного призначення у навчанні вищої математики є наявність методичної системи їх використання;

5) результати анкетування, що свідчать про позитивне ставлення студентів до використання СКМ при вивченні математичних дисциплін; на думку студентів, роль програм математичного призначення у навчанні має бути допоміжною.

Розроблені й впроваджені авторські цифрові посібники відповідають основним критеріям їх ефективного функціонування: стратегічна спрямованість, повнота охоплення, інтенсивність, упорядкованість, узгодженість та мобільність.

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Gottlieb R. Calculus. An Integrated Approach to Functions and Their Rated of Change. Harvard University Preliminary ed. Copyring by Addison-Wesley, 2002. 1142 p.

2. Hartman G., Fitzpatrick S., Jordan A., Vollet C. APEX Calculus, 2023. 1039 p. URL: https://opentext.uleth.ca/PDF/apex-novideo.pdf

3. Hass J., Weir M., Thomas G. University Calculus. Early Transcendentals. Second Edition. Boston, 2012. 1083 p.

4. Hilton J. Open Educational Resources and College Textbook Choices: A Review of Research on Efficacy and Perceptions. *Educational Technology Research and Development*. 2016. Vol. 64, № 4. P. 573–590. DOI: https://doi.org/10.1007/s11423-016-9434-9

5. Introduction: From Textbooks to Digital Teaching Materials. *Latin American Journal of Educational Technology – RELATEC*. 2017. Vol. 16, № 2. P. 9–12. DOI: https://doi.org/10.17398/1695-288X.16.2.9

6. Ma H. Empowering Digital Learning with Open Textbooks. *Education Tech Research Dev*. 2021. Vol. 69. P. 393–396. DOI: https://doi.org/10.1007/s11423-020-09916-9

7. Mohar A. K. The Materiality of Textbooks: From black-and-white textbooks to the digital textbook. *Logos*. 2019. Vol. 30, № 2. P. 26–34. DOI: https://doi.org/10.1163/18784712-03002005

8. Pepin B., Gueudet G., Trouche L. Refining Teacher Design Capacity: Mathematics Teachers' Interactions with Digital Curriculum Resources. *ZDM Mathematics Education*. 2017. Vol. 49, № 5. P. 799–812. URL: http://rdcu.be/tmXb

9. Pineda Becerril M., García O., Aguilar A., León F. Development of a Multimedia Book of the Probability Distributions Subject as Support in the Fesc Statistics Subjects. *ICERI2018 Proceedings*. 2018. P. 7550–7555. DOI: https://doi.org/10.21125/iceri.2018.0351

10. Rodríguez-Regueira N., Rodríguez-Rodríguez J. Analysis of Digital Textbooks. *Educational Media International*. 2022. Vol. 59, № 2. P. 172–187. DOI: https://doi.org/10.1080/09523987.2022.2101207

11. Sirghea A. T., Sirghea C. R. Meanings Of The Digital Textbook. *Fifth International Conference on Adult Education*. 2018. Vol. 5, № 5. P. 701–706. URL: https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/701-706_0.pdf

12. Steward J. Calculus. Concepts and Contexts. McMaster University. Copyring by Thomson Higher Education, 2005. 1123 p.

13. Turzhanska O., Galetskyi S., Biloshytska T., Topishko N, Galetska T. Computer-Oriented Technologies in Teaching Mathematics as a Means of Self-Regulation of Young People's Mathematical Knowledge. *Youth Voice Journal. Inequality, Informational Warfare, Fakes and Self-Regulation in Education and Upbringing of Youth.* 2023. Vol. 1. P. 90–102. DOI: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29637.73441

14. Utterberg Modén M. Teaching with Digital Mathematics Textbooks. Activity theoretical studies of data-driven technology in classroom practices: Doctoral Dissertation / University of Gothenburg. Gothenburg. Sweden, 2021. 138 p.

15. Utterberg M., Tallvid M. Lundin J., Lindström B. Artificial Intelligence and Digital Mathematics Textbooks. *12th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI 2019).* 2019. P. 2320–2320. DOI: https://doi.org/10.21125/iceri.2019.0627

16. Візуалізація інформації [Електронний ресурс]. URL: https://www.slideshare.net/obobko/ss-15090625

17. Візуалізація навчальної інформації [Електронний ресурс]. URL: http://phys.ippo.kubg.edu.ua/?page_id=662

18. Державний стандарт базової і повної середньої освіти. URL: http://rvo-petr.ucoz.ua/pdf-doc/drzh_standard.pdf

19. Ковтонюк М. М. Електронний навчально-методичний комплекс з математичного аналізу і диференціальних рівнянь. URL: https://Kovtonyuk.com

20. Ковтонюк М. М. Фундаменталізація професійної підготовки майбутнього вчителя математики – бакалавра: монографія. Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2013. 424 с.

21. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М. Практикум з диференціального числення функції однієї змінної : навч. посіб. для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика) [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця: ВНТУ, 2022. 380 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/731

22. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соя О. М. Практикум з диференціального числення функції багатьох змінних : навч. посіб. для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика) [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця: ВНТУ, 2023. 251 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/812

23. Ковтонюк М. М., Мукоїд А. П., Гарник В. С. Інфографіка в навчанні математики. *Матеріали II Всеукраїнсьої науково-практичної Інтернет-конференції «Математика та інформатики у вищій школі: виклики сучасності».* 2019. С. 165–170.

24. Косовець О. П. Особливості створення електронного підручника з інформатики для студентів з вадами здоров'я. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання.* Київ, 2016. Вип. 19. URL: http://www.ii.npu.edu.ua/zbirnyk-kosn.

25. Методичні рекомендації щодо структури, змісту та обсягів підручників і навчальних посібників для вищих навчальних закладів. Науково-методичний центр вищої освіти МОН України. Протокол N 6 від 29.07.05. URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0006290-05#Text

26. Мойсеюк Н. Педагогіка: навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.]. Київ: ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика», 2007. 656 с.

27. Петрова Н., Плиса Г. Видання. Основні види. Терміни та визначення понять. Національний стандарт України. ДСТУ 3017:2015. Київ ДП «УкрНДНЦ», 2016. 42 с.

28. Піраміда навчання [Електронний ресурс]. URL: https://fsp.kpi.ua/ua/piramida-navchannya-edgara-dejla/

29. Тестові завдання з вищої математики: навч. посіб. / С. І. Гургула, В. М. Мойсишин, В. О. Воробйова та ін.; За ред. С. І. Гургули, В. М. Мойсишина. Івано-Франківськ: Факел, 2008. 737 с.

30. Хаць Р. В. Асимптотичні оцінки та їх застосування: тексти лекцій, практичні, індивідуальні завдання: навч. посіб. Дрогобич: ДДПУ ім. Івана Франка, 2023. 130 с.

UDC 378.091.64-028.27:51]:37.018.4-025.26(477)

Textbook as an element of the educational space of a bachelor of mathematics in the conditions of blended learning in Ukraine

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia, Oksana Turzhanska, Olena Kosovets, Ivanna Leonova

Abstract. The article considers the peculiarities of creating and functioning of a textbook (digital textbook) in higher mathematics for bachelors of mathematics in a blended learning environment in Ukraine, and reviews the literature on the topic.

The purpose of the article is to analyze the problems and prospects of creating new type of textbooks and digital manuals in mathematical disciplines for higher education institutions in a blended learning environment in Ukraine.

The features of a modern digital textbook in mathematical disciplines in the preparation of a bachelor of mathematics are discussed:

1) theoretical aspects of creating textbooks in the educational space of the bachelor of mathematics in the conditions of mixed learning in Ukraine;

2) structure and content of the digital textbook in accordance with the current regulatory framework and practical experience of teachers;

3) techniques of visualization of educational material in mathematical disciplines and demonstration of some of them in the author's textbooks;

4) the use of CMC and digital technologies in textbooks based on a sound mathematical idea; the main criterion for the effectiveness of the use of mathematical programs in teaching higher mathematics is the availability of a methodological system for their use;

5) the results of the questionnaire, which indicate a positive attitude of students to the use of CMC in the study of mathematical disciplines; according to students, the role of programs for mathematical purposes in teaching should be auxiliary.

It is shown that a high-quality digital textbook ensures the formation of not only the mathematical culture of a future specialist, but also the formation of such basic competencies as the ability and willingness to self-learn, apply knowledge, skills and abilities to work with computer mathematics systems, self-education and future professional activity. The use of a digital textbook integrated into the learning technology designed and implemented by the teacher allows him or her to choose their own creative strategy and methodology for teaching students.

Keywords: educational space of a bachelor of mathematics, digital textbook in higher mathematics, visualization of educational content, computer mathematics systems, blended learning.

References

1. Gottlieb R. Calculus. (2002). *An Integrated Approach to Functions and Their Rated of Change*, Harvard University Preliminary ed. Copyring by Addison-Wesley, 2002.

2. Hartman G., Fitzpatrick S., Jordan A., Vollet C. (2023). *APEX Calculus*, 2023. https://opentext.uleth.ca/PDF/apex-novideo.pdf

3. Hass J., Weir M., Thomas G. (2012). *University Calculus. Early Transcendentals. Second Edition*, Boston, 2012.

4. Hilton J. (2016). *Open Educational Resources and College Textbook Choices: A Review of Research on Efficacy and Perceptions*, Educational Technology Research and Development, **64** (4), 573–590. https://doi.org/10.1007/s11423-016-9434-9

5. *Introduction: From Textbooks to Digital Teaching Materials.* (2017), Latin American Journal of Educational Technology – RELATEC, **16** (2), 9–12. https://doi.org/10.17398/1695-288X.16.2.9

6. Ma H. (2021). *Empowering Digital Learning with Open Textbooks*, Education Tech Research Dev, **69**, 393–396. https://doi.org/10.1007/s11423-020-09916-9

7. Mohar A. K. (2019). *The Materiality of Textbooks: From black-and-white textbooks to the digital textbook*, Logos, **30** (2), 26–34. https://doi.org/10.1163/18784712-03002005

8. Pepin B., Gueudet G., Trouche L. (2017). *Refining Teacher Design Capacity: Mathematics Teachers' Interactions with Digital Curriculum Resources*, ZDM Mathematics Education, **49** (5), 799–812. http://rdcu.be/tmXb

9. Pineda Becerril M., García O., Aguilar A., León F. (2018). *Development of a Multimedia Book of the Probability Distributions Subject as Support in the Fesc Statistics Subjects*, ICERI2018 Proceedings, 7550–7555. https://doi.org/10.21125/iceri.2018.0351

10. Rodríguez-Regueira N., Rodríguez-Rodríguez J. (2022). *Analysis of Digital Textbooks*, Educational Media International, **59** (2), 172–187. https://doi.org/10.1080/09523987.2022.2101207

11. Sirghea A. T., Sirghea C. R. (2018). *Meanings Of The Digital Textbook*, Fifth International Conference on Adult Education, **5** (5), 701–706. https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/701-706_0.pdf

12. Steward J. (2005). *Calculus. Concepts and Contexts*, McMaster University. Copyring by Thomson Higher Education, 2005.

13. Turzhanska O., Galetskyi S., Biloshytska T., Topishko N, Galetska T. (2023). *Computer-Oriented Technologies in Teaching Mathematics as a Means of Self-Regulation of Young People's Mathematical Knowledge*, Youth Voice Journal. Inequality, Informational Warfare, Fakes and Self-Regulation in Education and Upbringing of Youth, **1**, 90–102. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29637.73441

14. Utterberg Modén M. (2021). *Teaching with Digital Mathematics Textbooks. Activity theoretical studies of data-driven technology in classroom practices*: Doctoral Dissertation / University of Gothenburg. Gothenburg. Sweden, 2021.

15. Utterberg M., Tallvid M. Lundin J., Lindström B. (2019). *Artificial Intelligence and Digital Mathematics Textbooks*, 12th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI 2019), 2320–2320. https://doi.org/10.21125/iceri.2019.0627

16. *Visualization of information*. https://www.slideshare.net/obobko/ss-15090625. [in Ukrainian]

17. *Visualization of educational information*. http://phys.ippo.kubg.edu.ua/?page_id=662. [in Ukrainian]

18. *State standard of basic and complete secondary education*. http://rvo-petr.ucoz.ua/pdf-doc/drzh_standard.pdf. [in Ukrainian]

19. Kovtoniuk M. M. *Electronic educational and methodical complex on mathematical analysis and differential equations*. https://Kovtonyuk.com. [in Ukrainian]

20. Kovtoniuk M. M. (2013). *Fundamentalization of professional training of future bachelor's degree mathematics teachers:* A Monograph, Vinnytsia, 2013. [in Ukrainian]

21. Kovtoniuk M. M., Klimishyna A. Ya., Leonova I. M. (2022). *Workshop on the differential calculus of a function of one variable*, VNTU, Vinnytsia, 2022. https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/731. [in Ukrainian]

22. Kovtoniuk M. M., Klimishyna A. Ya., Leonova I. M., Soia O. M. (2023). *Workshop on differential calculus of a function of many variables*, VNTU, Vinnytsia, 2023. https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/812. [in Ukrainian]

23. Kovtoniuk M. M., Mukoid A. P., Harnyk V. S. (2019). *Infographics in teaching math*, *Materials of the II All-Ukrainian Scientific and Practical Internet Conference* «Matematyka ta informatyky u vyshchii shkoli: vyklyky suchasnosti», 165–170. [in Ukrainian]

24. Kosovets O. P. Features of creating an electronic textbook on computer science for students with disabilities. Computer-oriented learning systems. Kyiv, 2016. Issue 19. URL: http://www.ii.npu.edu.ua/zbirnyk-kosn. [in Ukrainian]

25. Methodological recommendations on the structure, content and scope of textbooks and manuals for higher education institutions. Scientific and Methodological Center for Higher Education of the Ministry of Education and Science of Ukraine. Protocol N 6 of 29.07.05. URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0006290-05#Text. [in Ukrainian]

26. Moiseiuk N. (2007). *Pedagogy:* A Textbook, Kyiv, 2007. [in Ukrainian]

27. Petrova N., Plysa H. (2016). *Types of publications. The main types. Terms and definitions of concepts. National standard of Ukraine. DSTU 3017:2015*, Kyiv, 2016. [in Ukrainian]

28. *The pyramid of learning*, https://fsp.kpi.ua/ua/piramida-navchannya-edgara-dejla/. [in Ukrainian]

29. *Test tasks in higher mathematics:* A Textbook (2008) / S. I. Hurhula, V. M. Moisyshyn, V. O. Vorobiova et al; Eds. S. I. Hurhuly, V. M. Moisyshyna, Ivano-Frankivsk, 2008. [in Ukrainian]

30. Khats R. V. (2023). *Asymptotic estimators and their application: lecture texts, practical and individual tasks:* A Textbook, Drohobych, 2023. [in Ukrainian]

Про авторів / About the authors

Мар'яна Ковтонюк, доктор педагогічних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Mariana Kovtoniuk, Doctor of Sciences in Pedagogy, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Соя, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Soia, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Оксана Туржанська, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Oksana Turzhanska, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Олена Косовець, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Olena Kosovets, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

Іванна Леонова, асистент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

Ivanna Leonova, Assistant, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 10.04.2024

Доопрацьовано / Revised 19.05.2024

М І Ф

Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, Том 1, № 1 (2024), с. 89–98.
Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, Volume 1, No. 1 (2024), pp. 89–98.
Journal homepage: https://intranet.vspu.edu.ua/miph

УДК[378.147:51](045)

Професійна спрямованість математичної підготовки студентів технічних спеціальностей у контексті фундаменталізації освітнього процесу

Альона Коломієць

Вінницький національний технічний університет,
кафедра вищої математики, м. Вінниця, Україна
alona.kolomiets.vnt@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7665-6247

Анотація. У статті розглянуто особливості математичної підготовки майбутніх технічних фахівців у контексті фундаменталізації освітнього процесу. Здійснено дослідження дефініцій фундаменталізація, математична підготовка, виокремлено основні характеристичні ознаки математичної підготовки, що запропоновані дослідниками проблеми математичної підготовки. Проведено аналіз напрацювань науковців, що присвячені обраній проблемі дослідження. Встановлено, що математична підготовка майбутніх технічних фахівців є діалектичним поєднанням сформованих математичних вмінь та здатностей до їх прикладного застосування та безпосереднього процесу формування цих вмінь.

Фундаменталізацією математичної підготовки вважатимемо таку концепцію вдосконалення математичної підготовки, за якої відбувається виділення базових математичних інваріантів з метою їхнього подальшого застосування у професійній діяльності.

Для реалізації підходу професійної спрямованості математичної підготовки студентів технічних спеціальностей рекомендовано врахувати особливості побудови курсу вищої математики та курсів спецдисциплін з метою можливості інтеграції навчального матеріалу, а також організацію освітнього процесу у ЗВО. На основі аналізу освітніх програм для студентів різних спеціальностей Вінницького національного технічного університету, здійснено висновок про різницю програмних результатів з математики для студентів одного лекційного потоку. На підставі чого запропоновано уніфікувати завдання професійного змісту. Наведено приклади професійних завдань з розділу «Теорія ймовірностей».

Ключові слова: фундаменталізація, математична підготовка, професійна спрямованість.

1. Вступ

Серед основних завдань вищої технічної школи постає завдання якісної математичної підготовки майбутніх технічних фахівців, оскільки саме математична підготовка зумовлює якісну фахову підготовку майбутніх технічних фахівців. До основних вимог математичної підготовки майбутніх технічних фахівців належать: якісна ґрунтовна математична підготовка майбутніх технічних фахівців, високий рівень знань теоретичного матеріалу, володіння сукупністю базових математичних інваріантів. Перелічені вимоги стають підґрунтям до формування вмінь застосовувати математичні знання у прикладних задачах.

Забезпечення якості освітнього процесу декларується нормативними документами на рівні держави та внутрішніми документами на рівні університету. Зокрема, у положенні про відкрите заняття Вінницького національного технічного університету (ВНТУ) до критеріїв оцінювання відкритого заняття належать зокрема такі: 12.4. Професійна спрямованість формування професійного світогляду здобувачів вищої освіти на занятті; формування soft skills, що зумовлені цілями освітньої програми, зокрема подальшою професійною діяльністю здобувачів. [15]. У цьому контексті математична підготовка повинна набувати професійного спрямування.

Науковці І. Бардус, С. Гончаренко, С. Семеріков, Т. Ярхо вбачають залежність між рівнем професійної підготовки майбутніх технічних фахівців та фундаменталізацією освітнього процесу, зокрема із фундаменталізацією математичної підготовки.

Доробки науковців С. Архангельського, І. Бардус, А. Вербицького, С. Гончаренка, Г. Дутки, М. Лазарєва, Е. Лузік, Н. Морзе, В. Поліщук, О. Романовського, В. Сергіївського С. Семерікова, Н. Тализіної, Г. Шатковської, Т. Ярхо присвячені дослідженню концептуальних положень фундаментадізації вищої технічної школи. Проте аналіз сукупності праць переконує у тому, що між науковцями немає одностайності у трактуванні основних термінологічних понять фундаменталізації освітнього процесу та його компонентів, витлумачування основних дефінітивних понять залежить від предмету та мети дослідження. Особливий інтерес для нас представляють наукові напрацювання, присвячені фундаменталізації математичної підготовки студентів технічних спеціальностей. Дотичними цій тематиці є роботи І.Бардус, М. Ковтонюк, С. Семерікова, Т. Ярхо. Так, на думку С. Семерікова, «Фундаменталізація інформативної освіти зводиться до посилення математичної складової» [19, с. 62].

У контексті професійної підготовки майбутніх вчителів математики М. Ковтонюк окреслює фундаменталізацію як процес якісної зміни вищої освіти, що має двовимірну характеристику – освіта «вглиб» та освіта «вшир» [7].

2. Постановка завдань

Метою статті є розкрити проблему професійної спрямованості математичної підготовки студентів технічних спеціальностей у контексті фундаменталізації.

До *завдань дослідження* належать проведення аналізу дефініції фундаменталізації, математичної підготовки студентів технічних спеціальностей, виокремлення основних характеристичних ознак, що притаманні математичній підготовці студентів технічних спеціальностей, окреслення аспектів професійного спрямування математичної підготовки, наведення приклади застосування математичних інваріантів прикладного спрямування.

3. Основні результати

Фундаменталізація освітнього процесу передбачає «створення фундаменту знань», фундаменталізація математичної підготовки детермінує побудову математичного каркасу знань, для подальшого застосування їх у професійній діяльності, для застосування математичних знань при вивчені спецдисциплін. Тому реалізація концепції фундаменталізації математичної підготовки студентів технічних спеціальностей безпосередньо пов'язана із галуззю, спеціальністю та освітньою програмою за якою навчаються студенти. Деякі дослідники стверджують та переконують про оптимальність вибору семестру для вивчення конкретної дисципліни. Так, О. Березюк [1] підкреслює, що оптимальним для вивчення студентами наприклад, дисципліни Безпека життєдіяльності є 7-ий семестр (осінньо-зимовий семестр четвертого курсу) [1, с. 106]. Водночас вивчення дисципліни «Вища математика» студентами технічних спеціальностей передбачено на першому та другому курсі, що є оптимально та раціонально для подальшого вивчення спецдисциплін.

Фундаменталізацією математичної підготовки вважатимемо таку концепцію вдосконалення математичної підготовки, за якої відбувається виділення базових математичних інваріантів з метою їхнього подальшого застосування у професійній діяльності.

Дослідимо компоненти математичної підготовки. Прикметно, але навіть при досить великій кількості напрацювань, що присвячені проблемі математичної підготовки у вищій технічній школі, суть термінологічного словосполучення «математична підготовка» поки залишається достатньо не розкритою і є об'єктом дослідження багатьох науковців. Звертаючись до робіт науковців та аналізуючи пропоновані ними визначення математичної підготовки, підкреслимо, що визначення цієї дифеніції здійснюється в категоріях освітнього процесу. На переконання Г. Дутки математична підготовка є сукупністю сформованих якостей особистості, які слугують виконанню професійної діяльності фахівцями [4].

За С. Раковим до компонент математичної підготовки належать:

- сформованість математичного мислення;
- вміння думати логічно;
- уміння аналізувати та синтезувати одержані результати;
- вміння сприймати та застосовувати математичну інформацію під час вивчення спецдисциплін тощо;
- уміння будувати математичну модель професійної задачі, досліджувати її методами математики, аналізувати одержані результати [16].

Враховуючи перераховані дослідником компоненти математичної підготовки, підкреслимо, що математична підготовка майбутніх технічних фахівців є діалектичним поєднанням сформованих математичних вмінь та здатностей до їх прикладного застосування та безпосереднього процесу формування цих вмінь. Про багатокомпонентність математичної підготовки у своїх дослідження підкреслюють О. Глушко, О. Кучерук, С. Яценко. Дослідники поміж іншим виділяють «пізнавальну самостійність при застосуванні математичних понять» [3], [11] формування мотиваційної складової набувати математичні знання та опановувати вміння їх застосування у професійній діяльності, опанування базовими математичними знаннями, що зумовлюють опанування знань та вмінь інших освітніх галузей [3], [11].

Дослідники проблеми математичної підготовки студентів у технічному закладі освіти (В. Мурашковська, С. Казнадій, В. Петрук,) стверджують, що організація навчання повинна мати професійну спрямованість [13], [14].

Вагомими чинниками професійної спрямованості математичної підготовки у технічному університеті є теоретичні та емпіричні дослідження науковців процесу математичної підготовки; фундаменталізація освітнього процесу, що охоплює математичну підготовку і є детермінантою виокремлення математичних інваріантів з метою їх прикладного (професійного) застосування. Поміж іншим, необхідність професійної спрямованості математичної підготовки студентів технічних спеціальностей визначається наявним нерозумінням або низьким рівнем розуміння у студентів важливості вивчення розділів вищої математики та неусвідомлення потенціалу математичного апарату для вирішення завдань професійного змісту. Тому для уникнення перерахованих недоліків курс вищої математики доцільно будувати з орієнтацією на професійне спрямування вивчення дисципліни.

Одним із інструментів, що може послугувати для вирішення завдань професійного спрямування математичної підготовки студентів технічних спеціальностей є професійно – орієнтовані завдання.

Для реалізації запропонованого підходу необхідно врахувати:

- особливості побудови курсу вищої математики та курсів спецдисциплін з метою можливості інтеграції навчального матеріалу,
- організацію освітнього процесу у ЗВО.

Другий фактор пояснемо більш детально. Порівняємо компетентності, якими повинен оволодіти майбутній бакалавр залежно від обраної спеціальності. Проблема полягає у тому, що для студентів академічних груп, що утворюють один лекційний «потік», програмні результати навчання є різними. Це стосується, зокрема, і математичної підготовки студентів. Наведемо порівняння програмних результатів, якими повинні оволодіти майбутні фахівців спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка» та «Біомедична інженерія», навчальним планом для яких передбачено вивчення вищої математики в одному лекційному потоці (таблиця 1).

Таблиця 1. Порівняльна таблиця програмних результатів навчання студентів спеціальностей 172. Електронні комунікації та радіотехніка та 163. Біомедична інженерія

Шифр та назва спеціальності. Освітня програма	172 Електронні комунікації та радіотехніка. Програмне забезпечення телекомунікаційних систем	163 Біомедична інженерія. Біомедична інженерія
Формулювання компетентності, що стостується опанування математичними знаннями	ПРН 23. Впорядковувати та відтворювати знання розділів математики та фізики, що мають відношення до базового рівня телекомунікацій та радіотехніки. ПРН 24. Знання та розробка технічної документації, читання електричних, функціональних, складальних креслеників та пояснювальної записки.	ПРН 1. Застосовувати знання основ математики, фізики та біофізики, біоінженерії, хімії, інженерної графіки, механіки, опору та міцності матеріалів, властивості газів і рідин, електроніки, інформатики, отримання та аналізу сигналів і зображень, автоматичного управління, системного аналізу та методів прийняття рішень на рівні, необхідному для вирішення задач біомедичної інженерії. ПРН 5. Вміти використовувати бази даних, математичне і програмне

		забезпечення для обробки даних та комп’ютерного моделювання біотехнічних систем.

(складено автором на основі освітньо-професійних програм для студентів галузі 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації та 16 «Хімічна біоінженерія» Вінницького національного технічного університету).

Постає очевидним, що студенти одного лекційного потоку, що навчаються за різними спеціальностями та освітніми програмами, повинні мати різні програмні результати навчання в тому числі і ті, які стосуються вивчення вищої математики. Разом із тим, у програмних результатах навчання вищої математики закладено її обов’язкову професійну спрямованість.

Враховуючи різницю програмних результатів навчання студентів практичні завдання професійного змісту можна уніфікувати (у випадку їх розв’язування на лекційних заняттях для потоку студентів різних спеціальностей, і навіть галузей знань) або диференціювати (у випадку розв’язування на практичних заняттях зі студентами конкретної спеціальності).

Для того, щоб уніфікувати перелік завдань пропонуємо їх добір здійснювати враховуючи необхідність знань математичного апарату та вмінь будувати математичну модель для завдань професійного змісту. Для прикладу розглянемо декілька завдань з розділу «Теорія ймовірностей», що є уніфікованими для студентів, які навчаються за спеціальностями галузей 17 «Електроніка, автоматизація та електронні комунікації» та 16 «Хімічна біоінженерія».

Приклад 1. Нехай задано електричне коло, схему якого зображено на рисунку (рис. 1). Елементи схеми (1 і 2) можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти надійність електричного кола (зображеного на схемі), якщо надійність елементів дорівнює p_1, p_2 відповідно.

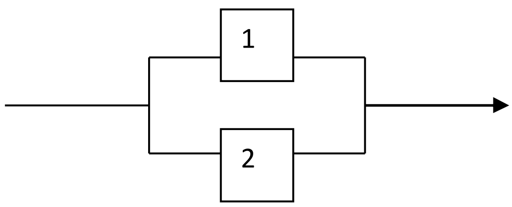


Рис.1. Схематичне зображення електричного кола

Розв'язання. Для того, щоб дана система вийшла з ладу, необхідно і достатньо, щоб вийшли з ладу обидва елементи 1 і 2. Ймовірність такої події є $(1 - p_1)(1 - p_2)$. Отже надійність роботи схеми дорівнює $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Приклад 2. Електричне коло зібрано за схемою, поданою на рис. 2:

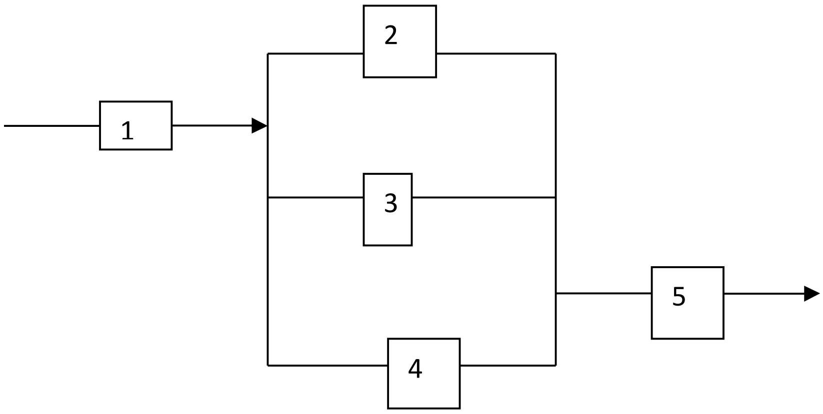


Рис. 2 Схематичне зображення електричного кола

Різні елементи електричного кола, що зображене схемою можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Надійність елементів дорівнює p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 відповідно. Знайти надійність електричного кола.

Приклад 3. Нехай деяка перешкода сигналу V типу «білий шум» є випадковою величиною v, що підлягає нормальному закону розподілу, з нульовим середнім та дисперсією σ^2. Побудувати модель прийняття рішень на основі підходу максимальної правдоподібності.

Розв'язання. Запишемо щільність ймовірностей випадкової величини v за умови нормального закону розподілу: $f(v) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$.

Функції правдоподібності будемо записувати як умовні імовірності, тобто

$$L(\theta_1) = p(u/\theta_1), \quad L(\theta_0) = p(u/\theta_0).$$

Покладемо, що здійснено k вимірювань для прийняття рішення щодо наявності корисного сигналу. Тоді будемо мати:

$$p(u/\theta_1) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^k} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}(u_j - \theta_1 S_j)^2},$$

$$p(u/\theta_0) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^k} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}(u_j - \theta_0 S_j)^2}.$$

Знайдемо відношення записаних функцій правдоподібності:

Позначимо $\Lambda = \dfrac{p(u/\theta_1)}{p(u/\theta_0)}$.

$$\Lambda = \frac{p(u/\theta_1)}{p(u/\theta_0)} = \frac{\dfrac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^k} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}(u_j - \theta_1 S_j)^2}}{\dfrac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^k} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}(u_j - \theta_0 S_j)^2}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(u_j-\theta_1 S_j)^2-\sum\limits_{j=1}^{k}u_j-\theta_0 S_j)^2\right)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(u_j^2-2u_jS_j+S_j^2)-\sum\limits_{j=1}^{k}u_j^2)^2\right)} =$$

$$\Lambda = \frac{p(u/\theta_1)}{p(u/\theta_0)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(u_j^2-2u_jS_j+S_j^2)\ -\sum\limits_{j=1}^{k}u_j^2\right)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\sum\limits_{j=1}^{k}u_jS_j+\sum\limits_{j=1}^{k}S_j^2)\right)} > 1,$$

$$\Lambda = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\sum\limits_{j=1}^{k}u_jS_j+\sum\limits_{j=1}^{k}S_j^2\right)} > 1 .$$

Прологарифмуємо останню рівність

$$\ln\Lambda = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\sum_{j=1}^{k}u_jS_j+\sum_{j=1}^{k}S_j^2\right) > 0.$$

Звідки отримаємо умову прийняття рішення про наявність сигналу:

$$2\sum_{j=1}^{k}u_jS_j-\sum_{j=1}^{k}S_j^2 > 0.$$

Висновки. Встановлено, що математична підготовка майбутніх технічних фахівців є діалектичним поєднанням сформованих математичних вмінь та здатностей до їх прикладного застосування та безпосереднього процесу формування цих вмінь. Фундаменталізація математичної підготовки передбачає таку концепцію вдосконалення математичної підготовки, за якої відбувається виділення базових математичних інваріантів з метою їхнього подальшого застосування у професійній діяльності.

За результатами аналізу досліджень науковців та власних досліджень автора здійснено висновок про доцільність запровадження завдань професійного змісту при вивченні розділів вищої математики у технічному університеті.

До основних чинників, що зумовлюють професійну спрямованість математичної підготовки належать: фундаменталізація освітнього процесу, що охоплює математичну підготовку і є детермінантою виокремлення математичних інваріантів з метою їх прикладного (професійного) застосування, низький рівень усвідомлення студентами прикладного застосування математичного апарату (потенціалу математичного апарату) під час розв'язання завдань професійного характеру.

Запропоновано реалізацію підходу професійної спрямованості математичної підготовки студентів технічних спеціальностей шляхом добору та розв'язування професійно-орієнтованих завдань.

Враховуючи особливість різниці програмних результатів навчання студентів практичні завдання професійного змісту можна уніфікувати (у випадку їх розв'язування на лекційних заняттях для потоку студентів різних спеціальностей, і навіть галузей знань) або диференціювати (у випадку розв'язування на практичних заняттях зі студентами конкретної спеціальності).

Конфлікт інтересів і етика. Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень, а саме щодо анонімності участі людей та/або згоди на публікацію.

Подяки. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Список використаних джерел

1.Березюк О.В. Проблеми при викладанні безпеки життєдіяльності в процесі підготовки фахівців радіотехнічного профілю. *Педагогіка безпеки.* 2019. № 2. С. 104-111. URL:https://doi.org/10.31649/2524-1079-2019-4-2-104-111

2.Васильєв В. М., Жук С.Я. Теорія ймовірностей в радіотехніці : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2023. 362 с.

3.Глушко О. О., Яценко С. Є. Математична підготовка майбутніх вчителів хімії і біології в педвузі як фактор, що підвищує конкурентоспроможність фахівця. URL:http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/Vchdpu/ped/2011_83/Glushko.pdf

4.Дутка Г. Я. Фундаменталізація математичної освіти майбутніх економістів: монографія. Київ, 2008. 480 с.

5.Карпенко О. Г. Теоретико-методологічні підходи професійної готовності фахівців до соціальної роботи. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 11. Соціологія. Соціальна робота. Соціальна педагогіка. Управління*. 2006. С. 46–54.

6.Ковтонюк М. М. Проблема фундаменталізації професійної освіти майбутнього вчителя математики. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія*: *Педагогіка*. 2012. № 4. С. 17-25. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NZTNPU_ped_2012_4_5

7.Ковтонюк М. М. Фундаменталізація професійної підготовки майбутнього вчителя математики – бакалаврів: монографія. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 425 с.

8. Ковтонюк М. М. Теоретичні і методичні засади фундаменталізації загальнопрофесійної підготовки майбутнього учителя математики:. дис. ... доктора пед. наук : 13.00.04. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2014. 549 с.

9. Коломієць А. А. Використання прикладних задач при вивченні теми «Диференціальні рівняння» як шлях до фундаменталізації навчального процесу. *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія*. 2014. № 42 (1). С. 37–40.

10.Коломієць А. А. Теорія і практика фундаменталізації математичної підготовки майбутніх бакалаврів галузі знань «Електроніка та телекомунікації» :. дис. ... доктора пед. наук : 13.00.04. Вінницький національний технічний університет. Рівненський державний гуманітарний університет Рівне, 2023. 628 с.

11. Кучерук О. Я. Математична підготовка майбутніх інженерів-програмістів в контексті компетентністного підходу. *The European Scientific and Practical Congress «Global scientific unity 2014»,* 26–27 September, Prague (Czech Republic), 2014. Vol. 3. P. 194–199.

12.Мельничук І. М. Теорія і методика професійної підготовки майбутніх соціальних працівників засобами інтерактивних технологій у вищих навчальних закладах : дис. … доктора пед. наук : 13.00.04; ТНПУ ім. Володимира Гнатюка. Тернопіль, 2011. 585 с. С. 27.

13. Мурашковська В. П., Казнадій С. П. Психолого-педагогічні основи математичної підготовки майбутніх інженерів-механіків. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 1. С. 264–268. URL: https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/5134/1/Murashkovska.pdf

14. Петрук В. А. Теоретико-методичні засади формування професійної компетентності майбутніх фахівців технічних спеціальностей у процесі вивчення фундаментальних дисциплін: монорафія. Вінниця: «Універсум-Вінниця», 2006. 292 с.

15.Положення про відкрите заняття. Вінницький національний технічний університет. URL: https://vntu.edu.ua/uploads/2021/polvs.pdf

16.Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія. Харків: Факт, 2005. 360 с.

17.Ребуха Л. З. Професійна підготовка фахівців соціальної сфери: проблемні підходи. *Матеріали міжнародної конференції : Проблеми реформування педагогічної науки та освіти*, м. Хмельницький, 1-2 грудня, 2017 р. С. 124–125.

18. Ребуха Л. Фундаменталізація вищої професійної освіти майбутніх соціальних працівників: антропологічний та гуманістичний підхід. *Фундаменталізація вищої професійної освіти. Людинознавчі студії. Серія «Педагогіка»*. Випуск 5/37 (2017). С. 156–163.

19.Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформативних дисциплін у вищій школі: монографія / за заг. наук. ред. М. І. Жалдак. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. 340 с.

UDC[378.147:51](045)

Professional orientation of mathematical training of technical specialty students in the context of fundamentalization of the educational process

Alona Kolomiiets

Abstract. The article examines the peculiarities of mathematical training of future technical specialists in the context of fundamentalization of the educational process. The study of the definitions of fundamentalization, mathematical preparation was carried out, the main characteristic features of mathematical preparation, proposed by the researchers of the problem of mathematical preparation, were singled out. An analysis of the work of scientists dedicated to the selected research problem was carried out. It has been established that the mathematical training of future technical specialists is a dialectical combination of formed mathematical skills and abilities for their applied application and the direct process of forming these skills.

The fundamentalization of mathematical training is considered to be the concept of improving mathematical training, in which basic mathematical invariants are selected for their further application in professional activities.

To implement the approach of professional orientation of mathematical training of students of technical specialties, it is recommended to take into account the peculiarities of the construction of the course of higher mathematics and courses of special disciplines in order to enable the integration of educational material, as well as the organization of the educational process in higher education institutions. Based on the analysis of educational programs for students of various specialties of the Vinnytsia National Technical University, a conclusion was made about the difference in program results in mathematics for students of the same lecture stream. On the basis of which it is proposed to unify tasks of professional content. Examples of professional tasks from the "Theory of Probability" section are given.

Keywords: fundamentalization, mathematical preparation, professional orientation.

References

1. Berezyuk, O.V. (2019). *Problems in teaching life safety in the process of training specialists in radio engineering.* Security pedagogy. **2**, 104-111. [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31649/2524-1079-2019-4-2-104-111

2. Vasiliev, V. M., Zhuk, S. Ya. (2023). *Probability theory in radio engineering*: a textbook, KPI named after Igor Sikorskyi, Polytechnic Publishing House, Kyiv. [in Ukrainian].

3. Hlushko, O. O., Yatsenko, S. E. Mathematical training of future teachers of chemistry and biology in a pedagogical university as a factor that increases the competitiveness of a specialist. [in Ukrainian]. http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/Vchdpu/ped/2011_83/Glushko.pdf

4. Dutka, G. Ya. (2008). *Fundamentalization of mathematical education of future economists*: monograph, UBS NBU, Kyiv. [in Ukrainian].

5. Karpenko, O. G. (2006). Theoretical-methodological approaches to the professional readiness of specialists for social work. *Scientific journal of the NPU named after M.P. Drahomanova. Series **11**. Sociology. Social work. Social pedagogy. Management,* 46–54. [in Ukrainian].

6. Kovtonyuk, M. M. (2012). The problem of fundamentalization of the professional education of the future teacher of mathematics. *Scientific papers of Volodymyr Hnatyuk Ternopil National Pedagogical University. Series: Pedagogy,* **4**, 17-25. in Ukrainian].http://nbuv.gov.ua/UJRN/NZTNPU_ped_2012_4_5

7. Kovtonyuk, M. M. (2013). *Fundamentalization of professional training of the future teacher of mathematics - bachelors*: A monograph, Firma "Planer" LLC, Vinnytsia. [in Ukrainian].

8. Kovtonyuk, M. M. (2014). *Theoretical and methodical foundations of the fundamentalization of the general professional training of the future teacher of mathematics*:. thesis ... doctor of pedagogy Sciences: 13.00.04, Vinnytsia, VSPU. [in Ukrainian].

9. Kolomiets, A. A. (2014). The use of applied problems in the study of the topic "Differential equations" as a way to fundamentalize the educational process. *Scientific notes of Vinnytsia State Pedagogical University named after Mykhailo Kotsiubynskyi. Series: Pedagogy and psychology,* **42** (1), 37–40. [in Ukrainian].

10. Kolomiets, A. A. (2023). *Theory and practice of fundamentalization of mathematical training of future bachelors in the field of knowledge "Electronics and telecommunications"*:. thesis ... doctor of pedagogy

Sciences: 13.00.04. Vinnytsia, Vinnytsia National Technical University, Rivne State Humanitarian University. [in Ukrainian].

11. Kucheruk, O. Ya. (2014). Mathematical training of future software engineers in the context of the competence approach, *The European Scientific and Practical Congress "Global scientific unity 2014", September 26–27, Prague (Czech Republic),* **3**. 194–199. [in Ukrainian].

12. Melnychuk, I. M. (2011). *Theory and methodology of professional training of future social workers by means of interactive technologies in higher educational institutions*: diss. ... doctor of pedagogy Sciences: 13.00.04, Ternopil, TNPU named after Volodymyr Hnatyuk. [in Ukrainian].

13. Murashkovska, V.P., Kaznadiy, S.P. (2018). Psychological and pedagogical foundations of mathematical training of future mechanical engineers, *Physical and mathematical education*, **1**, 264–268. [in Ukrainian]. https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/5134/1/Murashkovska.pdf

14. Petruk, V. A. (2006). *Theoretical and methodological principles of the formation of professional competence of future specialists in technical specialties in the process of studying fundamental disciplines*: A monoraphy, "Universum-Vinnytsia", Vinnytsia. [in Ukrainian].

15. Regulations on open classes, Vinnytsia National Technical University. [in Ukrainian]. https://vntu.edu.ua/uploads/2021/polvs.pdf

16. Rakov, S. A. (2005). *Mathematical education: competence approach using ICT*: A monograph, Fakt, Kharkiv. [in Ukrainian].

17. Rebukha, L. Z. (2017). Professional training of specialists in the social sphere: problematic approaches, *Materials of the international conference: Problems of reforming pedagogical science and education*, Khmelnytskyi, December 1-2, 2017, 124–125. [in Ukrainian].

18. Rebuha, L. (2017). Fundamentalization of higher professional education of future social workers: anthropological and humanistic approach, *Fundamentalization of higher professional education. Humanities studies.* "Pedagogy" series, **37** (5), 156–163. [in Ukrainian].

19. Semerikov, S. O. (2009). *Fundamentalization of teaching of informative disciplines in higher education*: A monograph / by general. of science ed. M. I. Zhaldak, NPU named after M. P. Drahomanova, Kyiv. [in Ukrainian].

Про автора / About the author

Альона Коломієць, доктор педагогічних наук, професор, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95. м. Вінниця, 21021, Україна;

Alona Kolomiiets, Doctor of Sciences in Pedagogy, Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Khmelnitsky highway 95, Vinnytsia 21021, Ukraine.

Отримано / Received 12.04.2024
Доопрацьовано / Revised 09.06.2024

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА:
НАУКА ТА ОСВІТА

електронний науковий журнал

Том 1, № 1

Видавець:
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК No 7482 від 19.10.2021 р.
21001, м. Вінниця, вул. К. Острозького, 32
Тел.: (0432) 61-28-12, 38 (097) 26-30-366
e-mail: info@vspu.edu.ua
http://www.vspu.edu.ua

Підписано до публікації 20.06.2024 р.
Гарнітура Times New Roman
Ум. друк. арк. 4,1