

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО  
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

***МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА:  
НАУКА ТА ОСВІТА***

**Mathematics, Informatics, Physics:  
Science and Education**

*Електронний науковий журнал  
Electronic scientific journal*

Том 3, № 1  
Volume 3, No. 1

Вінниця / Vinnytsia 2026

Рішенням Міністерства освіти і науки України журнал включено до Переліку наукових фахових видань (**категорія Б**), в яких можуть публікуватися результати дисертаційних досліджень (Наказ МОН України № 1721 від 10.12.2024 р.).

Рекомендовано до публікації рішенням Вченої ради Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол № 16 від 27 травня 2026 р.)

#### Редакційна колегія:

**Сергій Бак**, доктор фізико-математичних наук, професор, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна (*головний редактор*).

**Мар'яна Ковтонюк**, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна (*заступник головного редактора*).

**Вікторія Думенко**, кандидат технічних наук, доцент, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна (*відповідальний секретар*).

**Mustafa Avci**, Ph.D., Associate Professor, Університет Атабаски, м. Атабаска, Канада.

**Олег Бугрій**, доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, Україна.

**Володимир Дільний**, доктор фізико-математичних наук, професор, Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна.

**Віталій Іванюк**, доктор технічних наук, доцент, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна.

**Галина Ковтонюк**, кандидат педагогічних наук, доцент, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна.

**Іван Конет**, доктор фізико-математичних наук, професор, Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна.

**Andriy Ostapovets**, Ph.D., Senior Researcher, Інститут фізики матеріалів Чеської академії наук, м. Брно, Чеська Республіка.

**Andriy Panasyuk**, Doctor Habilitatus, Professor, Університет Кардинала Стефана Вишинського, м. Варшава, Республіка Польща.

**Mark Pankov**, Doctor Habilitatus, Professor, Вармінсько-Мазурський університет, м. Ольштин, Республіка Польща.

**Pavlo Pylyavskyy**, Ph.D., Professor, Університет Міннесоти, м. Міннеаполіс, США.

**Федір Сохацький**, доктор фізико-математичних наук, професор, Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця, Україна.

**Guoping Zhang**, Ph.D., Associate Professor, Державний університет Морґана, м. Балтимор, США.

**Володимир Щедрик**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів, Україна.

#### Запрошений редактор:

**Тетяна Барболіна**, доктор фізико-математичних наук, доцент, Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, м. Полтава, Україна.

Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. Вінниця: ВДПУ, 2026. Том 3, № 1. С. 1–90.

В журналі публікуються дослідження вітчизняних і закордонних науковців з актуальних проблем математики та математичного моделювання, зокрема, математичного моделювання в інформатиці, фізиці та освіті. Основні тематичні напрями: 1) актуальні проблеми математики; 2) математичне моделювання та обчислювальні методи; 3) моделювання освітніх процесів.

Періодичність видання – двічі на рік (травень, листопад).

Категорія читачів – науковці, викладачі, вчителі, аспіранти і здобувачі вищої освіти.

Засновник і видавець: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського.

Рік заснування: 2024.

Ідентифікатор медіа R40-05379.

DOI: 10.31652/3041-1955.

By the resolution of the Ministry of Education and Science of Ukraine the journal is included in the List of scientific professional publications (**category B**), in which the results of dissertations can be published (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine № 1721 of December 10, 2024).

Recommended for publication by the decision of the Academic Council of Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University  
(minutes of a meeting No. 16, 27.05.2026)

### Editorial Team

**Serhii Bak**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine (*Editor-in-Chief*).

**Mariana Kovtoniuk**, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine (*Deputy Editor-in-Chief*).

**Victoria Dumenko**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine (*Executive Secretary*).

**Oleh Buhrii**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine.

**Mustafa Avci**, Ph.D., Associate Professor, Athabasca University, Athabasca, Canada.

**Volodymyr Dilnyi**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, University of Agriculture in Krakow, Krakow, Poland; Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine.

**Vitalii Ivaniuk**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Ivan Ohienko Kamianets-Podilskyi National University, Kamianets-Podilskyi, Ukraine.

**Halyna Kovtoniuk**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine.

**Ivan Konet**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine.

**Andriy Ostapovets**, Ph.D., Senior Researcher, Institute of Physics of Materials of the Czech Academy of Sciences, Brno, Czech Republic.

**Andriy Panasyuk**, Doctor Habilitatus, Professor, Cardinal Stefan Wyszyński University, Warsaw, Poland.

**Mark Pankov**, Doctor Habilitatus, Professor, University of Warmia and Mazury, Olsztyn, Poland.

**Pavlo Pyliavskyi**, Ph.D., Professor, University of Minnesota, Minneapolis, United States of America.

**Fedir Sohatskyi**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, Pidstryhach Institute of Applied Problems for Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine.

**Volodymyr Shchedryk**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Pidstryhach Institute of Applied Problems for Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine.

**Guoping Zhang**, Ph.D., Associate Professor, Morgan State University, Baltimore, United States of America.

**Guest Editor:**

**Tetiana Barbolina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Poltava V. G. Korolenko National Pedagogical University, Poltava, Ukraine.

Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education. Vinnytsia: VSPU, 2026. Volume 3, No. 1. P. 1–90.

The journal publishes research by domestic and foreign scientists on current problems of mathematics and mathematical modeling, including mathematical modeling in computer science, physics, and education. Main thematic areas: 1) actual problems of mathematics; 2) mathematical modeling and computational methods; 3) modeling of educational processes.

Publication Frequency: twice a year.

The category of readers is scientists, lecturers, teachers, graduate students and higher education students.

Founder and publisher: Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University.

Year of foundation: 2024.

Media Identifier R40-05379.

DOI: 10.31652/3041-1955.

## ЗМІСТ / CONTENTS

*Іванна Андруссяк, Оксана Бродяк / Ivanna Andrusyak, Oksana Brodyak*

КЛАС ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ЯДЕР ІЗ КУБІЧНОЮ СИМЕТРИЗАЦІЄЮ / A Class of positive definite kernels with cubic symmetrization..... 1–10

*Сергій Бак, Галина Ковтонюк / Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk*

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ / Construction and analysis of a mathematical model of the dynamics of competence formation in the learning process..... 11–21

*Олег Бугрій, Дарія Яценяк / Oleh Buhrii, Daria Yatseniak*

ПІВЛІНІЙНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ НА ГРАФАХ / Semilinear parabolic equations on graph..... 22–40

*Олеся Даньків, Юрій Нечипор, Олег Кузык / Olesya Dan'kiv, Yuriy Nechypor, Oleh Kuzyk*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ЕФЕКТІВ НА КОЕФІЦІЄНТ ДИФУЗІЇ ДОМШОК У НАНОГЕТЕРОСТРУКТУРАХ / Mathematical modeling of the influence of deformation effects on the diffusion coefficient of impurities in nanoheterostructures..... 41–54

*Мар'яна Ковтонюк, Олена Соя / Mariana Kovtoniuk, Olena Soia*

ЗАСТОСУВАННЯ ЗЧИСЛЕННИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ L-ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВИБРАНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ / Asymptotic behavior of solutions of a countable system of linear differential equations with small parameters..... 55–64

*Fedir Sokhatsky / Федір Сохацький*

SAC LOOPS AND LOOPS OF ORDER FIVE / SAC лупи і лупи п'ятого порядку..... 65–77

*Iryna Fryz, Yevhen Pirus / Ірина Фриз, Євген Пірус*

PARASTROPIC-ORTHOGONAL TERNARY MEDIAL QUASIGROUPS WITH 3 AND 4 DISTINCT PARASTROPES / Парастрофно-ортогональні тернарні медіальні квазігрупи, які мають 3 і 4 різних парастрофи..... 78–90

УДК 517.9

## Клас додатно визначених ядер із кубічною симетризацією

Іванна Андрусак<sup>1</sup>, Оксана Бродяк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний університет "Львівська політехніка"  
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна  
[andrussyak.ivanna@gmail.com](mailto:andrussyak.ivanna@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0001-6601-4374>

<sup>2</sup>Національний університет "Львівська політехніка"  
кафедра вищої математики, м. Львів, Україна  
[oksana.y.brodiak@lpnu.ua](mailto:oksana.y.brodiak@lpnu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-9886-3589>

---

*Анотація.* Досліджується клас додатно визначених ядер  $K(x, y)$ , що породжуються цілою функцією  $k$  за допомогою симетризації, пов'язаної з кубічним коренем з одиниці. Для ядер, узгоджених із спектральною структурою задачі третього порядку  $u''' = \lambda u$ , отримано явне інтегральне подання функції  $k$  через невід'ємну спектральну міру  $d\rho(\lambda)$  з компактним носієм. Отримана формула задає конструктивну параметризацію допустимих ядер у розглянутому класі та встановлює прямий зв'язок між додатною визначеністю і спектральними даними.

*Ключові слова:* інтегральні зображення, ядро, додатно визначені функції.

---

## 1. Вступ

Теорія додатно визначених функцій та ядер становить фундаментальне підґрунтя сучасного математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної фізики. Завдяки своїм структурним властивостям ці об'єкти забезпечують універсальний математичний апарат для опису коваріаційних ядер випадкових процесів, гармонічного аналізу на групах та функціональних просторів Гільберта з відтворювальним ядром (Reproducing Kernel Hilbert Spaces, RKHS). Сучасний стан теорії RKHS, з особливим акцентом на

її конструктивні аспекти та широке коло прикладних застосувань, детально висвітлено у фундаментальних працях [1, 2].

У контексті функціонального аналізу інтегральні зображення додатно визначених ядер відіграють роль, аналогічну спектральним розкладам у теорії Фур'є. Зокрема, для класу зсувно-інваріантних ядер такі зображення безпосередньо пов'язані зі спектральними мірами згідно з класичними результатами типу теореми Бохнера. Для більш загальних структур ефективним інструментом дослідження виступає операторний підхід, що базується на спектральній теорії самоспряжених операторів. У межах цього підходу додатно визначені ядра допускають подання через власні функції відповідних диференціальних операторів, що встановлює глибокий зв'язок між теорією ядер та теорією крайових задач і спеціальних функцій (див., зокрема, [3, 4]).

Методологія ядер отримала значний розвиток у задачах обчислювальної математики та аналізу даних (Data-Driven Science). Вагомий внесок у розробку методів наближення на основі радіально-базисних функцій та статистичного навчання зроблено у працях М. Д. Бюмана [5] та Б. Шолкопфа [6]. Фундаментальні аспекти застосування RKHS у ймовірнісних моделях та спектральній теорії операторів також систематизовано у класичній роботі Ю. М. Березанського [9].

Спираючись на методи спектральної теорії, видається природним пошук аналітичних виразів для додатно визначених ядер у формі розкладів за власними функціями диференціальних операторів. Фундаментальну теоретичну базу для такого аналізу створює спектральна теорема для необмежених самоспряжених операторів [3, 4].

Метою даної роботи є виведення явного інтегрального зображення для специфічного класу додатно визначених ядер, що генеруються цілою функцією, асоційованих з лінійним диференціальним рівнянням третього порядку  $u''' = \lambda u$ . Основним об'єктом дослідження є інтегральне зображення вигляду:

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=0}^{r-1} \chi_j(x; \lambda) \overline{\chi_k(y; \lambda)} d\sigma_{jk}(\lambda),$$

де  $\chi_0(x; \lambda), \chi_1(x; \lambda), \dots, \chi_{r-1}(x; \lambda)$  — фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння  $Lu = \lambda u$ . Отримано інтегральні зображення ядер типу  $K(y - x), K(x - y), K(x + y)$ , пов'язаних з диференціальними операторами  $\frac{d}{dx}, -\frac{d^2}{dx^2}, i\frac{d}{dx}$ , а також доведена теорема про інтегральне представлення додатно визначених ядер, пов'язаних з диференціальним оператором третього порядку  $\frac{d^3}{dx^3}$ .

## 2. Побудова ядра та основний результат

У даному розділі вводиться формальне означення додатно визначеної цілої функції, що використовується в подальших теоретичних побудовах, та формулюється головне твердження про інтегральне зображення досліджуваного класу ядер. Розглядається ядро  $K(x, y)$ , побудоване на основі скалярної функції  $k$  шляхом композиції її значень на трьох афінних формах від  $(x, y)$ , які індуковані кубічними коренями з одиниці. Пропонована процедура симетризації є внутрішньо узгодженою зі специфікою спектрального аналізу диференціальних рівнянь третього порядку вигляду  $u''' = \lambda u$ .

**Означення 1.** Цілу функцію  $\mathbb{C} \ni s \mapsto k(s) \in C^\infty$  будемо називати додатно визначеною, якщо

$$\sum_{i,j=1}^N K(x_i, x_j) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall x_1, \dots, x_N; \xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де

$$K(x, y) = \frac{1}{3} \left[ k(x+y) + k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right) + k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right) \right],$$

а також виконується

$$\begin{aligned} K(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial x}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial y}(0, 0) = 0; \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Наступна теорема становить центральний результат цієї роботи. У ній отримано явне інтегральне зображення породжувальної функції  $k$  (а отже, і ядра  $K$ ) через спектральну міру  $d\rho(\lambda)$ . Подання такого типу є принципово важливими з двох причин: по-перше, вони забезпечують конструктивну параметризацію всіх допустимих додатно визначених ядер у межах розглядуваного класу; по-друге, встановлюють безпосередній зв'язок між властивістю додатної визначеності та спектральними характеристиками рівняння  $u''' = \lambda u$ .

**Теорема 2.** Нехай ціла додатно визначена функція  $k(s)$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ) задовольняє умову

$$k(s) + k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}s\right) + k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}s\right) = 0, \quad (3)$$

та оцінку

$$|k(s)| \leq C e^{|s|} \quad (C > 0). \quad (4)$$

Тоді має місце зображення

$$\begin{aligned} k(x) = \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} - \frac{1}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} \right] \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) + \\ + \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda x}} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} \right] \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $d\rho(\lambda)$  — деяка міра, причому

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) < \infty. \quad (6)$$

Навпаки, функція вигляду (5) є додатно визначеною і задовольняє (2)–(4).

### 3. Доведення основної теореми

*Доведення.* Оскільки для додатно визначеного ядра (1) виконується рівність

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} K(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3} K(x, y),$$

то для ядра  $K(x, y)$  можна застосувати Теорему 3.7 ([9], с.659) і використати зображення (3.20).

Для цього нам потрібно знайти фундаментальну систему розв'язків  $\chi_0(x; \lambda)$ ,  $\chi_1(x; \lambda)$ ,  $\chi_2(x; \lambda)$  рівняння

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = \lambda u, \quad (7)$$

які задовольняють умови

$$\frac{d^k}{dx^k} \chi_j(x; \lambda)|_{x=0} = \delta_{jk} \quad (j, k = 0, 1, 2).$$

Оскільки коренями характеристичного рівняння  $K^3 - \lambda = 0$  є  $K_1 = \sqrt[3]{\lambda}$ , якщо  $\lambda \geq 0$  та  $K_1 = -\sqrt[3]{|\lambda|}$ , якщо  $\lambda < 0$ ,  $K_{2,3} = \frac{-\sqrt[3]{\lambda} \pm i\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}}{2}$ , то загальний розв'язок (7), якщо  $\lambda \geq 0$  матиме вигляд

$$y = C_1 e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x + C_3 e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x.$$

Якщо ж  $\lambda < 0$ , то загальний розв'язок рівняння (7) буде мати вигляд

$$y = C_1 e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} + C_2 e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} + C_3 e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x}.$$

Тому фундаментальна система розв'язків рівняння (7) матиме такий вигляд:

$$\chi_0(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} + \frac{2}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} & (\lambda < 0), \\ \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + \frac{2}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x & (\lambda \geq 0); \end{cases}$$

$$\chi_1(x; \lambda) = \begin{cases} \left( \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} - \frac{1}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda < 0), \\ \left( \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda \geq 0); \end{cases}$$

$$\chi_2(x; \lambda) = \begin{cases} \left( \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} - \frac{1}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda < 0), \\ \left( \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda \geq 0). \end{cases}$$

Зображення (3.7) з теореми 3.1 ([9], с.643)

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_\lambda(x, y) d\rho(\lambda),$$

де

$$\Omega_\lambda(x, y) = \sum_{j,k=0}^2 \left( \frac{\partial^{j+k} \Omega_\lambda}{\partial x^j \partial y^k} \right) (0, 0) \chi_j(x; \lambda) \overline{\chi_k(y; \lambda)}; \quad d\sigma_{jk}(\lambda) = \left( \frac{\partial^{j+k} \Omega_\lambda}{\partial x^j \partial y^k} \right) (0, 0) d\rho(\lambda)$$

буде мати такий вигляд:

$$K(x, y) = \sum_{j,k=0}^2 \chi_j(x; \lambda) \overline{\chi_k(y; \lambda)}, \quad (8)$$

Оскільки  $K(x, y)$  задовольняє умову (2), то міри  $d\sigma_{jk}(\lambda) = 0$  ( $j, k = \overline{0, 2}$ , крім  $j = k = 2$ ) і зображення (8) матиме вигляд:

$$K(x; y) = \int_{R^1} \chi_2(x; \lambda) \overline{\chi_2(y; \lambda)} d\sigma_{22}(\lambda) = \int_{R^1} \chi_2(x; \lambda) \overline{\chi_2(y; \lambda)} d\rho(\lambda). \quad (9)$$

Далі, якщо у ядро  $K(x, y)$  покласти  $y = x$ , то умову (9) перепишемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}[k(2x) + k(-x) + k(-x)] &= \frac{1}{3}[k(2x) + 2k(-x)] = \int_{R^1} \chi_2^2(x; \lambda) d\rho(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} - \frac{1}{3} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{|\lambda|x} \right]^2 \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} + \\ &+ \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda x}} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} \right]^2 \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Праву частину (10) можна спростити наступним чином. Нехай  $\lambda \geq 0$ , то маємо

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda x}} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} \right]^2 \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{9} e^{2\sqrt[3]{\lambda x}} + \frac{1}{9} e^{-\sqrt[3]{\lambda x}} \cos^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} + \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{\lambda x}} \sin^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} - 2 \frac{1}{9} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1}{3\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} + 2 \frac{1}{3\sqrt{3}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} \right] \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{9} e^{2\sqrt[3]{\lambda x}} + \frac{1}{9} e^{-\sqrt[3]{\lambda x}} \left( \frac{1 + \cos \sqrt{3} \sqrt[3]{\lambda x}}{2} \right) + \frac{1}{3} e^{-\sqrt[3]{\lambda x}} \left( \frac{1 - \cos \sqrt{3} \sqrt[3]{\lambda x}}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{9} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} - \frac{2}{3\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda x} + \frac{1}{3\sqrt{3}} e^{-\sqrt[3]{\lambda x}} \sin \sqrt{3} \sqrt[3]{\lambda x} \right] \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{9} e^{2\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{9} e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} \cos \sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{3\sqrt{3}} e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} \sin \sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{2}{9} e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{2}{9} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x - \frac{2}{3\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x \right] \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda).$$

Отже, вираз (10), якщо  $\lambda \geq 0$ , має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} [k(2x) + 2k(-x)] &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{9} e^{2\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{9} e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} \cos \sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \right. \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{3}} e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} \sin \sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{2}{9} e^{-\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{2}{9} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x - \\ &\left. - \frac{2}{3\sqrt{3}} e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x \right] \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

звідки випливає, що

$$k(x) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda}x \right] \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda),$$

а це співвідношення (5) для випадку  $\lambda \geq 0$ .

Аналогічно з (10) можна отримати зображення (5) для випадку  $\lambda < 0$ .

З умови (6) випливає, що міра  $d\rho(\lambda)$  зосереджена на проміжку  $[-1, 1]$ .

Завдяки тому, що носій міри  $d\rho(\lambda)$  є компактним (обмеженим), функція  $k(x)$  допускає аналітичне продовження на всю комплексну площину, тобто до функції  $k(s)$  ( $s \in \mathbb{C}$ ).

Останнє твердження теореми доводиться наступним чином. Із зображення (5) знаходимо всі члени ядра  $K(x; y)$ .

Отже, для  $\lambda \geq 0$  маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} k(x+y) &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{9} e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} - \frac{1}{9} \left[ \frac{e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} + e^{(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[ \frac{e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} - e^{(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2i} \right] \left. \right\} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right) &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{9} e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} - \right. \\ &- \frac{1}{18} \left[ e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}y} + e^{\sqrt[3]{\lambda}x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} \right] + \\ &\left. + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[ \frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}y} - e^{\sqrt[3]{\lambda}x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}}{2i} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right) &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{18} \left[ e^{\sqrt[3]{\lambda}x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} + e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}y} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[ \frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} - e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}y}}{2i} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер якщо додати рівності (12), (13) та (14), то з урахуванням того, що

$$\begin{aligned} &\frac{1}{9} \left[ e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} + e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y} \right] = \\ &= \frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y + \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y \right), \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} &K(x, y) = \\ &= \frac{1}{3} \left[ k(x+y) + k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right) + k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right) \right] = \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)} + \frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y + \right. \\ &\quad + \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y - \frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y} - \\ &\quad - \frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}y} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y \cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y + \\ &\quad + \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y - \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y} - \\ &\quad \left. - \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}y}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y \cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x} \right\} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) = \int_0^1 \chi_2(x)\chi_2(y)d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (15)$$

Підставляючи (15) в (1), отримуємо додатну визначеність ядра  $K(x, y)$  для випадку  $\lambda \geq 0$ .

Аналогічно, перевіряється додатна визначеність ядра  $K(x, y)$  для випадку  $\lambda < 0$ .

Умова (2) впливає з (15).

Підставляючи  $y = 0$  у співвідношення (15), отримуємо виконання умови (3). Далі, з урахуванням умови (6), безпосередньо перевіряємо, що виконується й умова (4).

$$\begin{aligned} |k(x)| &\leq \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|x}} - \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|x}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|x} \right| \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^1 \left| \frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\lambda} x} - \frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2} x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2} x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\lambda} x \right| \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) \leq \\
 & \leq \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{3} e^{|x|} + \frac{1}{3} e^{\frac{|x|}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{|x|}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) + \int_0^1 \left( \frac{1}{3} e^{|x|} + \frac{1}{3} e^{\frac{|x|}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{|x|}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) \leq C_1 e^{|x|} \int_{-1}^1 \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = C e^{|x|}.
 \end{aligned}$$

Теорему доведено

**Висновки.** У роботі отримано інтегральні зображення для класу додатно визначених ядер  $K(x, y)$ , що породжуються цілою функцією  $k$  та узгоджені зі спектральною структурою рівняння третього порядку  $u''' = \lambda u$ . Зображення задано через невід'ємну спектральну міру  $d\rho(\lambda)$  з компактним носієм, що забезпечує конструктивну параметризацію ядер у розглянутому класі та дозволяє перевіряти додатну визначеність через спектральні дані.

З погляду сучасної літератури з теорії ядер та просторів RKHS, зокрема [1, 10], даний результат доповнює загальні підходи конкретною операторно-узгодженою побудовою ядра і явною формулою інтегрального зображення. На відміну від апроксимаційно-чисельних підходів [2, 7] та прикладної перспективи в задачах машинного навчання [6], у центрі уваги тут — ядра, що виникають із розкладів за власними функціями диференціальних операторів.

Порівняно з операторно-спектральним тлом [3, 4], основний внесок статті полягає в отриманні явної формули для породжувальної функції  $k$  (і, відповідно, ядра  $K$ ) через спектральний параметр  $\lambda$ , адаптованої до кубічно-кореневої структури задачі третього порядку. Отримані формули можуть бути використані для побудови прикладів і як основа для подальших узагальнень на споріднені оператори вищих порядків та різні крайові умови.

**Конфлікт інтересів і етика.** Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

**Подяки.** Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

### Список використаних джерел

1. Paulsen V. I., Raghupathi M. An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 192 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781316219232>
2. Fasshauer G. E., McCourt M. J. Kernel-based Approximation Methods Using MATLAB. New Jersey: World Scientific, 2015. 536 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/9335>
3. Davies E. B. Linear Operators and Their Spectra. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 464 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511618864>
4. Teschl G. Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrödinger Operators. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2014. 356 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/gsm/157>

5. Buhmann M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 272 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511543241>
6. Schölkopf B., Smola A. J. Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond. Cambridge: MIT Press, 2001. 648 p. DOI: <https://doi.org/10.7551/mitpress/4175.001.0001>
7. Wendland H. Scattered Data Approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 348 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511617539>
8. Bakry D., Gentil I., Ledoux M. Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators. Cham: Springer, 2014. 552 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9>
9. Березанський Ю. М. Розклад самоспряжених операторів за власними функціями. Київ: Наукова Думка, 1965. 798 с.
10. Berlinet A., Thomas-Agnan C. Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics. Boston—Dordrecht—London: Kluwer Academic Publishers. 2004. 344 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9096-9>

UDC 517.9

## A Class of positive definite kernels with cubic symmetrization

Ivanna Andrusyak, Oksana Brodyak

*Abstract.* The class of positive definite kernels  $K(x, y)$  generated by an entire function  $k$  by means of symmetrization associated with cube roots of unity is investigated. For kernels consistent with the spectral structure of the third-order problem  $u''' = \lambda u$ , an explicit integral representation of the function  $k$  in terms of a nonnegative spectral measure  $d\rho(\lambda)$  with compact support is obtained. The obtained formula determines the constructive parameterization of admissible kernels in the considered class and establishes a direct connection between positive definiteness and spectral data.

*Keywords:* integral representation, kernels, positive definite function.

### References

1. Paulsen, V. I., Raghupathi, M. (2016). *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CB09781316219232>
2. Fasshauer, G. E., McCourt, M. J. (2015). *Kernel-based Approximation Methods Using MATLAB*, World Scientific, New Jersey. <https://doi.org/10.1142/9335>
3. Davies, E. B. (2010). *Linear Operators and Their Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CB09780511618864>
4. Teschl, G. (2014). *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrödinger Operators*, 2nd ed., American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/157>
5. Buhmann, M. D. (2003). *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CB09780511543241>
6. Schölkopf, B., Smola, A. J. (2001). *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*, MIT Press, Cambridge. <https://doi.org/10.7551/mitpress/4175.001.0001>
7. Wendland, H. (2005). *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CB09780511617539>
8. Bakry, D., Gentil, I., Ledoux, M. (2014). *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9>
9. Березанський, Ю. М. (1965). *Decomposition by eigenfunctions of self-adjoint operators*, Naukova Dumka, Kyiv. [in Ukrainian]
10. Berlinet, A., Thomas-Agnan, C. (2004). *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer Academic Publishers, Boston—Dordrecht—London. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9096-9>

**Про авторів / About the authors**

**Іванна Андрусяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Національний університет "Львівська політехніка вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

**Ivanna Andrusyak**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine;

**Оксана Бродяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Національний університет "Львівська політехніка вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна;

**Oksana Brodyak**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Lviv Polytechnic National University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 02.03.2026  
Прийнято до друку / Accepted 03.04.2026  
Опубліковано / Published 27.05.2026

УДК 517.9:519.87:37

## Побудова та аналіз математичної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання

Сергій Бак<sup>1</sup>, Галина Ковтонюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,  
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна  
sergiy.bak@vspu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0003-1508-2144>

<sup>2</sup>Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,  
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна  
kovtonyukgm@vspu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-3352-0358>

---

*Анотація.* У статті запропоновано математичну модель динаміки формування компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання, побудовану на основі аналогії з компартментними та епідеміологічними моделями. Модель враховує п'ять рівнів сформованості компетентностей (вхідний, низький, середній, достатній і високий) та описує як прогресивні, так і регресивні переходи між ними з урахуванням контактних і безконтактних механізмів взаємодії. Отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описує часову еволюцію відповідних груп здобувачів освіти. Для побудованої моделі досліджено задачу Коші: доведено обмеженість розв'язків, а також існування і єдиність розв'язку за допомогою стандартних результатів теорії диференціальних рівнянь. Запропонований підхід дозволяє формалізувати процес формування компетентностей та створює основу для подальшого аналізу, зокрема дослідження стійкості, чутливості параметрів і задач оптимального керування освітнім процесом.

*Ключові слова:* математичне моделювання, формування компетентностей, компартментні моделі, епідеміологічні моделі, задача Коші, існування та єдиність розв'язку.

---

### 1. Вступ

Останнім часом спостерігається зростання інтересу до застосування методів математичного моделювання для аналізу освітніх процесів ([4, 5, 7, 10, 12]). Особливе місце

серед таких підходів посідають епідеміологічні та компартментні моделі ([3, 6, 8]), які завдяки своїй структурній гнучкості дозволяють описувати динаміку поширення знань, навчальної мотивації та поведінкових характеристик студентів.

Класичні роботи з математичної біології та епідеміології заклали теоретичні основи поділу популяції на підгрупи та аналізу переходів між ними за допомогою систем диференціальних рівнянь ([9, 13]). Надалі ці підходи були успішно адаптовані для моделювання соціальних процесів, зокрема поширення інформації та знань.

У контексті математичної освіти низка досліджень присвячена аналізу впливу мотивації, соціальної взаємодії та поведінкових факторів на навчальні результати. Зокрема, у роботі [5] побудовано математичну модель процесу навчання студентів в рамках математичної освіти, виконано аналіз чутливості параметрів і сформульовано задачу оптимального керування освітнім процесом, що підтверджує доцільність використання диференціальних моделей для дослідження навчальної динаміки.

Важливим кроком у цьому напрямку є робота [10], у якій запропоновано епідеміологічну модель навчальної поведінки студентів, побудовану за аналогією з класичною SIR-моделлю. Автори інтерпретують процес навчання як поширення «навчальної поведінки» в студентському середовищі та демонструють, що соціальна взаємодія, мотивація та інтенсивність навчального впливу відіграють ключову роль у переходах між різними рівнями навчальної активності. Ця робота підтверджує універсальність методу аналогій і його придатність для формалізації складних освітніх явищ. Зауважимо, що вперше SIR-модель була запропонована В. Кермаком і А. Маккендріком ([9]) в 1927 році для моделювання поширення інфекційного захворювання. Тут люди характеризуються трьома класами: сприйнятливі (Susceptible), інфіковані (Infected) та видужалі/вилучені (Recovered/Removed).

Разом із тим зазначені моделі переважно зосереджені на загальних характеристиках навчальної поведінки або обізнаності та не враховують усю специфіку формування компетентностей у процесі навчання. На відміну від моделей, запропонованих у [5, 6, 10], де основна увага приділяється загальній навчальній поведінці або обізнаності, у цій роботі компартментна структура адаптується до специфіки формування компетентностей у процесі навчання відповідно до рівнів їх сформованості. Зокрема, тут передбачається наявність як прогресивних, так і регресивних переходів, пов'язаних із втратою певних компетентностей на кожному рівні. Такий підхід дозволяє більш адекватно відобразити реальні процеси, які виникають під час навчання.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо деяку педагогічну модель формування певних компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання. В цій моделі визначимо чотири рівні сформованості компетентностей: низький (початковий), середній (репродуктивний), достатній (конструктивний) і високий (творчий).

Низький (початковий) рівень — здобувачі освіти перебувають на початковому етапі формування компетентностей, зустрічаються з труднощами в опануванні навчального матеріалу, здатні відтворити лише незначну його частину, потребують постійної допомоги, виявляють пасивність в навчанні, застосування знань на практиці відсутнє (компетентності майже не сформовані).

Середній (репродуктивний) рівень — здобувачі мають стабільно сформовані базові знання, вміння і навички, відтворюють ці знання і виконують типові завдання за зразком, але не виявляють достатньої самостійності (компетентності сформовані частково).

Достатній (конструктивний) рівень — здобувачі здатні самостійно виконувати типові завдання, вміють застосовувати знання, вміння і навички у стандартних ситуаціях, але при вирішенні нових проблем можуть знадобитися незначна допомога або підказки (компетентності сформовані).

Високий (творчий) рівень — здобувачі мають повністю сформовані компетентності, здатні активно, свідомо і творчо застосовувати їх у навчальній та професійній діяльності.

Зауважимо, що є багато досліджень, присвячених побудові педагогічних моделей формування різноманітних компетентностей фахівців конкретних галузей. Наприклад, стаття [1] присвячена побудові педагогічної моделі формування практичних умінь і навичок роботи з видавничою системою L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X у майбутніх бакалаврів математики, яка ґрунтується на поетапному розвитку мотивації, практичної діяльності та рефлексії. В статті [2] розроблена педагогічна модель формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих робітників будівельної галузі, яка складається з цільового, методологічного, змістового, навчально-модельованого та результативно-оцінювального блоків. А в [11] запропоновано педагогічну модель формування професійних компетентностей юриста через діяльнісний підхід. Проте зазначені моделі не описують часову динаміку переходів між рівнями сформованості компетентностей. У зв'язку з цим актуальною є задача математичної формалізації педагогічної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання з урахуванням прогресивних і регресивних переходів між рівнями їх сформованості на основі методу аналогій з компартментними та епідеміологічними моделями.

*Мета статті:* побудувати математичну модель динаміки формування компетентностей у процесі навчання відповідно до рівнів їх сформованості та здійснити аналіз цієї моделі, зокрема, дослідити обмеженість, існування та єдиність розв'язку задачу Коші.

### 3. Основні результати

**3.1. Побудова математичної моделі.** У контексті цієї роботи використовується аналогія між:

- поширенням інфекцій або інформації;
- формуванням компетентностей у процесі навчання.

У компартментних моделях популяція поділяється на підгрупи, між якими відбуваються переходи з певною інтенсивністю. Аналогічно, у навчальному процесі студенти можуть перебувати на різних рівнях сформованості компетентностей та переходити між ними під впливом навчальних, мотиваційних і соціальних чинників.

Цей підхід дозволяє:

- 1) чітко формалізувати педагогічні припущення;
- 2) отримати балансні співвідношення;
- 3) забезпечити математичну коректність моделі.

Зауважимо, що процес формування компетентностей є поетапним і неоднорідним. Це зумовлює доцільність виділення кількох компартментів.

Позначимо через  $N(t)$  — кількість здобувачів освіти у момент часу  $t \geq 0$ , які проходять навчання відповідно до даної педагогічної моделі. Нехай

- $E(t)$  — кількість здобувачів, які перебувають на етапі первинної мотивації та ознайомлення з навчальним матеріалом, фактично не володіють відповідними компетентностями (Entry level — вхідний рівень);

- $L(t)$  — кількість здобувачів з низьким (початковим) рівнем сформованості компетентностей (Low level — низький рівень);
- $M(t)$  — кількість здобувачів з середнім (репродуктивним) рівнем сформованості компетентностей (Medium level — середній рівень);
- $S(t)$  — кількість здобувачів з достатнім (конструктивним) рівнем сформованості компетентностей (Sufficient level — достатній рівень);
- $H(t)$  — кількість здобувачів з високим (творчим) рівнем сформованості компетентностей (High level — високий рівень).

Тоді

$$N(t) = E(t) + L(t) + M(t) + S(t) + H(t).$$

Всі ці функції вважаються невід’ємними і неперервно диференційовними на  $[0, +\infty)$ .

Передбачається, що здобувачі освіти поступово переходять від нижчих рівнів сформованості компетентностей до вищих у процесі навчання. З урахуванням підходів, запропонованих у [5], вважаємо, що швидкість переходу здобувачів між рівнями підготовки залежить не лише від їх поточного стану, а й від взаємодії з більш підготовленими здобувачами. Така взаємодія відображає ефекти колективного навчання, консультацій, наставництва та спільної роботи. Відповідно введемо такі додаткові параметри:

- $\Lambda$  — інтенсивність вхідного потоку здобувачів освіти, які розпочинають навчання відповідно до педагогічної моделі (кількість осіб за одиницю часу);
- $\alpha$  — коефіцієнт інтенсивності контактного переходу здобувачів освіти з рівня  $E$  до рівня  $L$ , тобто коефіцієнт контактної конверсії між вхідним  $E$  і низьким  $L$  рівнями, який характеризує соціально зумовлений перехід здобувачів освіти з рівня  $E$  до рівня  $L$  внаслідок взаємодії з іншими учасниками навчального процесу (цей коефіцієнт є аналогом коефіцієнта зараження в  $SIR$ -моделях);
- $\beta$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з вхідного рівня  $E$  до середнього  $M$ ;
- $\gamma_1$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з низького рівня  $L$  до середнього  $M$ ;
- $\gamma_2$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з середнього рівня  $M$  до низького  $L$ ;
- $\delta_1$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з середнього  $M$  рівня до достатнього  $S$  без жодних контактів;
- $\delta_2$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з середнього рівня  $M$  до високого  $H$ ;
- $\delta_3$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня  $S$  до середнього  $M$  без жодних контактів;
- $\theta_1$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня  $S$  до високого  $H$ ;
- $\theta_2$  — коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з високого рівня  $H$  до достатнього  $S$  без жодних контактів;
- $\sigma$  — коефіцієнт інтенсивності вибуття здобувачів освіти з навчального процесу на будь-якому етапі.

На рисунку 1 зображено схему, яка ілюструє дану модель. Такий поділ безпосередньо відображає логіку педагогічної моделі та дозволяє врахувати як прогрес, так і можливий регрес у навчанні.

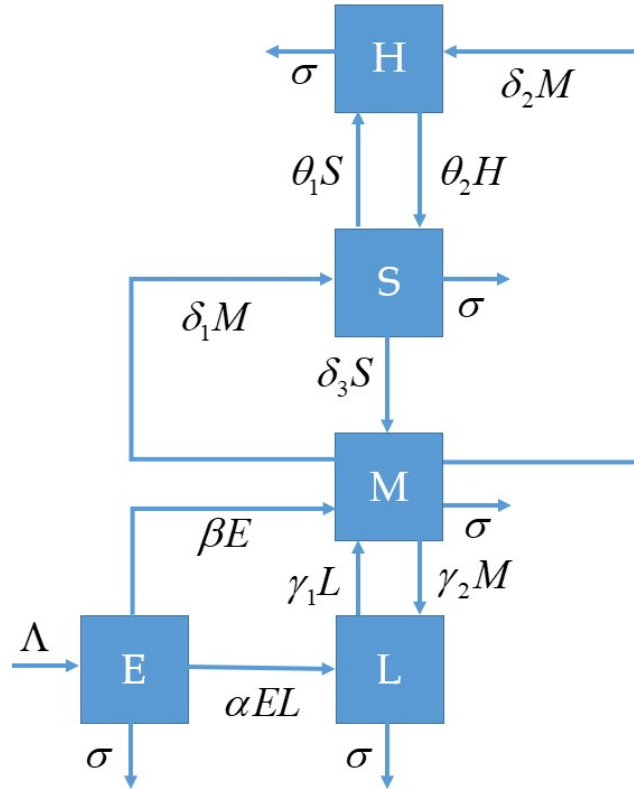


РИС. 1. Схема моделі динаміки формування компетентностей

Чисельність здобувачів вхідного рівня зростає за рахунок припливу нових здобувачів  $\Lambda$ . Зменшення цієї групи відбувається внаслідок двох основних процесів. По-перше, частина здобувачів переходить до низького рівня  $L$  унаслідок соціально зумовленої взаємодії з іншими здобувачами, що описується нелінійним контактним членом  $\alpha EL$ . По-друге, здобувачі можуть безконтактно переходити безпосередньо до середнього рівня  $M$  з коефіцієнтом інтенсивності  $\beta$ , що відповідає індивідуальному засвоєнню навчального матеріалу. Крім того, враховується припинення навчання з коефіцієнтом  $\sigma$ . Отже, зміна кількості здобувачів вхідного рівня описується рівнянням

$$\frac{dE}{dt} = \Lambda - \alpha EL - (\beta + \sigma)E.$$

Група здобувачів з низьким рівнем  $L$  поповнюється за рахунок контактного переходу з рівня  $E$  та безконтактного переходу з рівня  $M$  з коефіцієнтами інтенсивності  $\alpha$  і  $\gamma_2$  відповідно. Зменшення чисельності цієї групи зумовлене безконтактним переходом до середнього рівня  $M$  з коефіцієнтом інтенсивності  $\gamma_1$  та припиненням навчання. Таким чином, зміна кількості низького рівня описується рівнянням

$$\frac{dL}{dt} = \alpha EL + \gamma_2 M - (\gamma_1 + \sigma)L.$$

Чисельність здобувачів середнього рівня  $M$  збільшується за рахунок безконтактних переходів з рівнів  $E$ ,  $L$  та  $S$  з коефіцієнтами  $\beta$ ,  $\gamma_1$  і  $\delta_3$  відповідно. Зменшення

цієї групи пов'язане з переходами до низького, достатнього та високого рівнів з коефіцієнтами  $\gamma_2, \delta_1$  і  $\delta_2$ , а також з припиненням навчання. Отже,

$$\frac{dM}{dt} = \beta E + \gamma_1 L + \delta_3 S - (\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma)M.$$

Рівень  $S$  формується внаслідок переходу здобувачів із середнього рівня з інтенсивністю  $\delta_1$ , а також за рахунок зворотного переходу з високого рівня  $H$  з коефіцієнтом  $\theta_2$ . Зменшення чисельності цієї групи зумовлене переходом до високого та середнього рівнів з коефіцієнтами  $\theta_1$  і  $\delta_3$ , та припиненням навчання. Таким чином, маємо рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \delta_1 M + \theta_2 H - (\delta_3 + \theta_1 + \sigma)S.$$

Високий рівень  $H$  формується за рахунок переходів із середнього та достатнього рівнів з коефіцієнтами  $\delta_2$  та  $\theta_1$  відповідно. Зменшення чисельності цієї групи відбувається внаслідок зворотного переходу до рівня  $S$  та припинення навчання. Тобто маємо рівняння

$$\frac{dH}{dt} = \delta_2 M + \theta_1 S - (\theta_2 + \sigma)H.$$

Отже, динаміка формування компетентностей відповідно до визначених рівнів описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \Lambda - \alpha EL - (\beta + \sigma)E, \\ \frac{dL}{dt} = \alpha EL + \gamma_2 M - (\gamma_1 + \sigma)L, \\ \frac{dM}{dt} = \beta E + \gamma_1 L + \delta_3 S - (\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma)M, \\ \frac{dS}{dt} = \delta_1 M + \theta_2 H - (\delta_3 + \theta_1 + \sigma)S, \\ \frac{dH}{dt} = \delta_2 M + \theta_1 S - (\theta_2 + \sigma)H. \end{cases} \quad (1)$$

### 3.2. Задача Коші: обмеженість, існування та єдиність розв'язку.

Розглянемо задачу Коші для системи (1) з початковими умовами

$$E(0) = E_0, \quad L(0) = L_0, \quad M(0) = M_0, \quad S(0) = S_0, \quad H(0) = H_0, \quad (2)$$

де

$$E_0, L_0, M_0, S_0, H_0 \geq 0.$$

**Теорема 1.** *Для будь-яких невід'ємних початкових даних розв'язок*

$$(E(t), L(t), M(t), S(t), H(t)) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}_+^5)$$

*задачі Коші (1), (2) є обмеженим.*

*Доведення.* Додавши всі рівняння системи (1) і врахувавши, що  $N(t) = E(t) + L(t) + M(t) + S(t) + H(t)$ , отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \sigma N(t)$$

або

$$\frac{dN}{dt} + \sigma N(t) = \Lambda. \quad (3)$$

з початковою умовою

$$N(0) = N_0 := E_0 + L_0 + M_0 + S_0 + H_0. \quad (4)$$

Розв'язок задачі Коші (3), (4) має вигляд

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\sigma} + \left( N_0 - \frac{\Lambda}{\sigma} \right) e^{-\sigma t}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\sigma}.$$

Нехай

$$N_0 \leq \frac{\Lambda}{\sigma}.$$

Тоді

$$0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\sigma}$$

для всіх  $t \geq 0$ . Звідси випливає, що функція  $N(t)$  є обмеженою для всіх  $t \geq 0$ . Оскільки всі компоненти розв'язку невід'ємні і не перевищують  $N(t)$ , вони також є обмеженими.  $\square$

**Теорема 2.** Для будь-яких невід'ємних початкових даних задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок

$$(E(t), L(t), M(t), S(t), H(t)) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}_+^5).$$

*Доведення.* Перепишемо систему (1) у векторній формі

$$\frac{dX}{dt} = F(X) := \mathcal{L}X + \mathcal{N}(X),$$

де

$$X = (E, L, M, S, H)^T,$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -(\beta + \sigma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma_1 + \sigma) & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma_1 & -(\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma) & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -(\delta_3 + \theta_1 + \sigma) & \theta_2 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \theta_1 & -(\theta_2 + \sigma) \end{pmatrix},$$

а нелінійний оператор  $\mathcal{N}$  визначається рівністю

$$\mathcal{N}(X) = \begin{pmatrix} \Lambda - \alpha EL \\ \alpha EL \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для доведення теореми достатньо показати, що оператор  $F$  є ліпшицевим. Справді, нехай

$$X_1 = (E_1, L_1, M_1, S_1, H_1)^T, \quad X_2 = (E_2, L_2, M_2, S_2, H_2)^T \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}_+^5).$$

Розглянемо різницю

$$\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2) = \begin{pmatrix} -\alpha(E_1L_1 - E_2L_2) \\ \alpha(E_1L_1 - E_2L_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\|\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2)\| \leq 2\alpha |E_1L_1 - E_2L_2|.$$

Розкладемо різницю:

$$E_1L_1 - E_2L_2 = E_1(L_1 - L_2) + L_2(E_1 - E_2).$$

Тоді

$$|E_1L_1 - E_2L_2| \leq E_1|L_1 - L_2| + L_2|E_1 - E_2|.$$

Використовуючи обмеженість розв'язків

$$E_i, L_i \leq \frac{\Lambda}{\sigma}, \quad i = 1, 2,$$

одержуємо

$$|E_1L_1 - E_2L_2| \leq \frac{\Lambda}{\sigma} (|L_1 - L_2| + |E_1 - E_2|).$$

Отже,

$$\|\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2)\| \leq \frac{2\alpha\Lambda}{\sigma} (|E_1 - E_2| + |L_1 - L_2|).$$

Оскільки всі норми в  $\mathbb{R}^5$  еквівалентні, то існує стала  $C_1 > 0$  така, що

$$|E_1 - E_2| + |L_1 - L_2| \leq C_1 \|X_1 - X_2\|.$$

Тому

$$\|\mathcal{N}(X_1) - \mathcal{N}(X_2)\| \leq C \|X_1 - X_2\|, \quad C = \frac{2\alpha\Lambda}{\sigma} C_1.$$

Оскільки оператор  $\mathcal{L}$  є лінійним, то

$$\|\mathcal{L}X_1 - \mathcal{L}X_2\| \leq \|\mathcal{L}\| \|X_1 - X_2\|.$$

Отже,

$$\|F(X_1) - F(X_2)\| = \|\mathcal{L}X_1 + \mathcal{N}(X_1) - (\mathcal{L}X_2 + \mathcal{N}(X_2))\| \leq (\|\mathcal{L}\| + C) \|X_1 - X_2\|.$$

Таким чином, права частина системи є ліпшицевою, що й доводить необхідне.  $\square$

**Висновки.** Таким чином, у роботі побудовано математичну модель динаміки формування компетентностей здобувачів освіти на основі компартментного підходу. Запропонована модель враховує поетапний характер навчального процесу та дозволяє описати як прогресивні, так і регресивні переходи між рівнями сформованості компетентностей. У результаті проведеного аналізу встановлено, що сумарна чисельність здобувачів освіти є обмеженою функцією часу, що забезпечує коректність моделі з точки зору прикладної інтерпретації. Також доведено існування та єдиність розв'язку задачі Коші для побудованої системи диференціальних рівнянь на основі властивості ліпшицевості правої частини. Запропонована модель може бути використана як базова для подальших

досліджень, зокрема аналізу стійкості рівноважних станів, дослідження впливу параметрів та постановки задач оптимального керування освітнім процесом.

**Конфлікт інтересів і етика.** Сергій Бак є головним редактором, а Галина Ковтонюк є членом редколегії даного журналу. Для уникнення конфлікту інтересів, рукопис пройшов відповідну процедуру рецензування незалежними рецензентами, а прийняття рішення про публікацію здійснювалося незалежним редактором. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

**Подяки.** Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

### Список використаних джерел

1. Бак С., Ковтонюк Г. Модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X у майбутніх бакалаврів математики. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. 2025. Т. 2, № 2. С. 262–271. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10>
2. Каленський А. Педагогічне моделювання формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих робітників будівельної галузі. *Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка*. Серія: Педагогічні науки. 2025. Том 3, № 59. С. 10–19. DOI: <https://doi.org/10.31376/2410-0897-2025-3-59-10-19>
3. Марценюк В. П., Сверстюк А. С. Математичні моделі та методи компартментного моделювання кіберфізичних систем медико-біологічних процесів: монографія. Львів: Видавництво «Магнолія – 2006», 2020. 400 с.
4. Chornyj O. P., Herasymenko L. V., Busher V. V. The learning process simulation based on differential equations of fractional orders. *CTE Workshop Proceedings* [Online]. 2021. Vol. 8. P. 473–483. DOI: <https://doi.org/10.55056/cte.301>
5. El Bhih A., Benfatah Y., Hassouni H., Balatif O., Rachik M. Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*. 2024. Vol. 11. P. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795>
6. Funk S., Gilad E., Watkins C., Jansen V. A. A. The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks. *PNAS*. 2009. Vol. 106. P. 6872–6877. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106>
7. He Z., Wang H., Hu Y., Zhao H. Dynamic analysis and optimal control of knowledge diffusion model in regional innovation ecosystem under digitalization. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14, 13124. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-63634-3>
8. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*. 2000. Vol. 42. P. 599–653. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
9. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*. 1927. Vol. 115, issue 772. P. 700–721. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
10. Kishore R., Kumar D. Epidemic modeling of student learning behavior: a novel perspective. *International Journal of Mathematics and Computer Research*. 2025. Vol. 13, issue 3. P. 4943–4950. DOI: <https://doi.org/10.47191/ijmcr/v13i3.06>
11. Kostruba A. Pedagogical model of the formation of professional competences of lawyers: Ukrainian reality. *Law Review of Kyiv University of Law*. 2020. No. 2. P. 31–36. DOI: <https://doi.org/10.36695/2219-5521.2.2020.04>
12. Lewis D. Modeling student engagement using optimal control theory. *Journal of Geometric Mechanics*. 2022. Vol. 14, issue 1. P. 131–150. DOI: <https://doi.org/10.3934/jgm.2021032>
13. Murray J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*. New York: Springer, 2002. 551 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b98868>

## Construction and analysis of a mathematical model of the dynamics of competence formation in the learning process

Serhii Bak, Halyna Kovtoniuk

*Abstract.* The article proposes a mathematical model describing the dynamics of competence formation in the educational process. The model is developed based on an analogy with compartmental and epidemiological approaches and considers five levels of competence development: entry, low, medium, sufficient, and high. Both progressive and regressive transitions between these levels are taken into account, including contact and non-contact interaction mechanisms. The resulting model is formulated as a system of nonlinear ordinary differential equations that describe the temporal evolution of student groups across different competence levels. For the proposed system, the corresponding Cauchy problem is analyzed. In particular, the boundedness of solutions is established, and the existence and uniqueness of solutions are proved using standard results from the theory of differential equations, based on the Lipschitz continuity of the right-hand side. The developed model provides a formal framework for describing the competence formation process and can serve as a foundation for further investigations, including stability analysis, sensitivity analysis of model parameters, and optimal control of the educational process.

*Keywords:* mathematical modeling, competence formation, compartmental models, epidemiological models, Cauchy problem, existence and uniqueness of the solution.

### References

1. Bak, S., Kovtoniuk, H. (2025). *Model for developing practical skills and abilities in working with L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X in future bachelors of mathematics*, Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education, **2** (2), 262–271. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10>
2. Kalenskyi, A. (2025). *Pedagogical modeling of formation of energy efficiency competence of future qualified workers in the construction industry*, Bulletin of Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, Series: Pedagogical sciences, **3** (59), 10–19. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31376/2410-0897-2025-3-59-10-19>
3. Martseniuk, V. P., Sverstiuk, A. S. (2020). *Mathematical Models and Methods of Compartmental Modeling of Cyber-Physical Systems in Biomedical Processes*: Monograph, Magnolia — 2006, Lviv. [in Ukrainian]
4. Chornyi, O. P., Herasymenko, L. V., Busher, V. V. (2021). *The learning process simulation based on differential equations of fractional orders*, CTE Workshop Proceedings [Online], **8**, 473–483. <https://doi.org/10.55056/cte.301>
5. El Bhih, A., Benfatah, Y., Hassouni, H., Balatif, O., Rachik, M. (2024). *Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education*, Partial Differential Equations in Applied Mathematics, **11**, 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795>
6. Funk, S., Gilad, E., Watkins, C., Jansen, V. A. A. (2009). *The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks*, PNAS, Vol. **106**, 6872–6877. <https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106>
7. He, Z., Wang, H., Hu, Y., Zhao, H. (2024). *Dynamic analysis and optimal control of knowledge diffusion model in regional innovation ecosystem under digitalization*, Scientific Reports, **14**, 13124. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-63634-3>
8. Hethcote, H. W. (2000). *The mathematics of infectious diseases*, SIAM Review, **42**, 599–653. <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
9. Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927). *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proceedings of the Royal Society A., **115** (772), 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>

10. Kishore, R., Kumar, D. (2025). *Epidemic modeling of student learning behavior: a novel perspective*, International Journal of Mathematics and Computer Research, **13** (3), 4943–4950. <https://doi.org/10.47191/ijmcr/v13i3.06>
11. Kostruba, A. (2020). *Pedagogical model of the formation of professional competences of lawyers: Ukrainian reality*, Law Review of Kyiv University of Law, No. 2, 31–36. <https://doi.org/10.36695/2219-5521.2.2020.04>
12. Lewis, D. (2022). *Modeling student engagement using optimal control theory*, Journal of Geometric Mechanics, **14** (1), 131–150. DOI: <https://doi.org/10.3934/jgm.2021032>
13. Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/b98868>

### Про авторів / About the authors

**Сергій Бак**, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

**Serhii Bak**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

**Галина Ковтонюк**, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

**Halyna Kovtoniuk**, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 30.03.2026  
Прийнято до друку / Accepted 30.04.2026  
Опубліковано / Published 27.05.2026

УДК 517.95

## Півлінійні параболічні рівняння на графах

Олег Бугрій<sup>1</sup>, Дарія Яценяк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
 кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна  
 oleh.buhrii@lnu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-1698-5559>

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
 кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, м. Львів, Україна  
 dariia.yatseniak@lnu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-8427-5532>

*Анотація.* У статті розглянуто мішану задачу для півлінійного параболічного рівняння на простому зв'язному орієнтованому графі. Визначено слабкий розв'язок задачі у відповідних функційних просторах та наведено умови неперервності й спряження у вузлах графа. Доведено однозначну розв'язність задачі.

*Ключові слова:* рівняння з частинними похідними, параболічні рівняння, мішана задача, зв'язний орієнтований граф, слабкий розв'язок.

## 1. Вступ

Нехай  $M, n \in \mathbb{N}$  – деякі числа,  $\mathcal{G}$  – деякий простий зв'язний орієнтований граф із вершинами  $P_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) та ребрами  $\Omega_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Параметризуємо кожне ребро  $\Omega_i$  інтервалом  $(0, \ell_i)$  (тобто, для зручності, нехай  $\Omega_i := (0, \ell_i)$ , де  $i = \overline{1, n}$ ).

Нехай  $J_j^-$  та  $J_j^+$  – це множини усіх номерів ребер, що, відповідно, входять у вершину  $P_j$  та виходять із неї (див. [1], [2]),  $j = \overline{1, M}$ . Тут вхід та вихід з вершини обумовлено параметризацією ребер. Наприклад, для графа з Рис. 1 маємо  $J_1^- = \emptyset$ ,  $J_1^+ = \{1, 3, 4\}$  тощо.

Диференціальні рівняння на графах описують багато важливих процесів оточуючої дійсності. Зокрема, у сучасних дослідженнях півлінійні параболічні системи виступають центральним інструментом для моделювання складних процесів реакції-дифузії.

В статті [3] детально розглядається однокомпонентна модель на основі рівняння Зельдовича, що є параболічним рівнянням виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + R(u),$$

де молодший нелінійний член  $R(u) = Ku^2(1-u)$  описує швидкість хімічної реакції, а параметр  $K$  визначає інтенсивність перетворення речовини. Таке формулювання є ідейно близьким до задачі, що досліджується в нашій праці, де нелінійність визначає внутрішню динаміку системи. Відповідні моделі дозволяють з високою точністю описувати динаміку концентрації хімічних речовин, процеси горіння, а також процеси поширення нервових імпульсів у біологічних мережах.

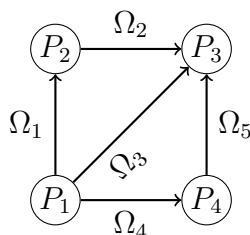


Рис. 1. Приклад графа.

Розвиток теорії еволюційних рівнянь на графах також тісно пов'язаний із новітніми викликами в аналізі даних та обробці сигналів. Як зазначено у [4, с. 4-5], диференціальні методи на графах є основою для нелокальної сегментації зображень та алгоритмів машинного навчання на складних мережевих структурах. Застосування варіаційних підходів до параболічних задач дозволяє ефективно моделювати дифузію інформації та динаміку взаємодії вузлів у соціальних і технологічних мережах.

У праці [5] розглянуто деякі властивості динамічних систем, які описуються рівняннями параболічного й гіперболічного типів на графах. Зокрема, для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

на графах-деревах авторами доведено здатність перевести систему з будь-якого початкового стану в нульовий за довільний інтервал часу  $\tau > 0$ . Для розгляду представлена задача, де граничне керування здійснюється через умови Діріхле, застосовані до граничних вузлів графа, що має значення для проектування та стабілізації гнучких багатоланкових інженерних конструкцій, забезпечуючи теоретичну базу для управління квантовими процесами у наноструктурах, де топологія зв'язків визначає динамічні властивості всієї системи.

Актуальність дослідження підсилюється потребами сучасної науки про дані. Стаття [6] підкреслює важливість використання еволюційних рівнянь на графах для опису нелокальної динаміки великих масивів даних. Задачі для півлінійних параболічних рівнянь, що розглядаються нами, розширюють існуючий математичний апарат, дозволяючи враховувати складні внутрішні взаємодії в мережах, що неможливо в межах класичних евклідових моделей. Відповідно розробка методів доведення існування розв'язку таких задач є необхідним кроком для створення надійних алгоритмів моделювання еволюційних процесів на складних геометричних структурах.

У цій статті ми розглянемо мішану задачу для еволюційного рівняння на графі  $\mathcal{G}$ . Покажемо існування та єдиність розв'язку цієї задачі. Відповідні мішані задачі для лінійних рівнянь на графах розглянуто в [1] та [2].

## 2. Постановка задачі

Нехай  $T > 0$ ,  $\ell_i > 0$ ,  $\Omega_i = (0, \ell_i)$ ,  $Q_{0,T}^i = \Omega_i \times (0, T)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тут шукатимемо функцію  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$  таку, що  $u^i : Q_{0,T}^i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Розглянемо рівняння

$$u_t^i - a^i u_{xx}^i + g^i |u^i|^{q-2} u^i = f^i(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

з відповідними крайовими умовами

$$\begin{cases} u^k(\ell_k, t) = u^d(\ell_d, t) = u^r(0, t) = u^s(0, t), & k, d \in J_j^-, \quad r, s \in J_j^+, \\ \sum_{k \in J_j^-} u_x^k(\ell_k, t) - \sum_{r \in J_j^+} u_x^r(0, t) = 0, & j = \overline{1, M}, \quad t \in (0, T), \end{cases} \quad (2)$$

та початковими умовами

$$u^i(x, 0) = u_0^i(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де  $a^i, g^i > 0$  та  $q > 1$  – деякі числа,  $f^i : Q_{0,T}^i \rightarrow \mathbb{R}$  та  $u_0^i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$  – деякі функції,  $i = \overline{1, n}$ .

Введемо необхідні позначення:

$$\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \quad Q_{0,T} := Q_{0,T}^1 \times \dots \times Q_{0,T}^n, \quad (4)$$

$$V_1 := \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega_1) \times \dots \times H^1(\Omega_n) \mid \right.$$

$$\left. v^k(\ell_k) = v^d(\ell_d) = v^r(0) = v^s(0), \quad k, d \in J_j^-, \quad r, s \in J_j^+, \quad j = \overline{1, M} \right\}, \quad (5)$$

$$V_2 := H^2(\Omega_1) \times \dots \times H^2(\Omega_n), \quad Y := L^q(\Omega_1) \times \dots \times L^q(\Omega_n), \quad (6)$$

$$H := L^2(\Omega_1) \times \dots \times L^2(\Omega_n), \quad V = V_1 \cap Y. \quad (7)$$

Тут  $V_1$  та  $H$  є гільбертовими просторами з нормами

$$\|\mathbf{v}\|_{V_1} := \left( \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_H \equiv \|\mathbf{v}\|_H := \left( \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

відповідно. Зрозуміло, що

$$\|\mathbf{v}\|_{V_1}^2 = \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 = \sum_{i=1}^n \left( \|v_x^i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|v^i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right) = |\mathbf{v}_x|_H^2 + |\mathbf{v}|_H^2. \quad (9)$$

Тут і далі  $\mathbf{v}_x = (v_x^1, \dots, v_x^n)$ . Простір  $Y$  розглядатимемо з нормою

$$\|\mathbf{v}\|_Y = \left( \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |v^i(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad \mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n). \quad (10)$$

Цей простір є банаховим при  $q \geq 1$ , а за умови  $q > 1$  він є рефлексивним.

Зауважимо також, що  $V \overline{\subset} H$ , тобто простір  $V$  щільно й неперервно вкладений в  $H$  (див. [1, с. 3]). Тоді отримаємо  $V \overline{\subset} H \cong H^* \overline{\subset} V^*$  (див. [7, с. 232-233] для більш детальної інформації).

Аналогічно до простору  $Y$  з (6) введемо простір

$$\mathcal{Y}(Q_{0,T}) := L^q(Q_{0,T}^1) \times \dots \times L^q(Q_{0,T}^n), \quad (11)$$

з нормою

$$\|\mathbf{u}; \mathcal{Y}(Q_{0,T})\| = \left( \sum_{i=1}^n \|u^i; L^q(Q_{0,T}^i)\|^q \right)^{1/q} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{Q_{0,T}^i} |u^i(x,t)|^q dx dt \right)^{1/q}.$$

Спряженим до  $Y$  є простір

$$Y^* = L^{q'}(\Omega_1) \times \dots \times L^{q'}(\Omega_n), \quad (12)$$

а до  $\mathcal{Y}(Q_{0,T})$  – простір  $\mathcal{Y}^*(Q_{0,T}) = L^{q'}(Q_{0,T}^1) \times \dots \times L^{q'}(Q_{0,T}^n)$ , де  $q' > 1$  – спряжений до  $q > 1$  показник, тобто число, що задовольняє умову  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ . Зрозуміло, що

$$q' = \frac{q}{q-1}. \quad (13)$$

Нехай

$$U(Q_{0,T}) = L^2(0, T; V_1) \cap \mathcal{Y}(Q_{0,T}). \quad (14)$$

Наділимо цей простір стандартною нормою перетину банахових просторів

$$\|\mathbf{u}; U(Q_{0,T})\| = \|\mathbf{u}; L^2(0, T; V_1)\| + \|\mathbf{u}; \mathcal{Y}(Q_{0,T})\|.$$

Спряженим до  $U(Q_{0,T})$  є простір  $U^*(Q_{0,T}) = L^2(0, T; V_1^*) + \mathcal{Y}^*(Q_{0,T})$ . Можна показати, що простір

$$W(Q_{0,T}) := \{\mathbf{u} \in U(Q_{0,T}) \mid \mathbf{u}_t \in U^*(Q_{0,T})\} \quad (15)$$

є банаховим простором з нормою

$$\|\mathbf{u}; W(Q_{0,T})\| = \|\mathbf{u}; U(Q_{0,T})\| + \|\mathbf{u}_t; U^*(Q_{0,T})\|.$$

Крім того,  $C^1([0, T]; V)$  є щільним у  $W(Q_{0,T})$ ,  $W(Q_{0,T}) \subset C([0, T]; H)$  й виконується наступна формула інтегрування частинами

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}(t) \rangle_V dt = (\mathbf{u}(t_2), \mathbf{v}(t_2))_H - (\mathbf{u}(t_1), \mathbf{v}(t_1))_H - \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{v}_t(t), \mathbf{u}(t) \rangle_V dt, \quad (16)$$

де  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$  та  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W(Q_{0,T})$ . Зрозуміло, що при  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  з (16) випливає, що

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{u}(t) \rangle_V dt = \frac{1}{2} |\mathbf{u}(t_2)|_H^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{u}(t_1)|_H^2. \quad (17)$$

Визначимо оператори  $A : V_1 \rightarrow V_1^*$  та  $N : Y \rightarrow Y^*$  так:

$$\langle A\mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle_{V_1} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} a^i z_x^i(x) v_x^i(x) dx, \quad \mathbf{z}, \mathbf{v} \in V_1, \quad (18)$$

$$\langle N\mathbf{h}, \mathbf{y} \rangle_Y = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} g^i |h^i(x)|^{q-2} h^i(x) y^i(x) dx, \quad \mathbf{h}, \mathbf{y} \in Y, \quad (19)$$

Припустимо, що виконуються наступні умови.

- (A):  $a^i > 0, i = \overline{1, n}; a_0 := \min\{a^1, \dots, a^n\}, a^0 := \max\{a^1, \dots, a^n\};$   
 (G):  $g^i > 0, i = \overline{1, n}; g_0 := \min\{g^1, \dots, g^n\}, g^0 := \max\{g^1, \dots, g^n\};$   
 (F):  $\mathbf{f} := (f^1, \dots, f^n) \in L^2(0, T; H),$  де  $H$  взято з (7);  
 (U):  $\mathbf{u}_0 := (u_0^1, \dots, u_0^n) \in H.$

**Означення 1.** Вектор-функція  $\mathbf{u} \in W(Q_{0,T})$ , називається узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо для всіх  $\mathbf{v} \in U(Q_{0,T})$  виконується рівність

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_t(t) + A\mathbf{u}(t) + N\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_V dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t))_H dt, \quad (20)$$

а також  $\mathbf{u}$  задовольняє початкову умову

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (21)$$

*Зауваження 2.* Те, що розглянутий нами граф  $\mathcal{G}$  є орієнтованим, дозволяє нам записувати крайові умови (2) у зручнішому для нас вигляді. Отримані тут результати переносяться на випадок неорієнтованих графів, бо доведення теорем існування і єдиності розв'язку задачі (1)-(2) не залежить від способу вибору такої орієнтації.

### 3. Допоміжні факти

Розіб'ємо цей підрозділ на кілька частин.

**3.1. Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.** Нехай  $d \in \mathbb{N}, Q = (0, T) \times \mathbb{R}^m.$  Розглянемо задачу відшукування слабкого розв'язку  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  такої задачі Коші:

$$\varphi'(t) + L(t, \varphi(t)) = M(t), \quad t \in [0, T], \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad (22)$$

де  $L : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  та  $M : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  – деякі функції (для зручності припускаємо, що  $L(t, 0) = 0$  для кожного  $t \in [0, T]$ ),  $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_d^0) \in \mathbb{R}^m.$

Нехай  $m \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty], X$  – банахів простір,  $W^{m,p}(0, T; X)$  – простір Соболева-Бохнера (див. [8, с. 286]). Нагадаємо кілька понять.

**Означення 3.** Вектор-функція  $\varphi \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^m)$  називається глобальним слабким розв'язком задачі (22), якщо  $\varphi$  задовольняє початкову умову з (22) та задовольняє систему з (22) майже для всіх (м.д.в.)  $t \in (0, T).$

**Означення 4.** Вектор-функція  $L : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  задовольняє умову Каратеодорі, якщо: для всіх (д.в.)  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  функція  $(0, T) \ni t \mapsto L(t, \zeta) \in \mathbb{R}^m$  є вимірною; м.д.в.  $t \in (0, T)$  функція  $\mathbb{R}^m \ni \zeta \mapsto L(t, \zeta) \in \mathbb{R}^m$  є неперервною.

**Означення 5.** Вектор-функція  $L : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  задовольняє  $L^p$ -умову Каратеодорі, якщо вона задовольняє умову Каратеодорі та д.в.  $R > 0$  існує функція  $h_R \in L^p(0, T)$  така, що

$$|L(t, \zeta)|_{\mathbb{R}^m} \leq h_R(t) \quad (23)$$

м.д.в.  $t \in (0, T)$  та д.в.  $\zeta \in \overline{D_R} := \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y|_{\mathbb{R}^m} \leq R\}.$

**Твердження 6** (теорема Каратеодорі-Ласалля, див. [9] та теорему 3.24, [10], с. 872). *Нехай  $p \geq 2,$  функція  $L : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  задовольняє  $L^p$ -умову Каратеодорі,  $M \in L^p(0, T; \mathbb{R}^m),$*

$\varphi^0 \in \mathbb{R}^m$ . Якщо існують невід'ємні функції  $\alpha, \beta \in L^1(0, T)$  такі, що д.в.  $\xi \in \mathbb{R}^m$  та м.д.в.  $t \in [0, T]$  виконується нерівність

$$(L(t, \xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq -\alpha(t)|\xi|_{\mathbb{R}^m}^2 - \beta(t), \quad (24)$$

то задача (22) має глобальний слабкий розв'язок  $\varphi \in W^{1,p}(0, T; \mathbb{R}^m)$ .

**3.2. Допоміжні нерівності.** Наступні два твердження є відомими. Для зручності наведемо їх доведення.

**Твердження 7** (нерівність Пуанкаре на графах, Лема 1 [1], с. 4). Існує стала  $C_1 > 0$  така, що для кожного  $\mathbf{z} \in V_1$  виконується нерівність

$$|\mathbf{z}_x|_H^2 + \left( \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x) dx \right)^2 \geq C_1 |\mathbf{z}|_H^2. \quad (25)$$

*Доведення.* Припустимо протилежне, тобто нехай для кожного  $C_1 > 0$  існує таке  $\mathbf{z} \equiv \mathbf{z}^{C_1} \in V_1$ , що

$$|\mathbf{z}_x|_H^2 + \left( \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x) dx \right)^2 < C_1 |\mathbf{z}|_H^2.$$

Візьмемо  $C_1 = \frac{1}{k^2}$  та позначимо  $\mathbf{z}^k := \mathbf{z}^{C_1}$ ,  $\mathbf{v}^k := \frac{\mathbf{z}^k}{|\mathbf{z}^k|_H}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тепер  $|\mathbf{v}^k|_H = 1$  та

$$|\mathbf{v}_x^k|_H^2 + \left( \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} v^{k,i}(x) dx \right)^2 < \frac{1}{k^2}.$$

Звідси випливають такі імплікації:

$$|\mathbf{v}^k|_H = 1 \implies \{\mathbf{v}^k\}_H \text{ обмежена в } H, \quad (26)$$

$$|\mathbf{v}_x^k|_H < \frac{1}{k^2} \implies \{\mathbf{v}_x^k\}_H \text{ обмежена в } H, \quad (27)$$

$$\mathbf{v}_x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (0, \dots, 0) \text{ в } H, \quad (28)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} v^{k,i}(x) dx \right| < \frac{1}{k} \implies \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} v^{k,i}(x) dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ в } \mathbb{R}. \quad (29)$$

З (26) та (28), випливає, що послідовність  $\{\mathbf{v}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою у  $V_1$ . Компактність вкладення  $V_1 \stackrel{\mathcal{K}}{\subset} H$  означає, що існує підпослідовність така, що  $\mathbf{v}^{k_j} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \mathbf{v}$  сильно в  $H$ .

Звідси слідує, що

$$|\mathbf{v}|_H = 1, \quad \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} v^i(x) dx = 0. \quad (30)$$

Крім того, зі збіжності (28) маємо, що  $\mathbf{v}_x = (0, \dots, 0)$ , з чого робимо висновок, що  $v^i$  є сталими для кожного  $i \in \{1, \dots, n\}$ . З побудови простору  $V_1$  випливає, що всі ці константи рівні, тобто  $\mathbf{v} = (\beta, \dots, \beta) \in \mathbb{R}^n$ . З рівності нулю інтеграла в (30), випливає, що  $\mathbf{v} = (0, \dots, 0)$  що протирічить припущенню  $|\mathbf{v}|_H = 1$ .  $\square$

**Твердження 8** (узагальнена лема Гронуола-Белмана). *Якщо функція  $y \in L^1(0, T)$  задовольняє нерівність*

$$y(\tau) \leq C + K(\tau) + L \int_0^\tau y(t) dt, \quad \tau \in [0, T], \quad (31)$$

з деякими сталими  $C \geq 0$  та  $L > 0$  і деякою функцією  $K(\tau) = \int_0^\tau B(t) dt$ ,  $\tau \in [0, T]$ , де  $b \in L^1(0, T)$ , то виконується оцінка

$$y(\tau) \leq (C + K(\tau)) e^{L\tau}, \quad \tau \in [0, T]. \quad (32)$$

*Доведення.* З оцінки (31) та відомої леми Гронуола-Белмана (див. [10, с. 872]), використаної з функцією  $A(s) \equiv L$ , впливає таке:

$$\begin{aligned} y(\tau) &\leq \left( C + \int_0^\tau B(t) e^{-\int_0^t A(s) ds} dt \right) e^{\int_0^\tau A(t) dt} = \left( C + \int_0^\tau B(t) e^{-Lt} dt \right) e^{L\tau} \leq \\ &\leq \left( C + \int_0^\tau B(t) dt \right) e^{L\tau}. \end{aligned}$$

Тому (32) доведено. □

Слідуючу лему ми використовуватимемо далі.

**Лема 9.** *Нехай виконуються умови (A), (G) й оператори  $A$  та  $N$  визначено згідно з (18)-(19). Припустимо, що  $\{\mathbf{w}^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset V$ ,  $m \in \mathbb{N}$  – деяке число. Розглянемо вираз*

$$\mathbf{z}^m = \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu \mathbf{w}^\mu, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Визначимо вектор-функцію  $\mathbf{L}(t, \xi) = (L_1(t, \xi), \dots, L_m(t, \xi))$  за правилом

$$L_\mu(t, \xi) = \langle A\mathbf{z}^m, \mathbf{w}^\mu \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{z}^m, \mathbf{w}^\mu \rangle_Y, \quad \mu = \overline{0, m}, \quad t \in (0, T).$$

Тоді майже для всіх  $t \in (0, T)$  та для всіх  $\xi \in \mathbb{R}^m$  справедлива оцінка

$$(\mathbf{L}(t, \xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \left( a_0 \sum_{i=1}^n |z_x^{m,i}|^2 + g_0 |z^{m,i}|^q \right) dx. \quad (33)$$

*Доведення.* За означенням функції  $\mathbf{L}$  маємо

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}(t, \xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{\mu=1}^m L_\mu(t, \xi) \xi_\mu = \sum_{\mu=1}^m \left[ \langle A\mathbf{z}^m, \mathbf{w}^\mu \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{z}^m, \mathbf{w}^\mu \rangle_Y \right] \xi_\mu = \\ &= \sum_{\mu=1}^m \left[ \langle A\mathbf{z}^m, \xi_\mu \mathbf{w}^\mu \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{z}^m, \xi_\mu \mathbf{w}^\mu \rangle_Y \right] = \langle A\mathbf{z}^m, \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu \mathbf{w}^\mu \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{z}^m, \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu \mathbf{w}^\mu \rangle_Y = \\ &= \langle A\mathbf{z}^m, \mathbf{z}^m \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{z}^m, \mathbf{z}^m \rangle_Y. \end{aligned}$$

Для першого доданка, використовуючи умову (A) та визначення (18), одержуємо

$$\langle A\mathbf{z}^m, \mathbf{z}^m \rangle_{V_1} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} a^i |z_x^{m,i}|^2 dx \geq a_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |z_x^{m,i}|^2 dx = a_0 |z_x|_H^2.$$

Для другого доданка, використовуючи умову  $(\mathbf{G})$  та визначення (19), маємо

$$\langle N z^m, z^m \rangle_Y = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} g^i |z^{m,i}|^{q-2} z^{m,i} z^{m,i} dx \geq g_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |z^{m,i}|^q dx = g_0 \|z^m\|_Y^q.$$

Об'єднуючи отримані нерівності, приходимо до (33). Лему доведено.  $\square$

**3.3. База деякого простору функцій, визначених на графах.** Спершу нагадаємо допоміжні означення.

Нехай  $X, Y$  – два банахових простори. Функція  $A$  із частини  $D(A)$  простору  $X$  в  $Y$  називається лінійним оператором, якщо вона зберігає лінійність.  $D(A)$  називається областю визначення  $A$ . Якщо  $A$  лінійна, то  $D(A)$  – лінійний підпростір у  $X$ . Множина значень  $R(A)$  визначається як множина елементів простору  $Y$  вигляду  $Ax$ , де  $x \in D(A)$ . Якщо множина  $D(A)$  щільна в  $X$ , то оператор  $A$  називається щільно визначеним.

Оператор  $A$  називається неперервним, якщо зі збіжності  $x^i \rightarrow x$  випливає, що  $Ax^i \rightarrow Ax$  (у сильній топології). Для неперервності лінійного оператора  $A$  необхідно і достатньо його обмеженості, тобто такого

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in D(A),$$

де  $M > 0$  – стала. Множину всіх лінійних обмежених операторів позначимо  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Оператор  $A : X \rightarrow Y$  називається замкненим, якщо

$$\left. \begin{array}{l} x^i \rightarrow x \\ Ax^i \rightarrow y \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{array} \right.$$

Це рівносильно тому, щоб графік  $A$  (тобто множина пар  $(x, y) \in X \times Y$ , таких, що  $x \in D(A)$ ,  $y = Ax$ ) був замкнений в  $X \times Y$ .

Оператор  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  називається компактним або цілком неперервним, якщо образ  $\{Ax^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  обмеженої послідовності  $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  містить збіжну підпослідовність.

Нехай  $A : B \rightarrow B$  – замкнений оператор у деякому банаховому просторі  $B$  та  $I : B \rightarrow B$  – тотожний оператор.

**Означення 10.** Комплексне число  $\lambda$  називається власним значенням оператора  $A : B \rightarrow B$ , якщо існує ненульовий елемент  $x \in B$ , такий, що

$$Ax = \lambda x.$$

Цей елемент  $x$  називається власним вектором (власною функцією) оператора  $A$ .

Щільно визначений оператор  $A$ , що відображає гільбертів простір  $H$  у себе, називається симетричним, якщо

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H \quad \forall x, y \in D(A). \quad (34)$$

Симетричний оператор напівобмежений знизу, якщо існує скінченне число  $m$ , таке що:

$$m = \inf \left\{ (Ax, x)_H \mid \text{по всіх } x \in D(A) \text{ таких, що } |x|_H = 1 \right\}. \quad (35)$$

З (35) випливає, що напівобмежений знизу оператор задовольняє оцінку

$$(Ax, x)_H \geq m|x|_H^2 \quad \forall x \in D(A). \quad (36)$$

Якщо тут  $m > 0$ , то оператор  $A$  називається додатно визначеним; якщо  $m = 0$ , то  $A$  називається невід'ємним.

**Твердження 11** (див. теорему 4.1 [11], с. 27). *Нехай  $A \in \mathcal{L}(H, H)$  є компактним і невід'ємним та задовольняє умову  $Ax \neq 0$  при  $x \neq 0$ . Тоді існує нескінченна послідовність власних векторів  $\{e^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , яку можна вибрати ортонормованою (тобто  $|e^i|_H = 1$ ,  $(e^i, e^j)_H = 0$ , якщо  $i \neq j$ ) і яка утворює базу простору  $H$ . Нумерацію власних векторів можна вибрати так, щоб відповідні власні значення  $\lambda^i$  (які є дійсними та додатними) утворювали монотонно спадну послідовність, що збігається до нуля:*

$$\lambda^1 \geq \lambda^2 \geq \dots \geq \lambda^n \geq \dots \rightarrow 0. \quad (37)$$

Нехай  $X$  – деякий гільбертів простір. Функція  $a(u, v)$ , визначена на  $X \times X$ , називається лінійною формою на  $X$ , якщо вона лінійна по першому й другому аргументу, тобто:

$$a(\lambda u, \mu v) = \lambda \mu a(u, v). \quad (38)$$

Лінійна форма неперервна, якщо існує стала  $M$ , така що:

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X. \quad (39)$$

Спряженим (двоїстим) до  $X$  називається простір  $X^*$  (або  $X'$ ) всіх лінійних неперервних на  $X$  функціоналів, тобто відображень з  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Кутові дужки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означають співвідношення двоїстості між  $X^*$  та  $X$ , тобто, якщо  $f \in X^*$  та  $v \in X$ , то

$$f(v) = \langle f, v \rangle_X = \langle f, v \rangle.$$

**Твердження 12** (теорема Лакса-Мільграма, див. теорема 5.1 [11], с. 32). *Нехай  $a(u, v)$  – лінійна неперервна форма на деякому гільбертовому просторі  $X$ , яка є коерцитивною в тому сенсі, що існує така стала  $a_0 > 0$ , що*

$$|a(v, v)| \geq a_0 \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \quad (40)$$

*Нехай  $f \in X^*$ . Тоді існує єдиний елемент  $u \in X$ , такий, що*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_X \quad \forall v \in X. \quad (41)$$

Пов'яжемо з формою  $a(u, v)$  оператор  $A : X \rightarrow X^*$ , який визначено так: для довільного  $u \in X$  елемент  $Au$  – це такий елемент  $X^*$ , що

$$\langle Au, v \rangle_X = a(u, v), \quad v \in X. \quad (42)$$

Оператор  $A : X \rightarrow X^*$  називається коерцитивним, якщо виконується оцінка типу (36):

$$\langle Ax, x \rangle_X \geq a_0 \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X, \quad (43)$$

де  $a_0 > 0$  – деяке фіксоване число.

Зрозуміло, що правило (42) для лінійної неперервної коерцитивної форми  $a(u, v)$  ставить у відповідність лінійний неперервний коерцитивний оператор  $A$ .

Теорему Лакса-Мільграма можна тоді записати в такому еквівалентному вигляді

**Твердження 13** (теорема Лакса-Мільграма в операторній формі). *Якщо  $X$  – гільбертів простір,  $A : X \rightarrow X^*$  – лінійний неперервний коерцитивний оператор, то для всіх  $f \in X^*$  існує єдиний розв'язок  $u \in X$  рівняння*

$$Au = f. \quad (44)$$

Наступне твердження теж є відомим в літературі. Наведемо його доведення для повноти викладу матеріалу.

**Твердження 14** (про ортонормовану базу на графах, див. лему 2 [1], с. 5-6). *Нехай  $V_1$  – простір з (5),  $H$  взято з (7). Існують послідовності  $\{\lambda_\mu\}_{\mu=0}^\infty$  та  $\{\mathbf{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$  такі, що:*

- (i)  $\{\mathbf{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty \subset V_1$  є ортонормованою базою для простору  $H$ ;
- (ii)  $\lambda_0 = 0$ ,  $\mathbf{w}^0 = \left( \left( \sum_{i=1}^n \ell_i \right)^{-1/2}, \dots, \left( \sum_{i=1}^n \ell_i \right)^{-1/2} \right) \in \mathbb{R}^n$  (тоді  $|\mathbf{w}^0|_H = 1$ );
- (iii) кожна функція  $\mathbf{w}^\mu = (w^{\mu,1}, \dots, w^{\mu,n})$  є гладкою на ребрах, зокрема,
 
$$-w_{xx}^{\mu,i} = \lambda_\mu w^{\mu,i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (45)$$

*Доведення.* Визначимо наступні простори

$$\tilde{V} = \left\{ \mathbf{v} \in V_1 \mid \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} v^i(x) dx = 0 \right\}, \quad \tilde{H} = \left\{ \mathbf{v} \in H \mid \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} v^i(x) dx = 0 \right\}. \quad (46)$$

Знайдемо ортонормовану базу за допомогою розв'язку задачі на власні значення: знайти пару  $(\lambda, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \tilde{V}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^n)$  таку, що

$$(\mathbf{z}_x, \mathbf{v}_x)_H = \lambda (\mathbf{z}, \mathbf{v})_H, \quad \mathbf{v} \in \tilde{V}. \quad (47)$$

Спершу розглянемо іншу задачу: для заданого  $\mathbf{h} \in H$ , знайти  $\mathbf{z} \in \tilde{V}$  таке, що

$$(\mathbf{z}_x, \mathbf{v}_x)_H = (\mathbf{h}, \mathbf{v})_H, \quad \mathbf{v} \in \tilde{V}. \quad (48)$$

Нехай визначимо оператор  $K : H \rightarrow \tilde{V}$  такий, що  $K\mathbf{h} = \mathbf{z}$ , де  $\mathbf{z}$  є розв'язком задачі (48). Доведемо, що  $K$  є коректно визначеним, компактним, симетричним та додатним, а потім, застосувавши спектральну теорему (твердження 11), отримаємо існування гладкої на кожному ребрі графа ортонормованої бази.

1. *Коректність визначення.* Перш за все, потрібно показати, що такий оператор  $K$  справді існує, тобто, що задача (48) має розв'язок. Доведемо це, застосувавши теорему Лакса-Мільграма. Нехай білінійну форму  $\mathbf{a} : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  визначено таким правилом:

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z_x^i(x) v_x^i(x) dx, \quad \mathbf{z}, \mathbf{v} \in V_1. \quad (49)$$

Коерцитивність цієї форми випливає з твердження 7, бо оскільки  $\mathbf{z} \in \tilde{H}$ , то

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x) dx = 0.$$

Тому з (25) маємо (позначимо для зручності  $C_2 := \frac{1}{\sqrt{C_1}} > 0$ ) оцінку

$$\frac{1}{C_2^2} |\mathbf{z}|_H^2 \leq |\mathbf{z}_x|_H^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |z_x^i(x)|^2 dx.$$

Неперервність форми (49) випливає з такої оцінки (див. формулу (9))

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v})| &= |(\mathbf{z}_x, \mathbf{v}_x)_H| \leq |\mathbf{z}_x|_H \cdot |\mathbf{v}_x|_H = \\ &= (|\mathbf{z}_x|_H^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (|\mathbf{v}_x|_H^2)^{\frac{1}{2}} \leq (|\mathbf{z}_x|_H^2 + |\mathbf{z}|_H^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (|\mathbf{v}_x|_H^2 + |\mathbf{v}|_H^2)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{z}\|_{V_1} \cdot \|\mathbf{v}\|_{V_1}. \end{aligned}$$

Тому з теореми Лакса-Мільграма випливає таке: для довільного  $\mathbf{h} \in H \subset V_1^*$  існує єдиний елемент  $\mathbf{z} \in V_1$  такий, що

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = (\mathbf{h}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{v} \in V_1,$$

тобто (48) виконується і оператор  $K$  визначено конкретно.

2. *Обмеженість.* Нехай  $\mathbf{h} \in H$  та  $\mathbf{z} = K\mathbf{h}$ , де  $\mathbf{z} \in \tilde{V}$  є розв'язком задачі (48). Використовуючи формулу (48) з  $\mathbf{v} = \mathbf{z}$  маємо:

$$|\mathbf{z}_x|_H^2 = (\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_x)_H = (\mathbf{h}, \mathbf{z})_H \leq |\mathbf{h}|_H \cdot |\mathbf{z}|_H.$$

Використавши оцінку (25) у формі

$$|\mathbf{z}|_H \leq C_2 |\mathbf{z}_x|_H, \quad (50)$$

отримуємо, що  $|\mathbf{z}_x|_H^2 \leq |\mathbf{h}|_H \cdot C_2 |\mathbf{z}_x|_H$ . Звідси випливає, що

$$|\mathbf{z}_x|_H \leq C_2 |\mathbf{h}|_H, \quad (51)$$

а тому з (25) матимемо, що  $|\mathbf{z}|_H \leq C_2^2 |\mathbf{h}|_H$ . Використовуючи означення норми  $V_1$  з (9), одержимо

$$\|K\mathbf{h}\|_{V_1}^2 = \|\mathbf{z}\|_{V_1}^2 = |\mathbf{z}|_H^2 + |\mathbf{z}_x|_H^2.$$

Підставляючи сюди отримані оцінки, одержимо нерівність

$$\|K\mathbf{h}\|_{V_1}^2 \leq (C_2^2 |\mathbf{h}|_H)^2 + (C_2 |\mathbf{h}|_H)^2 = (C_2^4 + C_2^2) |\mathbf{h}|_H^2.$$

Отже,

$$\|K\mathbf{h}\|_{V_1} \leq C_2 \sqrt{1 + C_2^2} |\mathbf{h}|_H, \quad (52)$$

що доводить обмеженість оператора  $K : H \rightarrow \tilde{V}$ .

3. *Компактність.* Нехай  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  – обмежена послідовність в  $H$ . Тоді  $|h_i|_H \leq C_3$ . Тому для  $z_i = Kh_i$  з оцінки (52) одержимо таке:

$$\|z_i\|_{V_1} = \|Kh_i\|_{V_1} \leq C_2 \sqrt{1 + C_2^2} \cdot C_3.$$

Завдяки компактності вкладення  $\tilde{V} \subset V_1 \stackrel{K}{\subset} H$  випливає, що послідовність  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  має збіжну підпослідовність, тобто  $K$  є компактним оператором.

4. *Симетричність.* Візьмемо довільні  $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in H$ . Нехай  $K\mathbf{h} = \mathbf{z}$  та  $K\mathbf{g} = \mathbf{v}$ . З (48) отримаємо, що

$$(\mathbf{z}_x, \mathbf{v}_x)_H = (\mathbf{h}, K\mathbf{g})_H. \quad (53)$$

З аналога (48) (замінивши  $\mathbf{h}$  на  $\mathbf{g}$  та змінивши  $\mathbf{z}$  та  $\mathbf{v}$  місцями) матимемо, що  $(\mathbf{v}_x, \mathbf{z}_x)_H = (\mathbf{g}, \mathbf{z})_H$  і тому

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{z}_x)_H = (\mathbf{g}, K\mathbf{h})_H. \quad (54)$$

Зрозуміло, що ліві частини (53) та (54) однакові. Тому праві теж:

$$(\mathbf{h}, K\mathbf{g})_H = (\mathbf{g}, K\mathbf{h})_H = (K\mathbf{h}, \mathbf{g})_H.$$

Отримаємо, що оператор  $K$  є симетричним.

5. *Додатність.* Маємо з (48) при  $\mathbf{v} = \mathbf{z}$  таке:

$$(K\mathbf{h}, \mathbf{h})_H = (\mathbf{z}, \mathbf{h})_H = (\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_x)_H \geq 0,$$

тобто  $K$  є додатно визначеним оператором.

6. *Існування бази.* Оскільки  $K$  є симетричним, додатно визначеним та компактним лінійним оператором, то з твердження 11 випливає, що всі його власні значення  $\{\eta_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$

є дійсними невід'ємними і прямують до нуля, а власні функції  $\{\mathbf{w}^\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$  утворюють ортонормовану базу у  $\tilde{H}$ .

Зауважимо, що для  $\eta_\mu \neq 0$ , рівність  $K\mathbf{w}^\mu = \eta_\mu \mathbf{w}^\mu$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{w}^\mu$  є власною функцією задачі на власні значення (47) для власного значення  $\lambda_\mu = 1/\eta_\mu$ , при  $\mu \in \mathbb{N}$ .

Звернемо увагу, що в шуканій базі ми не маємо сталих векторів з  $V_1$  (вони не належать до простору  $\tilde{V}$ ). Отже, якщо візьмемо  $\mathbf{z} \in \tilde{V}$  та  $\mathbf{r} = (\alpha, \dots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$ , де  $\alpha \in \mathbb{R}$  можна взяти довільним фіксованим числом, наприклад, таким, щоб  $|\mathbf{r}|_H = 1$ , то маємо

$$(\mathbf{z}, \mathbf{r})_H = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x) \alpha \, dx = \alpha \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} z^i(x) \, dx = 0 \implies H = \tilde{H} \oplus (\alpha, \dots, \alpha).$$

Отже, набір вектор-функцій  $\mathbf{r}, \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \dots$  утворив ортонормовану в  $H$  базу простору  $V_1$ .

7. *Гладкість.* На кожному ребрі графа й для кожної власної пари  $(\lambda_\mu, \mathbf{w}^\mu)$ , маємо (45). Зрозуміло, що кожна функція  $w^{\mu,i}$  є гладкою, що можна довести, використовуючи стандартну процедуру підвищення гладкості. Теорему доведено.  $\square$

**3.4. Збіжності в функційних просторах.** Використовуватимемо такі факти.

**Твердження 15** (теорема Обена, див. твердження 4.2 [12], с. 7). *Якщо  $s, h > 1$  – деякі числа,  $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$  – банахові простори,  $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ , то*

$$\{u \in L^s(0, T; \mathcal{W}) \mid u_t \in L^h(0, T; \mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} L^s(0, T; \mathcal{L}) \cap C([0, T]; \mathcal{B}),$$

*тобто якщо  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  – обмежена послідовність в просторі  $L^s(0, T; \mathcal{W})$  та  $\{u_t^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  – обмежена послідовність в  $L^h(0, T; \mathcal{B})$ , то існує підпослідовність  $\{u^{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  така, що  $u^{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u$  сильно в  $L^s(0, T; \mathcal{L})$  та в  $C([0, T]; \mathcal{B})$ .*

**Твердження 16** (див. зауваження 7 [13], с. 183). *Нехай  $d \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^d$  – обмежена область,  $q \in [1, \infty]$ ,  $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^q(G)$ . Тоді якщо  $z_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z$  сильно в  $L^q(G)$ , то існує підпослідовність  $\{z_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  така, що  $z_{m_j} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v$  майже скрізь в  $G$ .*

**Твердження 17** (див. лему 1 [14], с. 714, для  $q(x) \equiv q$ ). *Нехай  $d \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^d$  – обмежена область,  $q > 1$ ,  $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^q(G)$ . Тоді якщо  $z_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z$  слабо в  $L^q(G)$  та  $z_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v$  майже скрізь в  $G$ , то  $z = v$ .*

**Твердження 18** (див. [15], с. 482). *Нехай  $H$  – сепарабельний гільбертів простір, а  $T > 0$ . Якщо послідовність  $\{\mathbf{v}^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  є рівномірно обмеженою у просторі  $L^\infty(0, T; H)$ , то з неї можна виділити підпослідовність  $\{\mathbf{v}^{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , яка  $*$ -слабо збігається до деякого елемента  $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H)$ . Тобто, для будь-якої тестової функції  $\mathbf{w} \in L^1(0, T; H)$  виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathbf{v}^{m_j}(t), \mathbf{w}(t))_H \, dt = \int_0^T (\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t))_H \, dt.$$

**Твердження 19** (див. теорему 3 [7], с. 723). *Нехай  $X$  – рефлексивний банахів простір й  $\{x^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  – обмежена послідовність у  $X$ . Тоді існує підпослідовність  $\{x^{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  та елемент  $x \in X$  такі, що  $x^{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$  слабо в  $X$ .*

#### 4. Основні результати

Основним результатом статті є така теорема.

**Теорема 20.** *Нехай виконуються умови (A), (G), (F), (U). Тоді правильні такі твердження.*

- 1) (Єдиність). *Задача (1)-(3) не може мати більше одного слабкого розв'язку.*
- 2) (Апріорна оцінка). *Кожен слабкий розв'язок задачі (1)-(3) задовольняє наступну нерівність*

$$\sup_{t \in [0, T]} |\mathbf{u}(t)|_H^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{V_1}^2 dt + \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_Y^q dt \leq C_4 \left( |\mathbf{u}_0|_H^2 + \|\mathbf{f}; L^2(0, T; H)\|^2 \right), \quad (55)$$

де стала  $C_4 > 0$  не залежить від  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{f}$ .

- 3) (Існування). *Існує слабкий розв'язок  $\mathbf{u}$  задачі (1)-(3).*

Для зручності, позначимо через  $SP(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$  множину всіх слабких розв'язків задачі (1)-(3). Теорема 20 дає, що  $SP(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \neq \emptyset$  і якщо  $\mathbf{u} \in SP(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$ , то  $\mathbf{u}$  є єдиним слабким розв'язком задачі (1)-(3).

*Доведення.* (Єдиність). Припустимо, що  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in SP(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$ , та  $\widehat{\mathbf{u}} := \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ . Тоді з (3) отримуємо, що  $\widehat{\mathbf{u}}(0) = 0$ . Нехай  $\tau \in (0, T]$  й

$$\chi_{0, \tau}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0, \tau], \\ 0, & \text{якщо } t \notin [0, \tau]. \end{cases} \quad (56)$$

Оскільки  $\mathbf{u}^1$  та  $\mathbf{u}^2$  є слабкими розв'язками задачі (1)-(3), то для них виконується інтегральна тотожність (20). Запишемо її для  $\mathbf{u}^1$  та  $\mathbf{u}^2$ :

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_t^1(t) + A\mathbf{u}^1(t) + N\mathbf{u}^1(t), \mathbf{v}(t) \rangle_V dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t))_H dt, \quad (57)$$

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_t^2(t) + A\mathbf{u}^2(t) + N\mathbf{u}^2(t), \mathbf{v}(t) \rangle_V dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t))_H dt. \quad (58)$$

Віднімаючи (58) від (57) та використовуючи лінійність скалярного добутку та оператора  $A$ , приходимо до рівності

$$\int_0^T \langle \widehat{\mathbf{u}}_t(t) + A\widehat{\mathbf{u}}(t) + N\mathbf{u}^1(t) - N\mathbf{u}^2(t), \mathbf{v}(t) \rangle_V dt = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U(Q_{0, T}). \quad (59)$$

У (59) підставимо тестову функцію  $\mathbf{v}(t) = \chi_{0, \tau}(t)\widehat{\mathbf{u}}(t)$ , де  $\chi_{0, \tau}$  взято з (56), отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \langle \widehat{\mathbf{u}}_t(t), \widehat{\mathbf{u}}(t) \rangle_V dt + \int_0^\tau \langle A\widehat{\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{u}}(t) \rangle_{V_1} dt + \\ & + \int_0^\tau \langle N\mathbf{u}^1(t) - N\mathbf{u}^2(t), \mathbf{u}^1(t) - \mathbf{u}^2(t) \rangle_Y dt = 0, \quad \tau \in (0, T]. \end{aligned} \quad (60)$$

Оскільки  $\widehat{\mathbf{u}} \in W(Q_{0,T})$ , то використовуючи формулу інтегрування частинами типу (17) та враховуючи оцінку

$$(|\xi^1|^{q-2}\xi^1 - |\xi^2|^{q-2}\xi^2)(\xi^1 - \xi^2) \geq 0, \quad \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}, \quad (61)$$

з (60) отримуємо  $\frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{u}}(\tau)|_H^2 + \int_0^\tau \langle A\widehat{\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{u}}(t) \rangle_{V_1} dt \leq \frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{u}}(0)|_H^2 = 0$ . Зважаючи на невід'ємність оператора  $A$ , звідси отримуємо  $\frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{u}}(\tau)|_H^2 \leq 0$ ,  $\tau \in (0, T]$ . Отже,  $\widehat{\mathbf{u}} = 0$  та  $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$ .

(Апріорна оцінка). Для  $\mathbf{u} \in SP(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$  та  $\mathbf{v} = \chi_{0,\tau}\mathbf{u}$ , з (20), використовуючи формулу інтегрування частинами типу (17), маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\mathbf{u}(\tau)|_H^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{u}(0)|_H^2 + \int_0^\tau \left[ \langle A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_Y \right] dt &\leq \\ &\leq \int_0^\tau (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t))_H dt, \quad \tau \in (0, T]. \end{aligned} \quad (62)$$

З нерівності Коші

$$|\alpha\beta| \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (63)$$

впливає, що

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{u})_H| \leq |\mathbf{f}|_H \cdot |\mathbf{u}|_H \leq \frac{1}{2}|\mathbf{f}|_H^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|_H^2.$$

З умови (A) та формул (9) і (18) впливає, що

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V_1} + a_0|\mathbf{v}|_H^2 \geq a_0\|\mathbf{v}\|_{V_1}^2, \quad \mathbf{v} \in V_1. \quad (64)$$

Тоді з (64) та (62) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\mathbf{u}(\tau)|_H^2 + a_0 \int_0^\tau \|\mathbf{u}(t)\|_{V_1}^2 dt + g_0 \int_0^\tau \|\mathbf{u}(t)\|_Y^q dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}|\mathbf{u}_0|_H^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|_H^2 dt + \left(\frac{1}{2} + a_0\right) \int_0^\tau |\mathbf{u}(t)|_H^2 dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Введемо допоміжну функцію  $y(t) = |\mathbf{u}(t)|_H^2$ ,  $t \in [0, T]$ . Тоді з (65) отримаємо таке:

$$y(\tau) \leq |\mathbf{u}_0|_H^2 + \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|_H^2 dt + (1 + 2a_0) \int_0^\tau y(t) dt.$$

Застосувавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (див. твердження 8), звідси маємо

$$y(\tau) \leq \left( |\mathbf{u}_0|_H^2 + \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|_H^2 dt \right) e^{(1+2a_0)\tau}, \quad \tau \in (0, T].$$

Підставивши цю оцінку в праву частину нерівності (65), отримуємо таке:

$$|\mathbf{u}(\tau)|_H^2 \leq C_5 F(\tau), \quad (66)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{Q_{0,\tau}^i} \left[ |u_x^i(x, t)|^2 + |u^i(x, t)|^q \right] dx dt \leq C_6 F(\tau), \quad (67)$$

де  $F(\tau) = |\mathbf{u}_0|_H^2 + \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|_H^2 dt$ ,  $\tau \in [0, T]$ . Звідси і випливає оцінка (55).

(Існування). Використаємо метод Фаєдо-Гальоркіна. Візьмемо послідовність  $\{\mathbf{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$  з твердження 14. Визначимо функцію  $\mathbf{u}^m : [0, T] \rightarrow V$  за правилом

$$\mathbf{u}^m(t) = \sum_{\mu=0}^m \varphi_\mu^m(t) \mathbf{w}^\mu, \quad t \in [0, T], \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (68)$$

де дійснозначні функції  $\varphi_0^m, \dots, \varphi_m^m$  задовольняють наступні рівності

$$\langle \mathbf{u}_t^m(t) + A\mathbf{u}^m(t) + N\mathbf{u}^m(t), \mathbf{w}^\mu \rangle_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}^\mu)_H, \quad t \in [0, T], \quad (69)$$

$$\varphi_\mu^m(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}^\mu)_H, \quad \mu = \overline{0, m}. \quad (70)$$

Звернемо увагу, що функція  $\mathbf{u}_0^m := \sum_{\mu=0}^m \varphi_\mu^m(0) \mathbf{w}^\mu$  задовольняє наступне

$$\mathbf{u}_0^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_0 \text{ сильно в } H. \quad (71)$$

Крім того, ортонормованість функції з  $\{\mathbf{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$  у просторі  $H$  та нерівність Бесселя для рядів Фур'є (див. теорема 1 [15, с. 323]) передбачають, що для будь-якого  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  виконується рівність

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_0^m|_H^2 &= \left| \sum_{\mu=0}^m \varphi_\mu^m(0) \mathbf{w}^\mu \right|_H^2 = \left( \sum_{\mu=0}^m \varphi_\mu^m(0) \mathbf{w}^\mu, \sum_{\lambda=0}^m \varphi_\lambda^m(0) \mathbf{w}^\lambda \right)_H = \\ &= \sum_{\mu=0}^m \sum_{\lambda=0}^m \varphi_\mu^m(0) \varphi_\lambda^m(0) (\mathbf{w}^\mu, \mathbf{w}^\lambda)_H. \end{aligned}$$

Ортогональність системи  $\{\mathbf{w}^\mu\}_{\mu=0}^\infty$  означає, що  $(\mathbf{w}^\mu, \mathbf{w}^\lambda)_H = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu \neq \lambda, \\ 0, & \text{якщо } \mu = \lambda. \end{cases}$  Тому

$$|\mathbf{u}_0^m|^2 = \sum_{\mu=0}^m |\varphi_\mu^m(0)|^2 \leq |\mathbf{u}_0|_H^2. \quad (72)$$

Задача (69)-(70) є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Застосуємо твердження 6 (теорему Каратеодорі-Ласалля) до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку отримуємо з (69)-(70). Позначивши

$$\varphi^m(t) = (\varphi_0^m(t), \dots, \varphi_m^m(t)), \quad M(t) = \left( (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}^0)_H, \dots, (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}^m)_H \right),$$

$$L_\mu(t, \varphi(t)) = \langle A\mathbf{u}^m(t), \mathbf{w}^\mu \rangle_{V_1} + \langle N\mathbf{u}^m(t), \mathbf{w}^\mu \rangle_Y, \quad \mu = \overline{0, m},$$

отримаємо, що (69) – це система вигляду (22). Умови Каратеодорі для  $L$  випливають з (A), (G) та побудови базисних функцій. Крім того, завдяки оцінці (33) з леми 9 маємо

$$(L(t, \varphi^m(t)), \varphi^m(t))_{\mathbb{R}^m} \geq a_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |u_x^{m,i}(x, t)|^2 dx + g_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |u^{m,i}(x, t)|^q dx \geq 0.$$

Тому виконується нерівність (24) з  $\alpha(t) \equiv 0$ ,  $\beta(t) \equiv 0$ . Отже, згідно з твердженням 6 існує єдиний глобальний розв'язок  $\varphi^m \in W^{1,p}(0, T; \mathbb{R}^m)$ , де  $p = 2$  (бо  $M \in L^2(0, T; H)$ ).

Помноживши обидві сторони  $\mu$ -ї рівності (69) на  $\varphi_\mu^m(t)$ , просумувавши за  $\mu$  від 0 до  $m$  та зінтегрувавши отримані рівності за часом від 0 до  $\tau$ , отримуємо

$$\int_0^\tau \langle \mathbf{u}_t^m(t) + A\mathbf{u}^m(t) + N\mathbf{u}^m(t), \mathbf{u}^m(t) \rangle_V dt = \int_0^\tau (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}^m(t))_H dt, \quad \tau \in (0, T]. \quad (73)$$

З (63) одержимо:  $|(\mathbf{f}, \mathbf{u}^m)_H| \leq |\mathbf{f}|_H \cdot |\mathbf{u}^m|_H \leq \frac{1}{2}|\mathbf{f}|_H^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{u}^m|_H^2$ . Тоді, зінтегрувавши в рівності (73) перший доданок частинами, використавши оцінки (64) та (72), отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|\mathbf{u}^m(\tau)|_H^2 + a_0 \int_0^\tau \|\mathbf{u}^m(t)\|_{V_1}^2 dt + g_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q_{0,\tau}^i} |u^{m,i}|^q dx dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2}|\mathbf{u}_0|_H^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|_H^2 dt + \left(\frac{1}{2} + a_0\right) \int_0^\tau |\mathbf{u}^m(t)|_H^2 dt. \end{aligned} \quad (74)$$

Введемо допоміжну функцію  $y_m(t) = |\mathbf{u}^m(t)|_H^2$ ,  $t \in [0, T]$ . Тоді з нерівності (74) отримаємо таку оцінку:

$$y_m(\tau) \leq |\mathbf{u}_0|_H^2 + \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|^2 dt + (1 + 2a_0) \int_0^\tau y_m(t) dt.$$

Застосувавши до цієї нерівності твердження 8, матимемо

$$y_m(\tau) \leq \left( |\mathbf{u}_0|_H^2 + \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|^2 dt \right) e^{(1+2a_0)\tau}, \quad \tau \in (0, T].$$

Підставивши одержану оцінку у праву частину нерівності (74), приходимо до оцінки:

$$|\mathbf{u}^m(\tau)|_H^2 + \int_0^\tau \|\mathbf{u}^m(t)\|_{V_1}^2 dt + \int_0^\tau \|\mathbf{u}^m(t)\|_Y^q dx dt \leq C_7 F(\tau), \quad (75)$$

де

$$F(\tau) = |\mathbf{u}_0|_H^2 + \int_0^\tau |\mathbf{f}(t)|_H^2 dt, \quad \tau \in [0, T]. \quad (76)$$

Тут стала  $C_7 > 0$  не залежить від  $m$ . З нерівності (75) випливає, що

$$\operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [0, T]} |u^m(\tau)|_H^2 \leq C_8, \quad (77)$$

$$\int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_{V_1}^2 dt \leq C_8, \quad (78)$$

$$\int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_Y^q dt \leq C_8, \quad (79)$$

де стала  $C_8 > 0$  не залежить від  $m$ . Тому послідовність  $\{\mathbf{u}^m\}_{m=0}^\infty$  є обмеженою у просторах  $L^\infty(0, T; H)$  (завдяки (77)),  $L^2(0, T; V_1)$  (завдяки (78)) та  $L^q(0, T; Y)$  (завдяки (79)).

На підставі твердження 18, а також зважаючи на рефлексивність просторів  $L^2(0, T; V_1)$  та  $L^q(0, T; Y)$  (твердження 19), впливає можливість вибрати таку підпоследовність  $\{\mathbf{u}^{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{\mathbf{u}^m\}_{m=0}^\infty$ , що виконуються збіжності

$$\mathbf{u}^{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbf{u} \quad * \text{-слабко в } L^\infty(0, T; H) \quad \text{та слабко в } U(Q_{0,T}).$$

Крім того, застосовуючи визначення оператора (19), умову (G), співвідношення спряжених показників (13), означення простору  $Y^*$  (12) та отриману рівномірну апріорну оцінку (79), маємо

$$\begin{aligned} \|N\mathbf{u}^m; L^{q'}(0, T; Y^*)\|^{q'} &= \int_0^T \|N\mathbf{u}^m(t); Y^*\|^{q'} dt = \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \left| g^i |u^{m,i}(x, t)|^{q-2} u^{m,i}(x, t) \right|^{q'} dx dt = \int_0^T \sum_{i=1}^n (g^i)^{q'} \int_0^{\ell_i} |u^{m,i}(x, t)|^{(q-1)q'} dx dt = \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^n (g^i)^{q'} \int_0^{\ell_i} |u^{m,i}(x, t)|^q dx dt \leq (g^0)^{q'} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} |u^{m,i}(x, t)|^q dx dt = \\ &= C_9 \int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_Y^q dt \leq C_{10}, \end{aligned}$$

де стала  $C_{10} > 0$  теж не залежить від  $m$ . Тому існує таке  $\chi \in L^{q'}(0, T; Y^*)$ , що

$$N\mathbf{u}^{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \chi \quad \text{слабко в } L^{q'}(0, T; Y^*). \quad (80)$$

Далі, аналогічно як в [10, с. 880-881] отримуємо обмеженість последовності  $\{\mathbf{u}_t^m\}_{m=0}^\infty$  у відповідному функційному просторі. Тоді з теореми Обена (твердження 15) і тверджень 16 та 17 матимемо, що

$$\mathbf{u}^{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbf{u} \quad \text{майже скрізь в } Q_{0,T}.$$

Тому  $\chi = N\mathbf{u}$  (див. позначення (80)).

Перейшовши до границі у рівності (69), з отриманих збіжностей матимемо, що функція  $\mathbf{u}$  задовольняє умови означення 1. Теорему 20 доведено.  $\square$

**Висновки.** У статті розглянуто мішану задачу для півлінійного параболічного рівняння на зв'язному орієнтованому графі. Введено та досліджено відповідні функціональні простори, сформульовано поняття слабкого розв'язку задачі, що розглядається. Доведено такі результати: одержано апріорну оцінку розв'язку, встановлено його єдиність і, за допомогою методу Фаєдо–Гальоркіна, доведено існування слабкого розв'язку задачі.

**Конфлікт інтересів і етика.** Олег Бугрій є членом редколегії даного журналу. Для уникнення конфлікту інтересів, рукопис пройшов відповідну процедуру рецензування незалежними рецензентами, а прийняття рішення про публікацію здійснювалося незалежним редактором. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

**Подяки.** Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

### Список використаних джерел

1. Žugec B. Regularity of a parabolic differential equation on graphs. *Mathematics*. 2023. Vol. 11, No. 21: 4453. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11214453>
2. Buhrii O.M. Stochastic parabolic equations on graphs. *Математичні студії*. 2026. Т. 65, № 1. С. 58–73. DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.65.1.58-73>
3. Li A., Chen, R., Farimani, A.B. et al. Reaction diffusion system prediction based on convolutional neural network. *Sci Rep*. 2020. Vol. 10: 3894. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-60853-2>
4. Gennip Y., Budd J. A prolegomenon to differential equations and variational methods on graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 2025. 100 p.
5. Avdonin S.A., Mikhaylov V.S. Controllability of partial differential equations on graphs: Preprint. arXiv:2505.20690v1. 2025. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.20690>
6. Esposito A., Patacchini F.S., Schlichting A. On a class of nonlocal continuity equations on graphs. *European Journal of Applied Mathematics*. 2024. Vol. 35, No. 1. P. 109–126. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0956792523000128>
7. Leoni G. A first course in Sobolev spaces. Providence, Rhode Island: AMS, 2010. 626 p. (Graduate Studies in Mathematics. Vol. 105).
8. Evans L.C. Partial differential equations. Providence, Rhode Island: AMS, 2010. 664 p. (Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19).
9. Buhrii O., Buhrii N., Kholyavka O. On Caratheodory–LaSalle’s theorems for systems of ordinary differential equations and their application. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2019. Т. 27. С. 9–17.
10. Buhrii O., Buhrii N. Integro–differential systems with variable exponents of nonlinearity. *Open Mathematics*. 2017. Vol. 15, No. 1. P. 859–883. DOI: <https://doi.org/10.1515/math-2017-0069>
11. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. 398 p. (Lecture Notes in Physics. Vol. 127).
12. Buhrii O.M., Buhrii N.V. Doubly nonlinear elliptic–parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities. *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*. 2019. Vol. 22, No. 2. P. 1–22.
13. Buhrii O.M., Hlynyans’ka Kh.P. Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 174. P. 169–189. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0288-8>
14. Bokalo T.M., Buhrii O.M. Doubly nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63. P. 709–728. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0537-5>
15. Kadets V. A course in functional analysis and measure theory. Cham: Springer, 2018. 539 p.

UDC 517.95

## Semilinear parabolic equations on graphs

Oleh Buhrii, Dariia Yatseniak

*Abstract.* The paper considers an initial-boundary value problem for a semilinear parabolic equation on a simple connected directed graph. A weak solution to the problem is defined in the appropriate functional spaces and conditions for continuity and transmission at the graph vertices are provided. The unique solvability of the problem is proved.

*Keywords:* partial differential equation, parabolic equation, initial-boundary value problem, connected directed graph, weak solution.

## References

1. Žugec, B. (2023). *Regularity of a parabolic differential equation on graphs*, Mathematics, **11** (21): 4453. <https://doi.org/10.3390/math11214453>
2. Buhrii, O.M. (2026). *Stochastic parabolic equations on graphs*, Matematychni Studii, **65** (1), 58–73. <https://doi.org/10.30970/ms.65.1.58-73>
3. Li, A., Chen, R., Farimani, A.B. et al. (2020). *Reaction diffusion system prediction based on convolutional neural network*, Sci. Rep., **10**: 3894. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-60853-2>
4. Gennip, Y., Budd, J. (2025). *A prolegomenon to differential equations and variational methods on graphs*, Cambridge University Press.
5. Avdonin, S.A., Mikhaylov, V.S. (2025). *Controllability of partial differential equations on graphs*: Preprint, arXiv:2505.20690v1. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.20690>
6. Esposito, A., Patacchini, F.S., Schlichting, A. (2024). *On a class of nonlocal continuity equations on graphs*, European Journal of Applied Mathematics, **35** (1), 109–126. <https://doi.org/10.1017/S0956792523000128>
7. Leoni, G. (2010). *A first course in Sobolev spaces*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
8. Evans, L.C. (2010). *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
9. Buhrii, O., Buhrii, N., Kholyavka, O. (2019). *On Caratheodory–LaSalle’s theorems for systems of ordinary differential equations and their application*, Visnyk Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inf., **27**, 9–17.
10. Buhrii, O., Buhrii, N. (2017). *Integro–differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Mathematics, **15** (1), 859–883. <https://doi.org/10.1515/math-2017-0069>
11. Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non-homogeneous Media And Vibration Theory*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.
12. Buhrii, O.M., Buhrii, N.V. (2019). *Doubly nonlinear elliptic–parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities*, Advances in Nonlinear Variational Inequalities, **22** (2), 1–22.
13. Buhrii, O.M., Hlynians’ka, Kh.P. (2011). *Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems*, Journal of Mathematical Sciences, **174**, 169–189. <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0288-8>
14. Bokalo, T.M., Buhrii, O.M. (2011). *Doubly nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, Ukrainian Mathematical Journal, **63**, 709–728. <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0537-5>
15. Kadets, V. (2018). *A course in functional analysis and measure theory*, Springer.

## Про авторів / About the authors

**Олег Бугрій**, доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

**Oleh Buhrii**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine;

**Дарія Яценяк**, аспірантка, кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна;

**Dariia Yatseniak**, Postgraduate student, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine.

Отримано / Received 31.03.2026  
 Прийнято до друку / Accepted 04.05.2026  
 Опубліковано / Published 27.05.2026

УДК 517.958:539.3:530.182

## Математичне моделювання впливу деформаційних ефектів на коефіцієнт дифузії домішок у наногетероструктурах

Олеся Даньків<sup>1</sup>, Юрій Нечипор<sup>2</sup>, Олег Кузик<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,  
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна  
[dankivolesya@dspu.edu.ua](mailto:dankivolesya@dspu.edu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-2154-8396>

<sup>2</sup>Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,  
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна  
[nechypor.yurij.asp@dspu.edu.ua](mailto:nechypor.yurij.asp@dspu.edu.ua)

<https://orcid.org/0009-0007-8010-1010>

<sup>3</sup>Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,  
кафедра фізики та інформаційних систем, м. Дрогобич, Україна  
[olehkuzyk@dspu.edu.ua](mailto:olehkuzyk@dspu.edu.ua)

<https://orcid.org/0000-0002-8474-444X>

---

*Анотація.* Побудовано математичну модель явища дифузії у гетеросистемах із врахуванням деформації. Математична модель ґрунтується на розв'язуванні модифікованого механіко-деформаційними ефектами стаціонарного рівняння Фіка. У межах розробленої моделі досліджено вплив деформації на коефіцієнт дифузії домішок у гетероструктурі. Встановлено, що зі збільшенням невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів гетероструктури GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs на 7% коефіцієнт дифузії домішок виду центру розтягу у внутрішньому шарі In<sub>0,2</sub>Ga<sub>0,8</sub>As зменшується на 35% відносно коефіцієнта дифузії домішок у ненапруженому шарі, що пов'язано зі збільшенням деформації розтягу в результаті самоузгодженого деформаційно-дифузійного перерозподілу.

*Ключові слова:* математичне моделювання, гетеросистема, деформація, домішка, дифузія, механічна напруга.

---

## 1. Вступ

Інформація про коефіцієнт дифузії домішок і дефектів у напівпровідниках та гетероструктурах на їх основі важлива для розуміння процесів формування їхньої структури та властивостей. Цей параметр визначає, як саме розподіляються домішкові атоми під час технологічних процесів, зокрема дифузійного легування, йонної імплантації та термічної обробки. Врахування дифузії дефектів дає змогу краще контролювати якість кристалу та стабільність характеристик напівпровідникових приладів. Одним з факторів, який може впливати на коефіцієнт дифузії є механічна деформація [1, 2]. Авторами робіт [1, 2, 3, 4] досліджено вплив неоднорідних полів механічного напруження різного виду на характеристики міграції точкових дефектів – вакансій і міжвузлових атомів. У роботах [2, 5] досліджено зміну енергетичного рельєфу міграції вакансій і міжвузлових атомів за наявності градієнта механічного напруження.

Для вакансій та домішок заміщення з йонним радіусом, меншим від йонного радіуса заміщеного атома, енергетично вигідною є міграція в область деформацій стиску [2], а для міжвузлових атомів, домішок впровадження та домішок заміщення з йонним радіусом, більшим від йонного радіуса заміщеного атома, — в область деформації розтягу [5].

Таким чином, наявність неоднорідної механічної напруги призводить до виникнення додаткового деформаційного потоку власних дефектів та домішок, тобто до зміни їх концентрації. А це, своєю чергою, є причиною зміни їх коефіцієнта дифузії [6, 7, 8].

Причиною виникнення неоднорідної деформації у гетероструктурах може бути як наявність точкових дефектів та дислокацій [9], так і невідповідність параметрів ґраток контактуючих матеріалів [10].

Незважаючи на велику кількість експериментальних досліджень [1, 2, 3, 4, 5, 11] щодо впливу деформаційних ефектів на процес дифузії, на сьогодні відсутня математична модель, яка б дозволяла прогнозувати концентраційні профілі власних дефектів і чужорідних домішок та їх коефіцієнт дифузії у напружених гетеросистемах. У ряді робіт [12, 13, 14, 15] розроблено математичні моделі для опису впливу деформації на процес дифузії в об'ємних напівпровідниках, або шаруватих структурах. Зокрема, у роботі [12] запропоновано модель дифузії, у якій враховано вплив локальної механічної деформації на коефіцієнт дифузії та швидкість переносу речовини в композитних середовищах, а для обчислень використано метод скінчених різниць. У роботі [13] розроблено одномірну математичну модель взаємозв'язку дифузії та деформації у бінарних шарах, де дифузія частинок спричиняє локальні деформації, а концентраційні градієнти викликають механічні напруження. Математична модель, яка представлена у роботі [14], включає залежність коефіцієнта дифузії та хімічного потенціалу від локальної деформації кристалічної ґратки, розглядаючи стиснення і розтягнення атомних шарів, що дозволяє передбачати зміну профілів концентрації під впливом механічного навантаження. Однак, у всіх цих роботах не береться до уваги деформація, яка виникає в околі гетеромережі, що є важливим для точного прогнозування дифузійних процесів у реальних напружених структурах.

Для формування напівпровідникових гетероструктур з наперед заданими фізичними властивостями важливою є інформація про закономірності зміни коефіцієнта дифузії імплантованих домішок і власних точкових дефектів під впливом механічних напруг [11], що й визначає актуальність роботи.

Метою цієї роботи є розробка математичної моделі явища дифузії точкових дефектів у напівпровідникових гетеросистемах, яка б враховувала наявність деформації, створеної самими дефектами, та деформації, яка виникає в околі гетеромежі матеріалів із різними параметрами ґраток. У роботі в межах розробленої математичної моделі досліджено вплив невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів і концентрації домішок на їх коефіцієнт дифузії у напруженій тришаровій гетероструктурі GaAs/InAs/GaAs.

## 2. Постановка проблеми

Взаємодія домішок із полем деформації, створеним як неузгодженням кристалічних ґраток контактуючих матеріалів, так і домішками, зумовлює просторовий перерозподіл останніх. Це може призвести до зміни коефіцієнта дифузії, а також як до накопичення, так і до зменшення числа дефектів у активній області залежно від характеру деформації.

Розглянемо напружену гетеросистему АВА, що складається з трьох шарів (рис. 1) із середньою концентрацією домішок  $N_0$ . У зв'язку з тим, що товщина шару А значно перевищує товщину внутрішнього шару В ( $l \gg 2a$ ), можна знехтувати деформацією зовнішніх шарів А.

Механічна деформація у шарі В моделюється кусково-лінійною функцією:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \frac{|x|}{a}, \quad |x| \leq a. \quad (1)$$

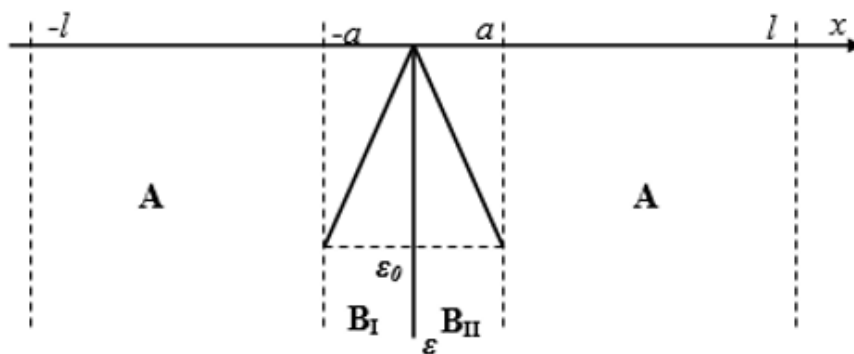


Рис. 1. Деформація тришарової гетеросистеми АВА.

Деформація, яка виникла внаслідок неузгодження параметрів ґраток контактуючих шарів А та В, описується такими компонентами тензора деформації:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} = \frac{a_A - a_B}{a_B},$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{2C_{12}}{C_{11}} \varepsilon_{yy}.$$

де  $a_A$  та  $a_B$  – параметри ґраток шарів А та В, відповідно.

Величина деформації на межі шарів А та В визначається як

$$\varepsilon_0 = 2\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{xx}. \quad (2)$$

В результаті самоузгодженої взаємодії домішок із деформаційним полем гетероструктури, яке створюється як внаслідок неузгодження параметрів ґраток контактуючих матеріалів, так і через наявність домішок, відбувається їх просторовий перерозподіл [15, 16, 17]. В основі моделі покладемо модифіковане деформаційними ефектами значення потоку домішок [5]:

$$J = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ DN(x) \left( 1 - \varepsilon(x) \frac{N_1}{N_b} \right) \right], \quad (3)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії домішок,  $N(x)$  – концентрація домішок,  $N_1$  – концентрація атомів напівпровідникового матеріалу напруженого шару,

$$N_b = \frac{k_B T}{W} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\rho}{r_1} N_1, \quad (4)$$

$W$  – величина дифузійного бар'єра,  $k_B$  – стала Больцмана,  $T$  – температура,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $r_1$  – характерний радіус дифузійного каналу,  $\rho$  – константа, яка входить у вираз для модельного потенціалу відштовхування між атомами:

$$U(r) \sim e^{-r/\rho}.$$

Потік дефектів у напруженій гетероструктурі складається з двох частин:

1) звичайного дифузійного (градієнтного) потоку:

$$J_d = -D_{\text{ef}} \frac{\partial N(x)}{\partial x},$$

з перенормованим коефіцієнтом дифузії  $D_{\text{ef}}$  внаслідок зміни ефективних розмірів дифузійних каналів під впливом напружень у гетероструктурі,

$$D_{\text{ef}} = D \left[ 1 - \frac{N_1}{N_b} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varepsilon(x) dx \right]; \quad (5)$$

2) деформаційного потоку:

$$J_p = D \frac{N_1}{N_b} \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x},$$

який виникає за наявності неоднорідної деформації.

Стаціонарний розподіл домішок у напруженій кристалічній системі АВА знаходиться шляхом розв'язання модифікованого механіко-деформаційними ефектами рівняння дифузії:

$$D_{\text{ef}} \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( DN(x) \frac{N_1}{N_b} \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \right) = 0. \quad (6)$$

Перепишемо рівняння (6) у вигляді:

$$D_{\text{ef}} \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} - V \frac{\partial N}{\partial x} - DN(x) \frac{N_1}{N_b} \frac{\partial^2 \varepsilon(x)}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

де  $V = D \frac{N_1}{N_b} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$  – швидкість домішок, отримана під дією градієнта деформаційного поля, що виникає внаслідок неоднорідної деформації.

Розв'язок диференціального рівняння (7) знаходився у кожній області гетероструктури окремо. Області  $B_I$  і  $B_{II}$  відрізняються тим, що швидкість домішок під дією градієнта деформаційного поля має протилежний напрям. Це пов'язано з тим, що швидкість

домішок, отримана у полі неоднорідної деформації, створеної як внаслідок неузгодження параметрів ґраток контактуючих матеріалів, так і наявністю домішок, є пропорційною до градієнта деформації  $V \sim \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$  [11].

На межах шарів гетероструктури ( $x = -a$ ,  $x = 0$ ,  $x = a$ ) повинні виконуватись умови рівності концентрацій домішок, а також їх потоків:

$$\begin{aligned} N(-a-0) &= N(-a+0), & J(-a-0) &= J(-a+0), \\ N(0-) &= N(0+), & J(0-) &= J(0+), \\ N(a-0) &= N(a+0), & J(a-0) &= J(a+0). \end{aligned} \quad (8)$$

Крім цього, вважаємо, що після вимкнення джерела імплантуючих домішок потік крізь поверхні кристалічної системи відсутній (відбивні межі) [4]:

$$J(-l) = J(l) = 0. \quad (9)$$

При заданих умовах кількість домішок, що перебуває в гетеросистемі, буде залишатись постійною, тобто повинна виконуватись умова:

$$\int_{-l}^l N(x) dx = Q. \quad (10)$$

де  $Q$  – кількість домішок у кристалічній структурі, що припадає на одиницю площі поперечного перерізу,  $2l$  – товщина гетероструктури.

У відповідному однорідному матеріалі при однакових фізичних умовах кількість домішок, що проникнуть у кристал за певний час імплантації, вважаємо рівною кількості домішок, що проникають за такий же проміжок часу у гетероструктуру з напруженими шарами. Це твердження буде справедливим при виконанні наступної умови:  $L_d \ll l$ , де  $L_d$  – ефективна дифузійна довжина.

У стаціонарному випадку в результаті вільної дифузії (ненапружена гетероструктура) при заданих умовах домішки розподіляються рівномірно, тобто

$$Q = 2N_0l. \quad (11)$$

Розв'язок диференціального рівняння (7), який задовільняє умовам (8)–(10), матиме вигляд:

$$N(x) = \begin{cases} \frac{N_0}{1 - \frac{a}{l} - \frac{1}{k}(1 - e^{ka/l})}, & |x| > a, \\ \frac{N_0}{1 - \frac{a}{l} - \frac{1}{k}(1 - e^{ka/l})} \exp\left[\frac{k}{l}(x+a)\right], & -a \leq x < 0, \\ \frac{N_0}{1 - \frac{a}{l} - \frac{1}{k}(1 - e^{ka/l})} \exp\left[-\frac{k}{l}(x-a)\right], & 0 \leq x \leq a, \end{cases} \quad (12)$$

де  $k = -\text{sign } \varepsilon_0 \frac{|V|}{D_{\text{ef}}} l$ .

Для дослідження процесів дифузії домішок і точкових дефектів у напруженій гетеросистемі використано аналітичний метод, що базується на розв'язанні модифікованого рівняння дифузії з урахуванням деформаційного поля. Механічний стан системи описано в межах теорії пружності, а вплив неоднорідної деформації враховано через додатковий внесок у потік домішок. Розв'язок задачі отримано шляхом аналітичного інтегрування стаціонарного диференціального рівняння дифузії з урахуванням умов

неперервності концентрації та потоку на межах шарів, а також умови збереження загальної кількості домішок.

### 3. Основні результати

Для ілюстрації висновків із запропонованої моделі деформаційного перерозподілу домішок у тришарових напружених гетероструктурах простежимо за впливом напруженого шару  $\text{In}_{0,2}\text{Ga}_{0,8}\text{As}$  на профіль стаціонарного розподілу домішок кремнію у гетероструктурі  $\text{GaAs}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$  наступних розмірів:  $a = 30 \text{ \AA}$ ,  $l = 1 \text{ мкм}$ . Результати розрахунку координатної залежності концентрації домішок при різних значеннях параметра  $k$  представлені на рис. 2. Для візуалізації отриманих результатів було використано програмне середовище Wolfram Mathematica. Помітно, що домішки накопичуються у стиснутому шарі  $\text{In}_{0,2}\text{Ga}_{0,8}\text{As}$ . У результаті такого перерозподілу концентрація імплантованих домішок у ненапруженій частині ( $\text{GaAs}$ ) гетероструктури різко зменшується. І при великих значеннях параметра  $k$  їх концентрація може зменшуватися у 30 разів ( $k = 85$ ) порівняно з ненапруженою структурою. Оскільки  $k = \frac{|V|}{D_{ef}} l$ , то очевидно, що здатність напружених шарів затримувати дифузію буде зростати зі зменшенням ефективного коефіцієнта дифузії  $D_{ef}$ . Це явище проявляється помітніше при значній зміні деформації з віддаленням від гетеромеж ( $V \sim \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ ), тобто значною мірою визначається пружними сталими контактуючих матеріалів гетероструктури та неузгодженням параметрів їх ґраток.

Наявність домішок ненульового об'єму  $\Omega_i$  призводить до збільшення об'єму кристалу та перерозподілу механічних напружень гетероструктури. У найпростішому випадку ( $\Omega_i = \Omega_0$ , де  $\Omega_0$  — об'єм атома матриці) деформація кристалічної ґратки внаслідок наявності домішок ненульового об'єму визначається відношенням концентрації домішок до концентрації атомів матеріалу імплантованої матриці  $\varepsilon_1(x) = \frac{N(x)}{N_1}$ . Тоді повну деформацію гетероструктури, спричинену як неузгодженням параметрів ґраток контактуючих матеріалів, так і наявністю домішок, можна записати у вигляді:

$$U(x) = \varepsilon(x) + \varepsilon_1(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{|x|}{a} + \frac{N(x)}{N_1}, & |x| \leq a, \\ \frac{N(x)}{N_1}, & |x| > a. \end{cases} \quad (13)$$

Характер деформації гетероструктури  $\text{GaAs}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$  визначається двома факторами: розподілом домішок і невідповідністю параметрів ґраток контактуючих матеріалів гетеросистеми. Біля меж гетероструктури визначальним є другий фактор і, відповідно, напружений шар  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  зазнає деформації стиску. При віддаленні від гетеромежі зменшується вплив невідповідності параметрів ґраток контактуючих шарів. Тоді характер деформації гетероструктури визначається розподілом домішок. Причому, при зростанні неузгодження параметрів кристалічних ґраток контактуючих матеріалів та швидкості зміни деформації з віддаленням від гетеромежі, яка визначається пружними сталими матеріалу, спостерігається збільшення деформації в центрі внутрішнього напруженого шару. У напружених шарах, окрім звичайної градієнтної дифузії, суттєву роль відіграють дифузійні ефекти, індуковані деформаційним полем, яке існує в напруженій гетеросистемі. Деформаційний потік  $j_p$ , який виникає в такій гетеросистемі, пропорційний градієнту механічного напруження. За наявності стиснутих шарів у гетероструктурі цей потік сприяє накопиченню домішок у напружених шарах (рис. 2).

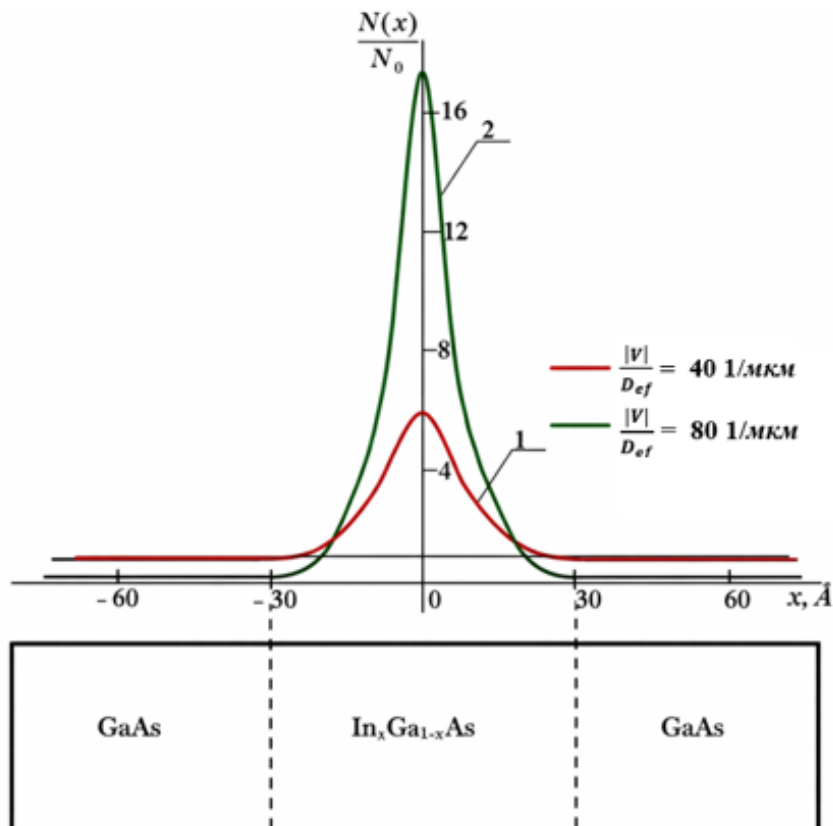


Рис. 2. Перерозподіл концентрації домішок кремнію у гетероструктурі GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs: 1 –  $\frac{|V|}{D_{ef}} = 40 \text{ 1/мкм}$ ; 2 –  $\frac{|V|}{D_{ef}} = 80 \text{ 1/мкм}$  ( $x=0,2$ )

У випадку всебічної деформації розтягу внутрішнього шару деформаційний потік призводить до переміщення домішок із менш неоднорідно-розтягнутої області внутрішнього шару (центру внутрішнього шару) до меж контактуючих матеріалів гетероструктури.

Для того, щоб дослідити вплив невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів на перерозподіл домішок у шарах гетероструктури з деформацією розтягу (гетероструктура In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As), проведемо відповідні розрахунки координатної залежності їх концентрації та повної деформації  $U(x)$  матеріалу при від’ємних значеннях параметра  $k$ . Як бачимо з рис. 3, у цьому випадку домішки практично не проникають у внутрішні напружені шари.

Внаслідок цього концентрація імплантованих домішок у зовнішніх шарах гетероструктури несуттєво зростає порівняно з кристалічною системою без напружених шарів. Причому, при зростанні величини невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів тришарової гетероструктури (зростанні параметра  $k$ ) спостерігається зменшення концентрації домішок у внутрішньому шарі. Такий характер стаціонарного розподілу імплантованих домішок можна пояснити на основі механіко-деформаційного механізму дифузії.

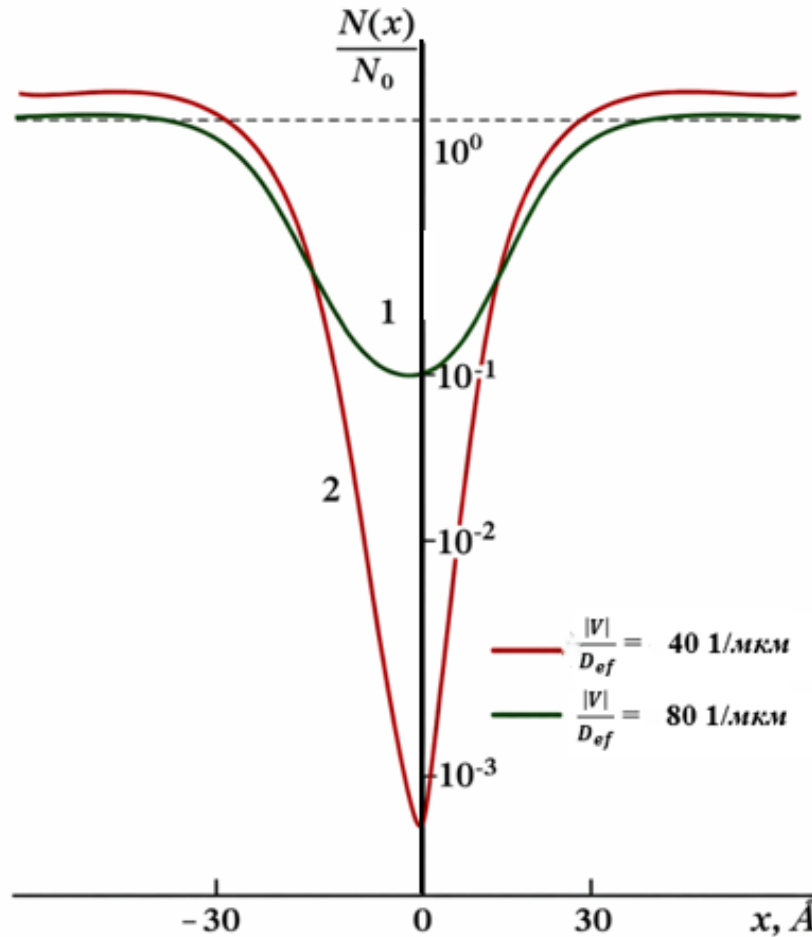


Рис. 3. Перерозподіл концентрації домішок кремнію у гетероструктурі  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ : 1 -  $\frac{|V|}{D_{ef}} = 40 \text{ 1/мкм}$ ; 2 -  $\frac{|V|}{D_{ef}} = 80 \text{ 1/мкм}$  ( $x=0,2$ )

У напружених шарах, окрім звичайної градієнтної дифузії, суттєву роль відіграють дифузійні ефекти, індуковані деформаційним полем, яке існує в напруженій гетеросистемі. Деформаційний потік  $j_p$ , який виникає в такій гетеросистемі, пропорційний градієнту механічного напруження. За наявності стиснутих шарів у гетероструктурі цей потік сприяє накопиченню домішок у напружених шарах (рис. 2). У випадку всебічної деформації розтягу внутрішнього шару деформаційний потік призводить до переміщення домішок із менш неоднорідно-розтягнутої області внутрішнього шару (центру внутрішнього шару) до меж контактуючих матеріалів гетероструктури (рис. 3).

Напруження, які виникають в гетеросистемі як внаслідок невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів, так і через наявність домішок, є причиною зміни ефективного розміру дифузійного каналу. Залежність коефіцієнта дифузії напруженої гетеросистеми від неузгодження параметрів ґраток та концентрації домішок визначається формулою (5). Підставивши перенормовану деформацію  $U(x)$  (13) у формулу (5), отримаємо:

$$\frac{D_{ef}}{D} = 1 - \left( \frac{N_1 \varepsilon_0}{N_b} \frac{1}{2} + \frac{\eta \cdot l / (ka)}{1 - a/l - \frac{1}{k} (1 - \exp(\frac{ka}{l}))} \left( \exp\left(\frac{ka}{l}\right) - 1 \right) \right) \quad (14)$$

де  $\eta = \frac{N_0}{N_b}$ .

На рис. 4 представлено результати розрахунку залежності коефіцієнта дифузії домішок кремнію в гетероструктурі GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs від складу її внутрішнього шару або від величини невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів при різних значеннях середньої концентрації домішок відносно коефіцієнта вільної дифузії. При незначній концентрації домішок ( $\eta = 10^{-8}$ ,  $N_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ) зі зростанням величини невідповідності ґраток гетероструктури коефіцієнт дифузії  $D_{ef}$  лінійно збільшується. Його зміна відносно коефіцієнта вільної дифузії  $D$  не перевищує 3 %. Подальше зростання середньої концентрації домішок призводить до монотонного зменшення коефіцієнта дифузії. Причому, з ростом невідповідності параметрів ґраток (з ростом долі In у шарі In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As) коефіцієнт дифузії в напруженій гетероструктурі також зменшується. Зокрема, при середній концентрації домішок кремнію  $N_0 = 1,5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ,  $\eta = 0,015$  коефіцієнт дифузії гетеросистеми зменшується на 35 % ( $x = 1$ ) порівняно з коефіцієнтом вільної дифузії.

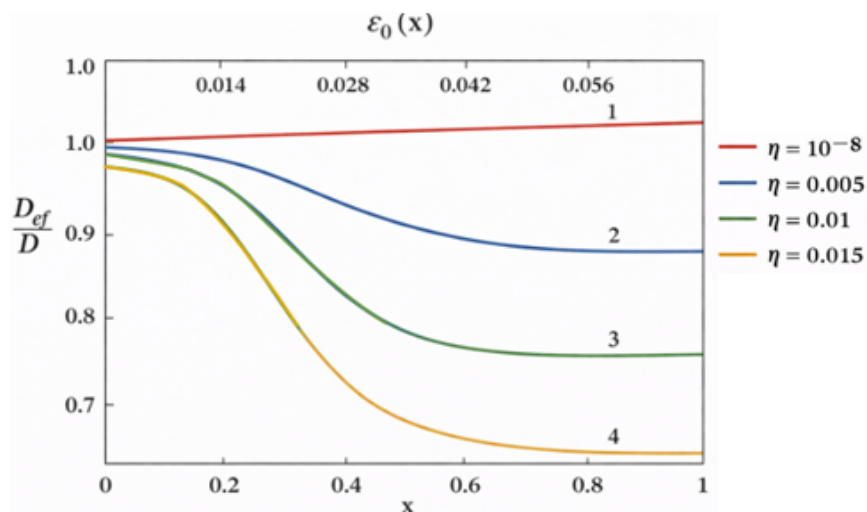


Рис. 4. Залежність коефіцієнта дифузії кремнію у внутрішньому шарі гетероструктури GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs від складу твердого розчину при різних значеннях середньої концентрації домішок ( $k = 2700$ ): 1 –  $\eta = 10^{-8}$ ; 2 –  $\eta = 0,005$ ; 3 –  $\eta = 0,01$ ; 4 –  $\eta = 0,015$

При незначних концентраціях домішок деформація структури в основному визначається складовою, що виникає внаслідок неузгодження параметрів ґраток шарів В (In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As) та А (GaAs) [11]. В цьому випадку зростання долі In у шарі In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As призводить до зростання деформації стиску внутрішнього шару In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As за абсолютною величиною і, відповідно, до зменшення часу між двома зіткненнями домішок, що і є причиною збільшення коефіцієнта дифузії (рис. 4, лінія 1).

При зростанні середньої концентрації домішок характер деформації матеріалу гетероструктури основним чином визначається перерозподілом домішок. У цьому випадку збільшення невідповідності параметрів ґраток контактуючих матеріалів призводить до

накопичення домішок у внутрішньому шарі (рис. 2) і, відповідно, до збільшення деформації розтягу. Як було зазначено в роботі [15], напруження розтягу збільшує потенціальний бар'єр для дифузії. Збільшення концентрації домішок у внутрішньому напруженому шарі  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  тришарової гетероструктури  $\text{GaAs}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$  призводить до зменшення відстані між двома положеннями рівноваги (відстань між вузлами або міжвузлями), що і є причиною зменшення коефіцієнта дифузії (рис. 4) [8]. У випадку, коли внутрішній шар зазнає всебічної деформації розтягу, спостерігається незначне (до 3,2%) монотонне зменшення коефіцієнта дифузії домішок як при збільшенні їх концентрації, так і при зростанні неузгодження параметрів кристалічних ґраток контактуючих шарів (рис. 5). Така поведінка коефіцієнта дифузії пояснюється тим, що наявність домішок практично не змінює величини деформації внутрішнього розтягнутого шару тришарової гетероструктури і, відповідно, несуттєво зменшується коефіцієнт дифузії в напруженій структурі [15] з внутрішнім шаром, який зазнає всебічної деформації розтягу.

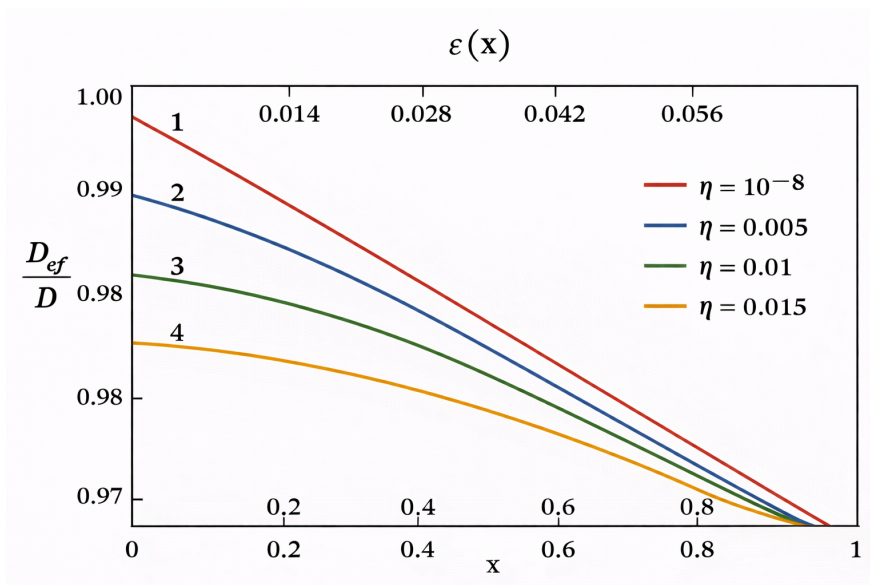


Рис. 5. Залежність коефіцієнта дифузії кремнію у внутрішньому шарі гетероструктури  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  від складу твердого розчину при різних значеннях середньої концентрації домішок ( $k = 2700$ ): 1 –  $\eta = 10^{-8}$ ; 2 –  $\eta = 0,005$ ; 3 –  $\eta = 0,01$ ; 4 –  $\eta = 0,015$

Проведені теоретичні розрахунки якісно узгоджуються з експериментальними результатами, отриманими у роботі [18], де показано, що напружені шари гетероструктури  $\text{InGaAs}/\text{AlGaAs}$  суттєво впливають на міжшарову дифузію, зменшуючи коефіцієнт дифузії для дефектів, які є центрами розтягу.

Практична цінність роботи полягає в тому, що розроблена математична модель дозволяє прогнозувати просторовий розподіл домішок і точкових дефектів у напружених напівпровідникових гетероструктурах з урахуванням впливу механічних деформацій, спричинених як невідповідністю параметрів ґраток, так і наявністю домішок. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації технологічних процесів (дифузійного легування, йонної імплантації, термічної обробки) шляхом керування перерозподілом домішок у гетероструктурах, прогнозування концентраційних профілів у багатшарових структурах типу  $\text{GaAs}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$  без проведення дороговартісних

експериментів, керування ефективним коефіцієнтом дифузії через зміну невідповідності параметрів ґраток і рівня легування, а також підвищення якості напівпровідникових приладів шляхом зменшення небажаного проникнення домішок у активні області. Показано, що напружені шари можуть виконувати роль бар'єрів або пасток для домішок, що відкриває можливості для проєктування гетероструктур із наперед заданими фізичними властивостями та контрольованим просторовим розподілом носіїв заряду.

#### **Висновки.**

1. Розроблено математичну модель явища дифузії точкових дефектів у напівпровідникових гетеросистемах, яка враховує наявність деформації, створеної самими дефектами, та деформації, яка виникає в околі гетеромежі внаслідок неспівпадіння параметрів ґраток контактуючих матеріалів.

2. У межах розробленої моделі досліджено залежність коефіцієнта дифузії домішок від величини невідповідності параметрів ґраток матеріалів напівпровідникової гетероструктури GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs.

3. Встановлено, що зі збільшенням невідповідності параметрів ґраток на 7% ( $x = 1$ ) коефіцієнт дифузії домішок у внутрішньому шарі In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As гетероструктури GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs з деформацією стиску зменшується на 35%. Таку поведінку коефіцієнта дифузії можна пояснити зростанням концентрації домішок і відповідним збільшенням величини деформації розтягу, що призводить до збільшення потенціального бар'єру для дифузії.

4. Встановлено, що у тришаровій гетероструктурі з внутрішнім розтягнутим шаром наявність домішок практично не змінює значення коефіцієнта дифузії порівняно з бездомішковою кристалічною системою. Це зумовлено тим, що імплантація домішок виду центру розтягу практично не змінює величини параметра деформації внутрішнього напруженого шару.

**Конфлікт інтересів і етика.** Автори заявляють, що не мають конфліктів інтересів. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

**Подяки.** Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

#### **Список використаних джерел**

1. Robson J. D. Deformation enhanced diffusion in aluminium alloys. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2020. Vol. 51. P. 5029–5041. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11661-020-05960-5>
2. Voges J., Duvigneau F., Juhre D. On the deformation dependency of the diffusion flux in solids at large deformations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2022. Vol. 34. P. 1991–2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01092-w>
3. Danielewski M. Entropy production and stress–deformation effect on interdiffusion. *Defect and Diffusion Forum*. 2012. Vol. 323–325. P. 43–48. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.323-325.43>
4. Mehrer H. Diffusion in stressed solids. *Diffusion in Solids*. Springer Series in Solid-State Sciences. 2007. Vol. 155. P. 235–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71488-0>
5. Fisher D. J. Diffusion in GaAs and other III–V semiconductors. Switzerland: Trans Tech Publications, 1998.
6. Beernink K. J., Thornton R. L. Si diffusion and intermixing in AlGaAs/GaAs structures using buried impurity sources. *Applied Physics Letters*. 1995. Vol. 66, No. 10. P. 1271–1273. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.113154>

7. Bugge F., Zeimer U., Wenzel H., Erbert G., Weyers M. Interdiffusion in highly strained InGaAs quantum wells for laser applications. *Journal of Crystal Growth*. 2004. Vol. 272, No. 1–4. P. 531–537. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2004.08.050>
8. Park Y. M., Park Y. J., Kim K. M., Song J. D. Interdiffusion and structural change in InGaAs quantum well structures by rapid thermal annealing. *Journal of Applied Physics*. 2004. Vol. 96, No. 10. P. 6080–6084. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1805191>
9. Khreis O. M. Interdiffusion and strain effects in pseudomorphic quantum well heterostructures. *Solid State Communications*. 2004. Vol. 132, No. 11. P. 767–771. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2004.09.036>
10. Reveil M., Clancy P. Resolving the mystery of the concentration-dependence of amphoteric dopant diffusion in III–V semiconductors. *Acta Materialia*. 2020. Vol. 186. P. 555–563. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.12.016>
11. Ryu S., Kim I., Choe B., Jeong W. The effect of strain on the interdiffusion in InGaAs/GaAs quantum wells. *Applied Physics Letters*. 1995. Vol. 67. P. 1419. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.114512>
12. Klepach T.I., Zohdi M. Strain assisted diffusion: Modeling and simulation of deformation-dependent diffusion in composite media. *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 56. P. 413–423. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.08.035>
13. Suo Y., Yang F. One-dimensional analysis of the coupling between diffusion and deformation in a bi-layer electrode. *Acta Mechanica Sinica*. 2019. Vol. 35. P. 589–599. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10409-018-0817-5>
14. Фльорко О. В., Чекурін В. Ф. Математична модель дифузії в деформованій ґратці. *Вісник Національного університету "Львівська політехніка"*. 2000. № 393. С. 64–67. <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/9185>
15. Peleshchak, R.M., Kuzyk, O.V., Dan'kiv, O.O. The deformation-diffusion mechanism of the formation of n-n+-transitions in semiconductors under the influence of pulsed laser irradiation. *Romanian Reports in Physics*. 2021. Vol. 73. P. 506:1–11. URL: <https://rrp.nipne.ro/2021/AN73506.pdf>
16. Rammohan K., Rich D. H., MacDougal M. H., Dapkus P. D. Thermal processing of strained InGaAs/GaAs quantum well heterostructures. *Applied Physics Letters*. 1997. Vol. 70, No. 12. P. 1599–1601. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.118627>
17. Djie H. S., Ho C. K. F., Mei T., Ooi B. S. Quantum well intermixing enhancement using Ge-doped encapsulant layers in InGaAs/InP. *Applied Physics Letters*. 2005. Vol. 86. Art. 041107. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1868867>
18. Yang Z., Zhang S., Ma S., Shi Y., Liu Q., Hao X., Shang L., Han B., Qiu B., Xu B. Effects of Thermal-Strain-Induced Atomic Intermixing on the Interfacial and Photoluminescence Properties of InGaAs/AlGaAs Multiple Quantum Wells. *Materials*. 2023. Vol. 16(17). Art. 6068. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma16176068>

UDC 517.958:539.3:530.182

## Mathematical modeling of the influence of deformation effects on the diffusion coefficient of impurities in nanoheterostructures

Olesya Dan'kiv, Yuriy Nechypor, Oleh Kuzyk

*Abstract.* A mathematical model of diffusion in heterosystems taking into account deformation has been constructed. The mathematical model is based on the solution of the stationary Fick equation modified by mechanical-deformation effects. Within the framework of the developed model, the influence of deformation on the diffusion coefficient of impurities in the heterostructure was studied. It was found that with an increase in the mismatch of the lattice parameters of the contacting materials of the GaAs/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As/GaAs heterostructure by 7%, the diffusion coefficient of impurity of the type of stretching center in the inner In<sub>0.2</sub>Ga<sub>0.8</sub>As layer decreases by 35% relative to the diffusion coefficient of impurities

in the unstrained layer, which is associated with an increase in stretching deformation as a result of self-consistent deformation-diffusion redistribution.

*Keywords:* mathematical modeling, heterosystem, deformation, impurity, diffusion, mechanical strain.

## References

1. Robson, J. D. (2020). *Deformation enhanced diffusion in aluminium alloys*, Metallurgical and Materials Transactions A, **51**, 5029–5041. <https://doi.org/10.1007/s11661-020-05960-5>
2. Voges, J., Duvigneau, F., Juhre, D. (2022). *On the deformation dependency of the diffusion flux in solids at large deformations*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, **34**, 1991–2012. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01092-w>
3. Danielewski, M. (2012). *Entropy production and stress–deformation effect on interdiffusion*, Defect and Diffusion Forum, **323–325**, 43–48. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.323-325.43>
4. Mehrer, H. (2007). *Diffusion in stressed solids*, Diffusion in Solids, Springer Series in Solid-State Sciences, **155**, 235–260. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71488-0>
5. Fisher, D. J. (1998). *Diffusion in GaAs and other III–V semiconductors*, Trans Tech Publications, Switzerland.
6. Beernink, K. J., Thornton, R. L. (1995). *Si diffusion and intermixing in AlGaAs/GaAs structures using buried impurity sources*, Applied Physics Letters, **66** (10), 1271–1273. <https://doi.org/10.1063/1.113154>
7. Bugge, F., Zeimer, U., Wenzel, H., Erbert, G., Weyers, M. (2004). *Interdiffusion in highly strained InGaAs quantum wells for laser applications*, Journal of Crystal Growth, **272** (1–4), 531–537. <https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2004.08.050>
8. Park, Y. M., Park, Y. J., Kim, K. M., Song, J. D. (2004). *Interdiffusion and structural change in InGaAs quantum well structures by rapid thermal annealing*, Journal of Applied Physics, **96** (10), 6080–6084. <https://doi.org/10.1063/1.1805191>
9. Khreis, O.M. (2004). *Interdiffusion and strain effects in pseudomorphic quantum well heterostructures*, Solid State Communications, **132** (11), 767–771. <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2004.09.036>
10. Reveil, M., Clancy, P. (2020). *Resolving the mystery of the concentration-dependence of amphoteric dopant diffusion in III-V semiconductors*, Acta Materialia, **186**, 555–563. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.12.016>
11. Ryu, S., Kim, I., Choe, B., Jeong, W. (1995). *The effect of strain on the interdiffusion in InGaAs/GaAs quantum wells*, Applied Physics Letters, **67**, 1419. <https://doi.org/10.1063/1.114512>
12. Klepach, T.I., Zohdi, M. (2014). *Strain assisted diffusion: Modeling and simulation of deformation-dependent diffusion in composite media*, Composites Part B: Engineering, **56**, 413–423. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.08.035>
13. Suo, Y., Yang, F. (2019). *One-dimensional analysis of the coupling between diffusion and deformation in a bilayer electrode*, Acta Mechanica Sinica, **35**, 589–599. <https://doi.org/10.1007/s10409-018-0817-5>
14. Florko, O.V., Chekurin, V.F. (2000). *Mathematical model of diffusion in a deformed lattice*, Visnyk of Lviv Polytechnic National University, **393**, 64–67 [in Ukrainian]. <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/9185>
15. Peleshchak, R.M., Kuzyk, O.V., Dan'kiv, O.O. (2021). *The deformation-diffusion mechanism of the formation of n-n+ transitions in semiconductors under the influence of pulsed laser irradiation*, Romanian Reports in Physics, **73**, 506:1–11. <https://rrp.nipne.ro/2021/AN73506.pdf>
16. Rammohan, K., Rich, D. H., MacDougall, M. H., Dapkus, P. D. (1997). *Thermal processing of strained InGaAs/GaAs quantum well heterostructures*, Applied Physics Letters, **70** (12), 1599–1601. <https://doi.org/10.1063/1.118627>
17. Djie, H. S., Ho, C. K. F., Mei, T., Ooi, B. S. (2005). *Quantum well intermixing enhancement using Ge-doped encapsulating layers in InGaAs/InP*, Applied Physics Letters, **86**, 041107. <https://doi.org/10.1063/1.1868867>
18. Yang, Z., Zhang, S., Ma, S., Shi, Y., Liu, Q., Hao, X., Shang, L., Han, B., Qiu, B., Xu, B. (2023). *Effects of Thermal-Strain-Induced Atomic Intermixing on the Interfacial and Photoluminescence Properties of InGaAs/AlGaAs Multiple Quantum Wells*, Materials, **16**(17), 6068. <https://doi.org/10.3390/ma16176068>

**Про авторів / About the authors**

**Олеся Даньків**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

**Olesya Dan'kiv**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine;

**Юрій Нечипор**, аспірант, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

**Yurij Nechypor**, Postgraduate Student, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine;

**Олег Кузик**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізики та інформаційних систем, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна;

**Oleh Kuzyk**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physics and Information Systems, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 24, Ivan Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine.

Отримано / Received 12.03.2026  
Прийнято до друку / Accepted 08.04.2026  
Опубліковано / Published 27.05.2026

УДК 517.925.4

## Застосування зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь $L$ -діагонального вигляду до розв'язування вибраних задач математичної фізики

Мар'яна Ковтонюк<sup>1</sup>, Олена Соя<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,  
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна  
kovtonyukmm@vspu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-7444-1234>

<sup>2</sup>Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,  
кафедра математики та інформатики, м. Вінниця, Україна  
soia.om@vspu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-0937-299X>

---

*Анотація.* Розглянуто задачу про побудову асимптотичних розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь  $L$ -діагонального вигляду, на основі якої побудовано розв'язок змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі, досліджено його асимптотичний характер.

*Ключові слова:* зчисленні системи диференціальних рівнянь  $L$ -діагонального вигляду, асимптотичний характер розв'язку, змішана задача для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі.

---

### 1. Вступ

Дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків лінійних диференціальних рівнянь  $L$ -діагонального вигляду у скінченних просторах присвячені праці О. Перона, Г. Шпета, Р. Бельмана, С. Фаєдо, Н. Левінсона. Українські вчені М. Шкіль та Г. Завізіон асимптотично звели сингулярно-збурену систему диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду [8]. Я. Плоткін та А. Турбін досліджували

асимптотичну поведінку розв'язку сингулярно збуреного квазілінійного диференціального рівняння у банаховому просторі [7]. В. Євтухов представив асимптотичне подання розв'язків двомірної системи диференціальних рівнянь [1]. О. Кочерга, В. Яковець для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи розробили асимптотику розв'язку задачі Коші [5]. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь розглядаються у працях М. Перестюка, О. Капустян, П. Фекети, Н. Касімової [6], М. Шкіля [10] та ін. У працях М. Ковтонюк та О. Сої [4], [3] побудовано розв'язки зчисленних систем диференціальних рівнянь з малими параметрами й встановлено їх асимптотичну поведінку.

## 2. Постановка проблеми

*Мета статті:* визначити умови і побудувати розв'язок змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі, використовуючи асимптотичні розклади для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь  $L$ -діагонального вигляду.

Зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь  $L$ -діагонального вигляду досліджувалися у працях М. Ковтонюк [2] та М. Шкіля й М. Ковтонюк [9]. Зокрема у роботах [2], [9] розглянуто системи

$$\frac{dy}{dt} = [W(t) + C(t)] \cdot y, \quad (1)$$

де  $W(t), C(t) = \|c_{ij}(t)\|_1^\infty$  — дійсні нескінченні матриці,  $y$  — нескінченний вектор,  $t \geq t_0$  — дійсна змінна, матриця  $W(t)$  складається із жорданових клітин  $W_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  із власним числом відповідно  $w_j(t)$  розмірності  $r_j$ , тобто

$$W(t) = \{W_1(t), W_2(t), \dots\}. \quad (2)$$

причому  $1 \leq r_j < +\infty$  і послідовність  $\{r_j\}$  кратності клітин Жордана обмежена зверху:  $r = \sup_j \{r_j\}$ .

Розв'язок системи (1) шукаємо у просторі  $m$  рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей. Припустимо, що коефіцієнти  $L$ -діагональної системи (1)–(2) задовольняють умовам:

- а)  $w_k(t), c_{km}(t), c_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(t) \cdot t^2$  неперервні при  $t \geq t_0$ ,
- б)  $\sup_k \max_t c_k(t) = \gamma < +\infty \quad \forall k = 1, 2, \dots$ , де  $\gamma > 0$  — стала, що не залежить від  $t$ ,
- в) елементи матриці  $C(t)$  такі, що  $\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}^2(t) < M$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $\int_t^{\infty} t^2 \|C(t)\| dt < +\infty$ ,
- г) позначимо через  $D_{km}(t) = \operatorname{Re}(w_k(t) - w_m(t))$ . Припустимо, що всі  $r_k < \infty$  попадають в один із двох класів  $I_1, I_2$ , де  $r_k \in I_1$ , якщо,

$$t^{-r} \exp \left( \int_{t_0}^t D_{km}(s) ds \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$|t - \tau|^2 \exp \left( - \int_{\tau}^t D_{km}(s) ds \right) < M < +\infty, \quad r_k \in I_2, \quad \text{якщо } \int_{\tau}^t D_{km}(s) ds < N. \quad (4)$$

Тоді має місце теорема [2].

**Теорема 1.** *Якщо система (1)–(2) задовольняє умовам а)–г), то існує таке достатньо велике  $T \geq t_0 \geq 0$ , що при  $t \geq T$  дана система диференціальних рівнянь має розв'язок  $y_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  асимптотично рівний*

$$y_j(t) = \psi_j(t)(1 + o(1)), \quad (t \rightarrow \infty), \quad (5)$$

де  $\psi_j(t)$  – розв'язок скінченної системи диференціальних рівнянь  $\frac{d\psi}{dt} = W_j(t)\psi$ .

Цю теорему можна використати при знаходженні розв'язків змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу в необмеженому циліндрі

$$C_\infty = [0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq m] \times [0 \leq t \leq \infty):$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(t, x, y)u, \quad (6)$$

$$|u|_L = 0, \quad L \text{ — межа області } G = [0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq m], \quad (7)$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y),$$

$$u_t(0, x, y) = u_1(x, y), \quad x, y \in G, \quad (8)$$

де  $a(t, x, y)$  — функція, яка має неперервні похідні по  $t, x, y$  до третього порядку включно, абсолютно інтегровна в області  $G$ , тобто невластний інтеграл по змінній  $t$  збіжний

$$\int_0^\infty a(t, x, y)dt < +\infty,$$

а функції  $u_0(x, y)$ ,  $u_1(x, y)$  достатнє число раз диференційовні.

### 3. Основні результати

Поряд з (6) розглянемо рівняння

$$t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon a(t, x, y)u, \quad (9)$$

$\varepsilon$  — деякий параметр ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ).

При  $\varepsilon = 1$  рівняння (9) співпадає з (6). За допомогою підстановки  $t = \varepsilon\tau$ , ( $\tau$  — нова незалежна змінна)  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ , приходимо до рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon a(t, x, y)u. \quad (10)$$

Для побудови формального розв'язку змішаної задачі (6)–(7)–(8) використовуємо метод Фур'є. У відповідності з цим методом розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x, y) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{kj}} T_{kj}(t) X_k(x) Y_j(y), \quad (11)$$

де  $X_k(x)$ ,  $Y_j(y)$ ,  $k, j = 1, 2, \dots$  власні функції відповідних крайових задач

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu X(x); \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -vY(y), \quad Y(0) = Y(m) = 0, \quad \omega = \mu + v, \quad (13)$$

$\{\mu_k\}, \{v_j\}$  — відповідні власні значення:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2; \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$v_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2; \quad Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin \frac{j\pi y}{m}; \quad j = 1, 2, \dots$$

$\omega_{kj} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}\right)$ ;  $v_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}$  — повна ортонормована система функцій. Після підстановки (12) в рівняння (10) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} \frac{1}{\omega_{kj}} \frac{d^2 T_{kj}}{d\tau^2} X_k(x) Y_j(y) &= \sum_{k,j} \frac{1}{\omega_{kj}} T_{kj}(\tau) \frac{d^2 X_k}{dx^2} Y_j(y) + \\ &+ \sum_{k,j} \frac{1}{\omega_{kj}} T_{kj}(\tau) X_k(x) \frac{d^2 Y_j}{dy^2} + \sum_{k,j} \frac{1}{\omega_{kj}} a(t, x, y) T_{kj}(\tau) X_k(x) Y_j(y). \end{aligned}$$

Останню рівність помножимо на  $X_{k'}(x) Y_{j'}(y)$ ,  $k', j' = 1, 2, \dots$  і проінтегруємо послідовно два рази по  $x$  та  $y$  в межах від 0 до  $l$  і від 0 до  $m$ . Використовуючи співвідношення (14), приходимо до зчисленної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{\omega_{k'j'}} \frac{d^2 T_{k'j'}}{d\tau^2} = -T_{k'j'}(\tau) + \varepsilon \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{kj}} a_{kj,k'j'}(\tau) T_{kj}(\tau) \quad (15)$$

де  $a_{kj,k'j'}(\tau) = \int_0^l \int_0^m a(\tau, x, y) \underbrace{X_k(x) Y_j(y)}_{v_{kj}(x,y)} \underbrace{X_{k'}(x) Y_{j'}(y)}_{v_{k'j'}(x,y)} dx dy$ ,  $k', j' = 1, 2, \dots$

Початкові умови набирають вигляду

$$T_{k'j'}(0) = \int_0^l \int_0^m u_0(x, y) v_{k'j'}(x, y) dx dy \quad (16)$$

$$\left. \frac{dT_{k'j'}}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \int_0^l \int_0^m u_1(x, y) v_{k'j'}(x, y) dx dy, \quad k', j' = 1, 2, \dots$$

У рівнянні (15) індекси  $k'$  і  $j'$  рівноправні, вони змінюються незалежно один від одного. Поставимо індексам  $k'$  і  $j'$  у відповідність натуральне число  $r = k' + j'$ . Якщо змінюються  $k'$  і  $j'$ , або один із індексів, то відповідно змінюється і  $r$ .

Тоді рівняння (15) можна переписати у вигляді:

$$\frac{1}{\omega_r} \frac{d^2 T_r}{d\tau^2} = -T_r(\tau) + \varepsilon \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{r_1}} a_{r,r_1}(\tau) T_{r_1}(\tau)$$

або

$$\frac{d^2 T_r}{d\tau^2} = -\omega_r T_r(\tau) + \varepsilon \omega_r \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{r_1}} a_{r,r_1}(\tau) T_{r_1}(\tau) \quad (17)$$

За допомогою підстановки  $T_r(\tau) = Z_{2r-1}(\tau)$ ,  $\frac{dT_r(\tau)}{d\tau} = Z_{2r}(\tau)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , початкову задачу (16)–(17) приводимо до зчисленної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\omega_1}{\omega_1} a_{11} & 0 & \frac{\omega_1}{\omega_2} a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{21} & 0 & \frac{\omega_2}{\omega_2} a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

або у векторно-матричній формі

$$\frac{dz}{d\theta} = AZ + \varepsilon B(\tau)Z. \quad (18)$$

Елементи нескінченних матриць  $A, B(t)$  є достатнє число разів диференційовними функціями по  $t$ . Приводимо дану систему (18) до  $L$ -діагональному вигляду за допомогою підстановки

$$Z = U(t)W, \quad (19)$$

причому  $U(t) = \|u_{pq}(t)\|_1^\infty$  — нескінченна матриця, яка задовольняє умову  $\sum_{q=1}^{\infty} u_{pq}^2(t) < M$ ,  $W$  — нескінченний вектор. Рівняння (18), використовуючи (19), набуває вигляду

$$U(t) \frac{dW}{d\tau} + \varepsilon U'(t)W = AU(t)W(t) - \varepsilon B(t)U(t)W(t).$$

Матрицю  $U(t)$  будемо так, щоб виконувалась матрична рівність

$$AU(t) - \varepsilon U'(t) - \varepsilon B(t)U(t) = U(t)(\Lambda(t) + \varepsilon C(t)),$$

$\Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots\}$ ,  $C(t) = \|c_{ij}(t)\|_1^\infty$  — нескінченна матриця.

Прирівняємо в останньому матричному рівнянні коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ . Отримаємо матричну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} AU(t) - U(t)\Lambda(t) = 0, \\ -U'(t) - B(t)U(t) = U(t)C(t). \end{cases} \quad (20-21)$$

З рівнянь (20–21) знаходимо  $U(t)$  і  $\Lambda(t)$ . Проаналізувавши матрицю  $A$ , бачимо, що матрицю  $U$  потрібно шукати у квазідіагональному вигляді. Перше матричне рівняння (20–21) розпадається на зчисленну множину скінченних систем другого порядку

$$\begin{cases} U_{2j,2j-1}(t) = \lambda_{2j-1}(t)U_{2j-1,2j-1}(t), \\ -w_j U_{2j-1,2j-1}(t) = \lambda_{2j-1}(t)U_{2j,2j-1}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} U_{2j,2j}(t) = \lambda_{2j}(t)U_{2j-1,2j}(t), \\ -w_j U_{2j-1,2j}(t) = \lambda_{2j}(t)U_{2j,2j}(t), \end{cases}$$

$j = 1, 2, 3, \dots$ , розв'язками яких є

$$\begin{aligned} \lambda_{2j-1} &= i\sqrt{w_j}, & \lambda_{2j} &= -i\sqrt{w_j}, & i &= \sqrt{-1}, \\ U_{2j-1,2j-1}(t) &= U_{2j-1,2j}(t) = 1; & U_{2j,2j-1}(t) &= \lambda_{2j-1} = i\sqrt{w_j}, \end{aligned}$$

$U_{2j,2j}(t) = -i\sqrt{w_j}$ , тобто матриці  $U(t)$  і  $\Lambda(t)$  мають вигляд

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ i\sqrt{w_1} & -i\sqrt{w_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & i\sqrt{w_2} & -i\sqrt{w_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} i\sqrt{w_1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -i\sqrt{w_1} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & i\sqrt{w_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{w_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця  $U(t)$  має квазидіагональний вигляд, то ми можемо побудувати таку матрицю  $U^{-1}(t)$ , яка задовольняла б умові:

$$U(t)U^{-1}(t) = E_\infty,$$

де  $E_\infty$  — одинична нескінченна матриця,  $U^{-1}(t) = \| \| U_{jk}^0 \| \|_1^\infty$ .

$$U_{2j-1,2j-1}^0(t) = U_{2j,2j-1}^0(t) = \frac{1}{2}; \quad U_{2j-1,2j}^0(t) = \frac{1}{2\sqrt{w_j}}, \quad U_{2j,2j}^0(t) = -\frac{1}{2\sqrt{w_j}},$$

тобто

$$U^{-1}(t) = \left\| \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{w_1}} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{w_1}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{w_2}} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{w_2}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \right\|.$$

З другого матричного рівняння (20–21) випливає, що

$$C(t) = -U^{-1}(t)(U'(t) + B(t)U(t)), \text{ або}$$

$$\begin{aligned} C(t) &= -U^{-1}(t)B(t)U(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \dots \\ \frac{i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{i\sqrt{w_1}}{2w_1}a_{11}(t) & \frac{-i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \frac{i\sqrt{w_1}}{2w_2}a_{12}(t) & \dots \\ \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \frac{-i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \dots \\ \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_1}a_{21}(t) & \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \frac{i\sqrt{w_2}}{2w_2}a_{22}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Можна довести, що для матриці  $C(t)$  виконуються умови неперервності функцій  $c_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{jk}(t)|$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , а  $t \geq 0$ , а також  $c_j(t) \leq \alpha(t) \left( \int_0^{+\infty} \alpha(\tau) d\tau < +\infty \right)$ . Також для всіх  $j, k = 1, 2, \dots$  функція  $\text{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) = 0$ , тобто не змінює знак.

Тому  $L$ -діагональна система, згідно з [2], має розв'язок вигляду

$$w_j(t) = \eta_{jk}(t)e^{\pm i\omega_k(t)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

причому  $\eta_{jk}(t)$  — неперервні функції на  $[0; +\infty)$ , для яких мають місце асимптотичні розклади:

$$\begin{aligned} \eta_{jk}(t) &= o(1) \quad (j \neq k), \\ \eta_{kk}(t) &= 1 + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Підставляючи (23) в нескінченну систему диференціальних рівнянь (18) ( $\varepsilon = 1$ ) отримуємо розв'язки

$$\begin{aligned} z_{2j-1}(t) &= (\eta_{jk}(t) + \eta_{j+1,k}(t)) e^{\pm i\omega_k t}, \\ z_{2j}(t) &= i\sqrt{w_j} (\eta_{jk}(t) + \eta_{j+1,k}(t)) e^{\pm i\omega_k t}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Значить, диференціальне рівняння другого порядку (17) має розв'язки

$$\begin{aligned} T_\tau(t) &= (\eta_{\tau k}(t) + \eta_{\tau+1,k}(t)) e^{\pm i\omega_k t}, \\ \frac{dT_\tau(t)}{dt} &= i\sqrt{w_\tau} (\eta_{\tau k}(t) + \eta_{\tau+1,k}(t)) e^{\pm i\omega_k t}, \quad \tau = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

для яких мають місце асимптотичні формули

$$T_\tau(t) = (1 + o(1))e^{\pm i\omega_\tau t} \quad \frac{dT_\tau(t)}{dt} = i\sqrt{w_\tau} o(1)e^{\pm i\omega_\tau t}, \quad \text{якщо } k \neq \tau, \tau + 1. \quad (25)$$

Отримані результати сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема 2.** *Нехай функція  $a(t, x, y)$  має неперервні похідні по  $t, x$  та  $y$  до третього порядку, абсолютно інтегровна в області  $G$ :*

$$\int_0^\infty a(t, x, y) dt < +\infty,$$

тоді розв'язок змішаної задачі (6)–(8) можна подати у вигляді (11), де функції  $X_k(x), Y_j(y), T_\tau(t)$ ,  $\tau = j+k$  обчислюють за формулами (12), (13), (14), для яких мають місце асимптотичні розклади (25).

Можна застосувати аналогічний метод знаходження розв'язку змішаної задачі для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a_0^2(t) + a(t, x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

яке задовольняє граничним  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  і початковим  $u(x, 0) = \varphi_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_2(x)$  умовам, функції  $a_0^2(t)$ ,  $a_1(t, x)$  мають неперервні похідні по обох змінних до третього порядку, абсолютно інтегровні:  $\int_0^\infty a_0^2(t) dt < +\infty$ ,  $\int_0^\infty a_1(t, x) dt < +\infty$ .

Тоді розв'язок такої задачі можна подати у вигляді  $u(x, t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\omega_k} T_k(t) v_k(x)$ , функції  $v_k(x)$  і  $T_k(t)$  обчислюють за формулами  $\frac{d^2 v}{dx^2} + \omega^2 v = 0$ ,  $v(0) = v(l) = 0$ ,

$$\frac{dT_m(t)}{dt} = i\omega_m a_0(\tau) (\eta_{mk}(t) - \eta_{m+1,k}(t)) e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad T_m(t) = (\eta_{mk}(t) + \eta_{m+1,k}(t)) e^{\pm i\omega_k a_0(t)},$$

для яких мають місце асимптотичні формули

$$T_m(t) = (1 + o(1))e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \frac{dT_m(t)}{dt} = i\omega_m a_0(\tau)(1 + o(1))e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \text{якщо } k = m, m + 1, \quad i$$

$$T_m(t) = o(1)e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \frac{dT_m(t)}{dt} = i\omega_m a_0(\tau)o(1)e^{\pm i\omega_k a_0(t)}, \quad \text{якщо } k \neq m, m + 1.$$

**Висновки.** Авторами статті визначено умови і побудовано розв'язок змішаної задачі для рівняння другого порядку гіперболічного типу у необмеженому циліндрі, використано асимптотичні розклади для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь  $L$ -діагонального вигляду у випадку, коли головна матриця складається з клітин Жордана різної розмірності й різних характеристичних чисел.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у вивченні розв'язків системи вигляду (1), коли головна матриця є нескінченною клітиною Жордана або інші випадки дискретного спектру.

**Конфлікт інтересів і етика.** Мар'яна Ковтонюк є членом редколегії даного журналу. Для уникнення конфлікту інтересів, рукопис пройшов відповідну процедуру рецензування незалежними рецензентами, а прийняття рішення про публікацію здійснювалося незалежним редактором. Автори також заявляють про повне дотримання всіх правил етики журнальних досліджень.

**Подяки.** Робота виконана без спеціального фінансування.

### Список використаних джерел

1. Євтухов В. М. Асимптотичні подання правильних розв'язків однієї двовимірної системи диференціальних рівнянь. *Доповіді НАН України*. 2002. № 4. С. 11–17.
2. Ковтонюк М.М. Асимптотичні формули для розв'язків нескінченних систем лінійних диференціальних рівнянь: дис. кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. Київ, 1985. 120 с.
3. Ковтонюк М. М., Соя О. М. Асимптотична поведінка розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь з малими параметрами. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. 2025. Т. 2, № 2. С. 206–215. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-04>
4. Ковтонюк М. М., Соя О. М. Дослідження розв'язків зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. 2025. Т. 2, № 1. С. 24–36. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02>
5. Кочерга О. І., Яковець В. П. Асимптотика розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи. *Доповіді НАН України*. 1999. № 5. С. 34–39.
6. Перестюк М. О., Капустян О. В., Фекета П. В., Касімова Н. В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь. Київ: ВПЦ «Київський Університет», 2015. 125 с.
7. Плоткін Я. Д., Турбін А. Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної квазілінійної задачі Коші у банаховому просторі. *Український математичний журнал*. 1999. Т. 51, № 8. С. 1077–1086.
8. Шкіль М. І., Завізіон Г. В. Асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду. *Доповіді НАН України*. 2000. № 12. С. 25–29.
9. Шкіль М. І., Ковтонюк М. М. До питання про асимптотичну поведінку розв'язку однієї змішаної задачі. *Доповіді АН УРСР*, Серія А. 1981. № 11. С. 35–40.
10. Шкіль М.І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях: підручник. Київ: Вища школа, 1971. 226 с.

## Application of countable $L$ -diagonal systems of linear ordinary differential equations to the solution of select problems in mathematical physics

Marianna Kovtoniuk, Olena Soia

*Abstract.* In this paper we consider the problem of constructing asymptotic solutions of a countable  $L$ -diagonal system of linear ordinary differential equations. Based on this we construct a solution to a mixed problem for a hyperbolic partial differential equation in an unbounded cylinder and investigate its asymptotic behavior.

*Keywords:* countable  $L$ -diagonal systems of linear ordinary differential equations, mixed problem for a hyperbolic partial differential equation, asymptotic solution behavior, unbounded cylinder.

### References

1. Yevtukhov, V. M. (2002). *Asymptotic Representations of Regular Solutions of a Two-Dimensional System of Differential Equations*, *Dopovidi NAN Ukrainy*, **4**, 11–17. [in Ukrainian]
2. Kovtoniuk M. M. (1985). *Asymptotic formulas for solutions of infinite systems of linear differential equations*: Candidate of Physical and Mathematical Sciences dissertation, Kyiv. [in Ukrainian]
3. Kovtoniuk M. M., Soia O. M. (2025). *Asymptotic behavior of solutions of a countable system of linear differential equations with small parameters*, *Matematyka, informatyka, fizyka: nauka ta osvita*, **2** (2), 206–215. <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-04> [in Ukrainian]
4. Kovtoniuk M. M., Soia O. M. (2025). *Investigation of solutions of the countable system of second-order differential equations with small parameter of fractional rank*, *Matematyka, informatyka, fizyka: nauka ta osvita*, **2** (1), 24–36. <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02> [in Ukrainian]
5. Kocherha, O. I., Yakovets, V. P. (1999). *Asymptotic Behavior of Solutions to a Countable System of Linear Differential Equations with Small Parameters*, *Dopovidi NAN Ukrainy*, **5**, 34–39. [in Ukrainian]
6. Perestiuk, M. O., Kapustian, O. V., Feketa, P. V., Kasimova, N. V. (2015). *Asymptotic Properties of Solutions of Differential Equations: A Textbook*, Kyiv University, Kyiv. [in Ukrainian]
7. Plotkin, Ya. D., Turbin, A. F. (1999). *Asymptotic Integration of a Singularly Perturbed Quasilinear Cauchy Problem in a Banach Space*, *Ukrainskyi matematychnyi zhurnal*, **51** (8), 1077–1086. [in Ukrainian]
8. Shkil, M. I., Zavizion, H. V. (2000). *Asymptotic Diagonalization of a Singularly Perturbed System of Differential Equations with a Regular Singularity*, *Dopovidi NAN Ukrainy*, **12**, 25–29. [in Ukrainian]
9. Shkil, M. I., Kovtoniuk, M. M. (1981). *On the Asymptotic Behavior of the Solution to a Mixed Problem*, *Dopovidi AN URSS, Ser. A*, **11**, 35–40. [in Ukrainian]
10. Shkil, M. I. (1971). *Asymptotic Methods in Differential Equations: A Textbook*, Vyshcha shkola, Kyiv. [in Ukrainian]

### Про авторів / About the authors

**Мар'яна Ковтонюк**, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет, вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

**Mariana Kovtoniuk**, Doctor of Sciences in Pedagogy, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine;

**Олена Соя**, кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, вул. Острозько, 32, м. Вінниця, 21001, Україна;

**Olena Soia**, Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, 32 Ostrozkyi Str., Vinnytsia 21001, Ukraine.

Отримано / Received 30.03.2026  
Прийнято до друку / Accepted 29.04.2026  
Опубліковано / Published 27.05.2026

UDC 512.548.7

## SAC loops and loops of order five

Fedir Sokhatsky

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,

Department of Algebra, Lviv, Ukraine

fmsokha@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0003-4969-5651>

---

*Abstract.* In this article, we continue the analytical research loops of small orders. Namely, we investigate loops of order 5. Recall that an element of a loop is called *unipotent* if its square is the neutral element. A loop is called *unipotent* if all its elements are unipotent. It is well known that there are six loops of order 5 up to isomorphism relation. One of these loops is a semisymmetric anticommutative loop (SAC loop). The following property is true: “*If a unipotent loop is isotopic to an SAC loop, then the components of the isotopism coincide, so the loops are isomorphic.*” Since any SAC loop is unipotent, any isotopism (autotopism) is an isomorphism (respectively, an automorphism) in the class of SAC loops. This property allowed us to describe the isomorphism relation on the isotopes of the SAC loop. As a corollary, we obtain a complete classification of loops of order 5 and their automorphism groups. In addition, we managed to solve the recognition problem for all six loops of order 5. For example, a loop of order 5 is isomorphic to: 1) the group if and only if the squares of all elements are pairwise distinct; 2) SAC loop if and only if it has at least three unipotents.

*Keywords:* quasigroup, loop, isotope, SAC loop, loops of small orders, loop of order 5.

---

### 1. Introduction

Despite the growing use of Latin squares, in particular in such relatively new areas as information coding and encryption, their research is mainly carried out by computer methods and mainly combinatorial properties are studied. And the results of such research are quantitative characteristics and some construction methods [1, 2]. Systematic analytical research of small-order quasigroups is almost missing. So, for example, it is known that the set of loops of order 5 are divided into 6 isomorphism classes and 5 of them are isotopic to each other, but it is not known to which algebraic classes of loops they belong.

This article is devoted to the systematic study of loops of order 5. In the class of SAC loops, a property holds that is very similar to the corresponding property in the variety of groups: “If a unipotent loop is isotopic to an SAC loop, then the components of the isotopy coincide, so the loops are isomorphic.” Recall that an element of a loop is called a unipotent if its square is the neutral element. A loop is called unipotent if all its elements are unipotent. Since any SAC loop is unipotent, in the class of SAC loops any isotopism (autotopism) is an isomorphism (respectively, an automorphism) (Theorem 8). This property allowed us to describe the isomorphism relation on the isotopes of any SAC loop (Lemma 10). If the group of automorphisms of an SAC loop is transitive on the set of pairs of distinct nonzero elements, then the isotopes of the SAC loop are divided into 5 subsets by the isomorphy relation (Theorem 11). Since all nonassociative loops of order 5 are isotopic to an SAC loop, we obtain a complete classification of loops of order 5 and a description of their automorphism groups (Theorem 14). In addition, we managed to solve the recognition problem for all six loops of order 5. For example, a 5-order loop is isomorphic to the group  $\mathbb{Z}_5$  if and only if the squares of all elements are pairwise distinct. These results were reported in [6].

## 2. Preliminaries

Let  $(\cdot)$  be a binary operation defined on a set  $Q$ . The pair  $(Q; \cdot)$  is called a *quasigroup* if for all  $a$  and  $b$  in  $Q$  each of the equations

$$x \cdot a = b, \quad a \cdot y = b$$

has a unique solution. In this case, the set  $Q$  is called a *carrier set* or a *carrier*, and the operation  $(\cdot)$  is called an *invertible* or a *quasigroup operation*.

A quasigroup is called a *loop* if it has a *neutral element*, that is, an element  $e$  such that  $e \cdot x = x \cdot e = x$  for all  $x \in Q$ . The loop is also called an *e-loop* and is denoted by  $(Q; \cdot, e)$ . An element  $a$  of an *e-loop* is called: *unipotent* if  $a^2 = a \cdot a = e$ ; *right inverse* to  $b$  if  $b \cdot a = e$ . An element  $a$  of a quasigroup is called *idempotent* if  $a^2 = a \cdot a = a$ . It is clear that only the neutral element is idempotent in a loop.

**Isotopy relation.**  $S_Q$  denotes the symmetry group of the set  $Q$ , that is, the group of all bijections of the set  $Q$ . Two operations  $f$  and  $g$  defined on  $Q$  are called *isotopic* if there exist bijections  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S_Q$  such that

$$g(x, y) = \alpha_3 f(\alpha_1^{-1}(x), \alpha_2^{-1}(y))$$

for all  $x, y$  in  $Q$ , the triplet  $\bar{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  is called an *isotopism*, and  $\alpha_3$  is its *principal component*. These operations are called *isomorphic* if  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . The operation  $g$  is called the *isotope* of the operation  $f$  and is denoted by  $\bar{\alpha}f$ . Every operation that is isotopic to an invertible operation is also invertible. The equalities

$$\bar{\alpha}(\bar{\beta}f) = \bar{\alpha}\bar{\beta}f, \quad \bar{\iota}f = f, \quad \bar{\iota} := (\iota, \iota, \iota)$$

imply that the group  $S_Q^3 := S_Q \times S_Q \times S_Q$  and the group  $S_Q$  act on the set of all binary operations and on the subset  $\Delta$  of all invertible binary operations defined on  $Q$ . Therefore, the sets of all autotopisms  $\text{Autt}(f)$  and the sets of all automorphisms  $\text{Aut}(f)$  of an operation  $f$  are its stabilizers under these actions and therefore they are subgroups of the groups  $S_Q^3$  and  $S_Q$ , respectively. The cardinal  $m := |Q|$  is called *order* of  $f$  where  $Q$  is its carrier. If the order is finite, then the carrier is denoted by  $Z_m := \{0, 1, \dots, m-1\}$  and  $\mathbb{Z}_m := (Z_m; +, 0)$  denotes the group of integers modulo  $m$ .

**Lemma 1.** 1. Every loop  $(Q; *, e)$  of order  $m$  is isomorphic to some loop  $(Z_m; \star, 0)$ :

$$x \star y := \varphi(\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y)),$$

where  $\varphi : Q \rightarrow Z_m$  is an arbitrary bijection with the property  $\varphi(e) = 0$ .

2. Every quasigroup  $(Q; \star)$  is isotopic to some loop  $(Q; \bullet, a \star b)$ , where

$$x \bullet y := \rho_b^{-1}(x) \star \lambda_a^{-1}(y),$$

where  $\lambda_0(x) := 0 \star x$ ,  $\rho_b(x) := x \star b$ .

*Proof.* It is easy to verify. □

Therefore, considering loops of order  $m$  up to isomorphism, it suffices to consider 0-loops on the set  $Z_m$ .

Let us highlight a well-known trivial statement which is well known as a corollary of Albert's theorem.

**Lemma 2.** Every loop isotopic to a group is isomorphic to it. Every isotopism  $(\alpha, \beta, \gamma)$  of a loop  $(A; *, 0)$  on a commutative group  $(B; +, e)$  has the form

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (R_a\theta, R_b\theta, R_{a+b}\theta)$$

for some elements  $a, b$  of the group  $(B; +, e)$  and an isomorphism  $\theta$  of the loop on the group, where  $R_a(x) := x + a$ .

*Proof.* Let  $(\alpha, \beta, \gamma)$  be an isotopism of a loop  $(A; *, e)$  onto a commutative group  $(B; +, 0)$ , i.e.

$$\alpha(x) + \beta(y) = \gamma(x * y). \tag{1}$$

Denote  $a := \alpha(e)$ ,  $b := \beta(e)$ ,  $c := \gamma(e)$ , then  $a + b = c$ . Let's define

$$\theta_1(x) := -c + \alpha(x) + b, \quad \theta_2(y) := -b + \beta(y), \quad \theta(x) := -c + \gamma(x).$$

Substituting the relations in (1) we obtain  $\theta_1(x) + \theta_2(y) = \theta(x * y)$ . Therefore,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , because  $\theta_1(e) = \theta_2(e) = \theta(e) = 0$  and so  $\theta$  is an isomorphism. □

**Theorem 3** ([2]). There exist exactly two loops of order 5 up to isotopy.

**Theorem 4.** Every loop of order  $m = 2, 3, 4$  is isomorphic to one of the following group  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_4$ . A loop of order 4 is isomorphic to  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  if and only if it is unipotent.

Quasigroups of order 4 are described in [5, 7].

**Theorem 5** ([4]). If  $Q$  is a quasigroup of order  $m$  and  $P$  is its proper subquasigroup of order  $k$ , then  $2k \leq m$ .

### 3. SAC loops

In this section, we introduce the concept of SAC loops and study some of their properties that allow us to analytically describe all loops of order 5.

**Definition 6.** A loop  $(Q; \circ, 0)$  is called:

- *semisymmetric* if it satisfies the identity  $x \circ (y \circ x) = y$  or the equivalent identity  $(x \circ y) \circ x = y$ ;
- *anticommutative* if for all distinct nonzero elements  $x \circ y \neq y \circ x$  holds. In other words, if it satisfies the condition

$$x \circ y = y \circ x \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0 \vee x = y);$$

- *SAC loop* if it is semisymmetric and anticommutative. We will denote the SAC loop of order  $m$  by  $\mathbb{L}_m$  or  $\mathbb{L}$ .

Let  $\mathbb{L} := (Q; \circ, 0)$  be an SAC loop and  $a, b \in Q$ , then the quasigroup defined by

$$x \underset{ab}{\Delta} y := (b \circ x) \circ (y \circ a) \quad (2)$$

is called  $(a, b)$ -loop and denoted it by  $(Q; \underset{(a,b)}{\Delta}, a \circ b)$ . If there is no misunderstanding, we will simplify the notation and write  $ab$ -loop and  $(Q; \underset{ab}{\Delta}, a \circ b)$ , respectively. The neutral element in this loop is  $a \circ b$ . Indeed,

$$\begin{aligned} (a \circ b) \underset{ab}{\Delta} y &= (b \circ (a \circ b)) \circ (y \circ a) = a \circ (y \circ a) = y, \\ x \underset{ab}{\Delta} (a \circ b) &= (b \circ x) \circ ((a \circ b) \circ a) = (b \circ x) \circ b = x. \end{aligned}$$

The defining identities

$$x \circ (y \circ x) = y \quad \text{and} \quad (x \circ y) \circ x = y$$

of semisymmetric loops can be written as  $L_x R_x = \iota$  and  $R_x L_x = \iota$ , i.e.

$$L_x^{-1} = R_x \quad \text{and} \quad R_x^{-1} = L_x.$$

Hence, each translation of a semisymmetric loop has only two directions [8, 9].

Every semisymmetric loop is unipotent. Indeed, if  $y = 0$ , then  $x \circ x = 0$ . In other terminology [3], it is a three-sided loop, i.e. its neutral element is left, right and middle neutral. Therefore, all parastrophes of a unipotent loop are loops with the same neutral element.

**3.1. Isotopes of SAC loops.** It is well known that any loop that is isotopic to a group is also a group that is isomorphic to that group. Here, in Theorem 8, we prove a similar property for SA-loops.

**Lemma 7.** *Let  $(\alpha, \beta, \theta)$  be an isotopism of some  $e$ -loop onto the SAC loop  $(Q; \circ, 0)$ . Then  $\alpha = L_b \theta$ ,  $\beta = R_a \theta$ , where  $a := \alpha(e)$  and  $b := \beta(e)$ .*

*Proof.* Let  $(\alpha, \beta, \theta)$  be an isotopism of the loop  $(A; *, e)$  onto the SAC loop  $(Q; \circ, 0)$ , i.e.

$$\alpha(x) \circ \beta(y) = \theta(x * y) \quad (3)$$

for all  $x, y$  in  $A$ . The equality  $a \circ b = \theta(e)$  follows from (3) for  $x = y = e$ . Substituting  $y = e$  and  $x = e$  in turn, we obtain

$$\alpha = R_b^{-1} \theta = L_b \theta, \quad \beta = L_a^{-1} \theta = R_a \theta. \quad (4)$$

□

**Theorem 8.** *Any isotopism of a unipotent loop onto an SAC loop is an isomorphism.*

*Proof.* Let  $(\alpha, \beta, \theta)$  be an isotopism of some unipotent loop  $(A; *, e)$  onto an SAC loop  $\mathbb{L} := (Q; \circ, 0)$ , i.e. the equality (3) holds. By Lemma 7 we obtain

$$L_b \theta(x) \circ R_a \theta(y) = \theta(x * y).$$

Replace  $x$  with  $\theta^{-1}(x)$  and  $y$  with  $\theta^{-1}(y)$ :

$$(b \circ x) \circ (y \circ a) = \theta(\theta^{-1}(x) * \theta^{-1}(y)). \quad (5)$$

Since the loop  $(A; *, e)$  is unipotent, i.e.  $u * u = e$  for all  $u$ ,

$$\theta(\theta^{-1}(x) * \theta^{-1}(x)) = \theta(e) = \theta(e * e) \stackrel{(3)}{=} \alpha(e) \circ \beta(e) = a \circ b.$$

Therefore, the equality (5) for  $x = y$  can be written as

$$(b \circ x) \circ (x \circ a) = a \circ b. \quad (6)$$

If  $x = 0$ , then  $b \circ a = a \circ b$ . As the loop  $(Q; \circ, 0)$  is anticommutative, then

$$a = 0 \quad \vee \quad b = 0 \quad \vee \quad a = b.$$

For each of these cases, (6) can be written as

$$(b \circ x) \circ x = b \quad \vee \quad x \circ (x \circ a) = a \quad \vee \quad (a \circ x) \circ (x \circ a) = 0,$$

respectively. Using the operation  $(\circ)$ , we apply: 1) the element  $x$  on the left to the first equality; 2) the element  $x$  from the right of the second equality; and 3) the element  $a \circ x$  from the right of the third equality:

$$x \circ ((b \circ x) \circ x) = x \circ b \quad \vee \quad (x \circ (x \circ a)) \circ x = a \circ x \quad \vee \quad ((a \circ x) \circ (x \circ a)) \circ (a \circ x) = a \circ x.$$

Since the loop  $\mathbb{L}$  is semisymmetric,

$$b \circ x = x \circ b \quad \vee \quad x \circ a = a \circ x \quad \vee \quad x \circ a = a \circ x.$$

The value of the variable  $x$  can be chosen in such a way that  $x \notin \{0, a, b\}$ . Therefore, from the first equality it follows that  $b = 0$ , and from the second and third  $a = 0$ . Therefore, each of these three cases leads to the equalities  $a = b = 0$  and therefore the equalities  $\alpha = L_b\theta$ ,  $\beta = R_a\theta$  lead to  $\alpha = \beta = \theta$ , i.e. the isotopism  $(\alpha, \beta, \theta)$  is an isomorphism.  $\square$

**Corollary 9.** *Any autotopism of an SAC loop is its automorphism.*

*Proof.* Each SAC loop is unipotent therefore by Theorem 8, any autotopism of an SAC loop is its automorphism.  $\square$

**3.2. Isomorphy relation on SAC loops.** In this subsection we will give a complete analytical description of the isomorphy relation on loops order 5 using only the fact that they are divided into two isotopy classes. First, we prove the following lemma.

**Lemma 10.** *Let  $\mathbb{L} := (Q; \circ, 0)$  be an SAC loop. Then*

- (1) *every loop isotopic to a loop  $\mathbb{L}$  is isomorphic to some  $ab$ -loop;*
- (2) *the triplet  $(\alpha, \beta, \theta)$  is an autotopism of the  $ab$ -loop if and only if  $\theta$  is an automorphism of the loop  $\mathbb{L}$  and  $\alpha = R_b\theta L_b$ ,  $\beta = L_a\theta R_a$ ;*
- (3) *the bijection  $\theta$  of the set  $Q$  is an isomorphism of the operations  $\Delta_{ab}$  and  $\Delta_{a'b'}$  if and only if  $a' = \theta(a)$  and  $b' = \theta(b)$ ;*
- (4) *the bijection  $\theta$  of the set  $Q$  is an automorphism of the operation  $\Delta_{ab}$  if and only if  $\theta(a) = a$  and  $\theta(b) = b$ .*

*Proof.* **1.** Let a loop  $(A; *, e)$  be isotopic to the SAC loop  $\mathbb{L}$ . It means that there exist bijections  $\alpha, \beta, \theta$  of the set  $A$  onto the set  $Q$  such that the equality (3) holds. Using Lemma 7, we obtain (5), and taking into account notations (2), we have

$$x \Delta_{ab} y = \theta(\theta^{-1}(x) * \theta^{-1}(y)), \quad \text{i.e.} \quad \theta(x) \Delta_{ab} \theta(y) = \theta(x * y)$$

for all  $x, y$  in  $Q$ . Therefore,  $\theta$  is an isomorphism of the loops  $(A; *, e)$  and  $(Q; \Delta_{ab}, a \circ b)$ .

Let the triplet of bijections  $\alpha, \beta, \theta$  of the set  $Q$  be an isotopism of the operations  $\Delta_{ab}$  and  $\Delta_{a'b'}$ , i.e.

$$\theta \left( x \underset{ab}{\Delta} y \right) = \alpha(x) \underset{a'b'}{\Delta} \beta(y)$$

for all  $x, y \in Q$ . Using the equality (2), we have

$$\theta(L_b(x) \circ R_a(y)) = L_{b'}\alpha(x) \circ R_{a'}\beta(y).$$

Replacing  $x$  with  $L_b^{-1}(x)$  and  $y$  with  $R_a^{-1}(y)$ , we obtain

$$\theta(x \circ y) = L_{b'}\alpha L_b^{-1}(x) \circ R_{a'}\beta R_a^{-1}(y).$$

Hence,  $(L_{b'}\alpha L_b^{-1}, R_{a'}\beta R_a^{-1}, \theta)$  is an autotopism of the SAC loop  $\mathbb{L}$ . By Theorem 8

$$L_{b'}\alpha L_b^{-1} = R_{a'}\beta R_a^{-1} = \theta. \quad (7)$$

Therefore,  $\theta$  is an automorphism of the SAC loop  $\mathbb{L}$ .

**2.** If the triplet  $(\alpha, \beta, \theta)$  is an autotopism of the operation  $\Delta_{ab}$ , then for  $a' = a$  and  $b' = b$  we obtain

$$\alpha = L_b^{-1}\theta L_b = R_b\theta L_b, \quad \beta = R_a^{-1}\theta R_a = L_a\theta R_a.$$

**3.** If the triplet  $(\alpha, \beta, \theta)$  is an isomorphism of the operations  $\Delta_{a'b'}$  and  $\Delta_{ab}$ , then  $\alpha = \beta = \theta$  and (7) implies

$$\theta = L_{b'}\theta L_b^{-1} = L_{b'}L_{\theta(b)}^{-1}\theta, \quad \theta = R_{a'}\theta R_a^{-1} = R_{a'}R_{\theta(a)}^{-1}\theta.$$

Therefore,  $L_{b'} = L_{\theta(b)}$ ,  $R_{a'} = R_{\theta(a)}$ , which is equivalent to  $b' = \theta(b)$ ,  $a' = \theta(a)$ .

**4.** It follows from **3.** when  $a' = a$  and  $b' = b$ . □

**Theorem 11.** *If the automorphism group of an SAC loop  $(Q; \circ, 0)$  is transitive on the set of pairs of distinct nonzero elements, then every loop that is isotopic to  $(Q; \circ, 0)$  is isomorphic to exactly one of the following loops:*

$$(Q; \circ, 0), \quad (Q; \underset{01}{\Delta}, 1), \quad (Q; \underset{10}{\Delta}, 1), \quad (Q; \underset{11}{\Delta}, 0), \quad (Q; \underset{23}{\Delta}, 2 \circ 3).$$

*Proof.* If the automorphism group  $Aut(\circ)$  of the SAC loop  $(Q; \circ, 0)$  is transitive on the set of pairs of distinct nonzero elements, then the action of the group  $Aut(\circ)$  on the set  $Q^2$  has five orbits:

$$\begin{aligned} \{(0, 0)\}, \quad \{(0, y) \mid y \neq 0\}, \quad \{(x, 0) \mid x \neq 0\}, \\ \{(x, x) \mid x \neq 0\}, \quad \{(x, y) \mid 0 \neq x \neq y \neq 0\}. \end{aligned}$$

A set of representatives of these orbits are the pairs  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 3)$ . It remains to use item 3 of Lemma 10. □

## 4. Loops of order five

Each semisymmetric loop is unipotent since  $x \circ x = x \circ (0 \circ x) = 0$ . Formally speaking, the smallest order of an SAC loop is 2. We call this case degenerate.

**4.1. Elementary properties.** In this subsection, we prove some elementary properties of loops of order 5.

**Lemma 12.** *The smallest order of a nondegenerate SAC loop is 5. The loop  $\mathbb{L}_5 := (Z_5; \circ, 0)$ , where*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 \circ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\
 \hline
 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\
 \hline
 3 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \\
 \hline
 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\
 \hline
 \end{array} \tag{8}$$

is an SAC loop.

*Proof.* Theorem 4 implies that the loops of the order 2 and 3 are commutative and therefore they are not SAC loops. It is easy to verify that the loop  $\mathbb{L}_5$  is anticommutative and satisfies the identity  $x \circ (y \circ x) = y$ .  $\square$

Let  $\mathbb{L}_5 := (Z_5; \circ, 0)$  denote the SAC loop given in (8),  $L_a(x) := a \circ x$ ,  $R_a(x) := x \circ a$  and  $S'_4$  ( $A'_4$ ) denotes a symmetric (alternating) group of degree 4, i.e. the group of all (respectively, even) bijections of the set  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Before giving a final theorem in which we describe the basic concepts in each loop of order 5, we prove the following statement.

**Lemma 13.** *If  $a, b$  are distinct nonzero elements of the loop  $\mathbb{L}_5$ , then*

- (1)  $Z_5 = \{0, a, b, a \circ b, b \circ a\}$ ;
- (2)  $a \circ (a \circ b) = b \circ a$ ;
- (3)  $(a \circ b) \circ (b \circ a) = a$ .

*Proof.* By the condition, the elements  $0, a, b$  are distinct; by the definition of the SAC loop,  $a \circ b \neq b \circ a$ . Suppose  $b \circ a = 0$  or  $a \circ b = 0$ , but  $a \circ a = 0$ , therefore  $b = 0$ . A contradiction. So,  $b \circ a \neq 0$  and  $a \circ b \neq 0$ . Finally,  $b \neq a \circ b \neq a$  since  $a \circ 0 = a$  and  $0 \circ b = b$ .

The element  $a \circ (a \circ b)$  is not equal to any of the elements  $0, a, b, a \circ b$ , therefore  $a \circ (a \circ b) = b \circ a$  by item 1. To obtain item 3, we multiply the equality  $a \circ (a \circ b) = b \circ a$  by  $a \circ b$  on the left and use the semisymmetry identity.  $\square$

**Theorem 14.** *Let  $\mathbb{L}_5 := (Z_5; \circ, 0)$  be the SAC loop given in (8). The following statements are true:*

- (1) every autotopism of  $\mathbb{L}_5$  is its automorphism, namely,

$$\text{Aut } \mathbb{L}_5 = \{\theta_{ab} \mid a \neq b, a, b = 1, 2, 3, 4\} = A'_4, \tag{9}$$

$$\text{where } \theta_{ab} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & b & a \circ b & b \circ a \end{pmatrix}; \tag{10}$$

- (2) every loop of order 5 is isomorphic to exactly one of the following loops:

$$\mathbb{L}_5, \quad (Z_5; \underset{01}{\Delta}, 1), \quad (Z_5; \underset{10}{\Delta}, 1), \quad (Z_5; \underset{11}{\Delta}, 0), \quad (Z_5; \underset{23}{\Delta}, 1), \quad Z_5. \tag{11}$$

- (3) the autotopism group of the loop  $(Q; \underset{ab}{\Delta})$ , where  $ab \in \{01, 10, 11, 23\}$ , is

$$\text{Autt}(\underset{ab}{\Delta}) = \{(R_b \theta L_b; R_a \theta L_a; \theta) \mid \theta \in \text{Aut } \mathbb{L}_5\} \simeq A'_4;$$

- (4) the automorphism group of the loop  $(Z_5; \underset{23}{\Delta}, 1)$  is trivial:  $\text{Aut}(\underset{23}{\Delta}) = \{\iota\}$ ;

(5) the automorphism group of the loop  $(Q; \Delta)_{ab}$ , where  $ab \in \{01, 10, 11\}$ , is

$$\text{Aut}(\Delta)_{ab} = \{\iota, (234), (243)\} \simeq A'_3;$$

(6) each autotopism  $(\alpha, \beta, \gamma)$  of the group  $\mathbb{Z}_5$  has the form

$$\alpha(x) = kx + a, \quad \beta(x) = kx + b, \quad \gamma(x) = kx + a + b.$$

The group of autotopisms is a subgroup of the group  $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ , where  $\mathcal{L}$  denotes the group of linear transformations of the field  $\mathbb{Z}_5$ .

(7) Each loop of order 5 has only trivial normal subloops, i.e. they are simple loops; each proper subloop of a loops is a subloops generated by a nonzero unipotent.

*Proof.* (1). Theorem 8 implies that every autotopism of an SAC loop is its automorphism. Suppose that  $\varphi$  is an automorphism of the loop  $\mathbb{L}_5$  and let  $a := \varphi(1)$  and  $b := \varphi(2)$ , then

$$\varphi(3) \stackrel{(8)}{=} \varphi(1 \circ 2) = \varphi(1) \circ \varphi(2) = a \circ b,$$

$$\varphi(4) \stackrel{(8)}{=} \varphi(2 \circ 1) = \varphi(2) \circ \varphi(1) = b \circ a.$$

Therefore, every automorphism can be represented in the form (10).

Vice versa, let a transformation  $\theta_{ab}$  be defined by the equality (10) for some distinct nonzero elements  $a$  and  $b$  of the loop  $\mathbb{L}_5$ . Lemma 13 implies that  $\theta_{ab}$  is a bijection of the set  $Z_5$ . Let us prove that

$$\theta_{ab}(x \circ y) = \theta_{ab}(x) \circ \theta_{ab}(y) \tag{12}$$

is true for all  $x, y$  in  $Z_5$ . In the cases  $x = 0, y = 0, x = y$  the equality (12) is obvious.

Consider the case  $x = 1$ . The equality (12) can be written as follows:

$$\theta_{ab}(1 \circ y) = a \circ \theta_{ab}(y).$$

If  $y = 2$ , then the equality is  $a \circ b = a \circ b$ . If  $y = 3$ , then we have the equality  $b \circ a = a \circ (a \circ b)$  which is proved in item 2 of Lemma 13. If  $y = 4$ , then we get  $b = a \circ (b \circ a)$ , which follows from the identity  $x \circ (y \circ x) = y$ .

In the cases  $x = 2, x = 3$  and  $x = 4$ , the equality (12) can be written as:

$$\theta_{ab}(2 \circ y) = b \circ \theta_{ab}(y), \quad \theta_{ab}(3 \circ z) = (a \circ b) \circ \theta_{ab}(z), \quad \theta_{ab}(4 \circ u) = (b \circ a) \circ \theta_{ab}(u).$$

Let us consider only the non-obvious cases: if  $y = 1$ , then  $a \circ b = b \circ (b \circ a)$ ; if  $z = 2$ , then  $b \circ a = (a \circ b) \circ b$ ; if  $u = 3$ , then  $b = (b \circ a) \circ (a \circ b)$ . All these items are proved in the Lemma 13. Hence, the transformation  $\theta_{ab}$  is an automorphism of  $\mathbb{L}_5$ .

Therefore, the loop  $\mathbb{L}_5$  has as many automorphisms as there are pairs of nonzero elements, i.e. 12. There is only one subgroup in the group  $S'_4$  with 12 elements. Hence,  $\text{Aut } \mathbb{L}_5 = A'_4$ .

(2). Theorem 3 implies that every loop is isotopic to either the group  $\mathbb{Z}_5$  or the SAC loop  $\mathbb{L}_5$ . If a loop is isotopic to a group, then it is isomorphic to it, therefore it is a group (Lemma 2). Consequently, all nonassociative loops of order 5 are isotopic to SAC loop  $\mathbb{L}_5$ .

From the just proved item 1) it follows that for any distinct nonzero elements  $a, b \in Z_5$  the automorphism  $\theta_{ab}$  maps the pair (1,2) to an arbitrary pair  $(a, b)$  of distinct non-zero elements. Therefore, the automorphism  $\theta_{cd}\theta_{ab}^{-1}$  maps the pair  $(a, b)$  to the pair  $(c, d)$ . It means that the automorphism group  $\text{Aut } \mathbb{L}_5$  is transitive on the set of all pairs of distinct nonzero elements of the set  $Z_5$ . By Theorem 11, every nonassociative loop is isomorphic to exactly one of the specified loops, except  $\mathbb{Z}_5$ .

(3). Item 2 of Lemma 10.

(4). According to item 4 of Lemma 10, the automorphism of the operation  $\Delta_{23}$  is the bijection  $\varphi$  which satisfies the conditions  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(2) = 2$ ,  $\varphi(3) = 3$ . Consequently,  $\varphi(1) = \varphi(2 \circ 3) = \varphi(2) \circ \varphi(3) = 2 \circ 3 = 1$ . Hence,  $\varphi = \iota$  and

$$\text{Aut} \left( \Delta_{23} \right) = \{ \iota \}.$$

(5). The general form of the automorphism  $\theta$  of the operations  $\Delta_{01}$ ,  $\Delta_{10}$ ,  $\Delta_{11}$  is

$$\varphi = \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 1 & x & 1 \circ x & x \circ 1 & \end{array} \right), \quad x = 2, 3, 4.$$

Therefore,

$$\text{Aut} \left( \Delta_{01} \right) = \text{Aut} \left( \Delta_{10} \right) = \text{Aut} \left( \Delta_{11} \right) = \{ \iota, (234), (243) \}.$$

(6). It follows from Lemma 2.

(7). Since the order of the normal subloop divides the order of the loop, the loop of order 5 has only trivial normal subloops  $\{0\}$  and  $Z_5$ . Since the order of its own subquasigroup does not exceed half the order of the quasigroup (Theorem 5), the only proper subloops of loops of order 5 are subloops generated by unipotents.  $\square$

**4.2. Recognition of loops of order 5.** In this subsection, we find a criterion for each of the six loops (11).

**Theorem 15.** *An arbitrary loop of order 5 is isomorphic to:*

- (1) *the group if and only if the squares of all elements are pairwise different;*
- (2) *a loop-23 if and only if it has exactly one unipotent and the squares of some other elements coincide;*
- (3) *the loop-11 if and only if it has exactly two unipotents and the squares of some other elements coincide;*
- (4) *the loop-01 if and only if it has exactly two unipotents, the squares of the other elements are pairwise different and the right inverse of some element is its square;*
- (5) *the loop-10 if and only if it has exactly two unipotents, the squares of the other elements are pairwise different, and the right inverse of some nonunipotent is not its square;*
- (6) *the SAC loop if and only if it has at least three unipotents.*

*Proof.* Recall that an element of a loop is called *unipotent* if its square is the unit of the loop. All unipotents is on the main diagonal of the respective Latin square. It is obvious that the number of equal squares (in particular, unipotents) and so distinct squares in a finite loop are

invariant under any isomorphism. The table

unit	square	0	1	2	3	4	the number of unipotents	the number of distinct squares
0	$x + x$	0	2	4	1	3	1	5
1	$x \triangle_{23} x$	4	1	4	4	0	1	3
0	$x \triangle_{11} x$	0	0	1	1	1	2	3
1	$x \triangle_{01} x$	1	1	4	2	3	2	4
1	$x \triangle_{10} x$	1	1	3	4	2	2	4
0	$x \circ x$	0	0	0	0	0	5	1

and the equalities

$$2 \triangle_{01} 2^2 = (1 \circ 2) \circ 4 = 3 \circ 4 = 1, \quad 3 \triangle_{01} 3^2 = (1 \circ 3) \circ 2 = 4 \circ 2 = 1, \quad 4 \triangle_{01} 4^2 = (1 \circ 4) \circ 3 = 2 \circ 3 = 1,$$

$$2 \triangle_{10} 2^2 = 2 \circ (3 \circ 1) = 2 \circ 2 = 0, \quad 3 \triangle_{10} 3^2 = 3 \circ (4 \circ 1) = 3 \circ 3 = 0, \quad 4 \triangle_{10} 4^2 = 4 \circ (2 \circ 1) = 4 \circ 4 = 0.$$

imply that each of these six operations (11) satisfies exactly one of the conditions given in items (1)–(6).

For example, let consider item (2). Two operations have exactly one unipotent + and  $\triangle_{23}$ , but the sequence all squares of + are repetition-free and  $0 \triangle_{23} 0 = 4 = 2 \triangle_{23} 2$ . Therefore, the condition of item 2 uniquely defines the operation  $\triangle_{23}$ .

Now, consider item (4). There are two operations which have exactly two unipotents and the squares of the other elements are pairwise different. Those operations are  $\triangle_{01}$  and  $\triangle_{10}$ . Moreover, the right inverse to 2 is  $2^2$ :  $2 \triangle_{01} 2^2 = 1$  and none of  $2^2, 3^2, 4^2$  is the right inverse respectively to 2, 3, 4 under the operation  $\triangle_{10}$ .  $\square$

**Corollary 16.** *Let  $(Q; \diamond)$  be a quasigroup of order 5 and  $u$  be its arbitrary element. Then  $(Q; \diamond)$  is a group isotope if and only if the mapping  $\gamma_u$  defined by  $\gamma_u(x) := R_u^{-1}(x) \diamond L_u^{-1}(x)$  is a bijection of the set  $Q$ .*

*Proof.* Every quasigroup is isotopic to a loop of the same order (Lemma 1). Theorem 15 implies that every loop is isotopic to either a group or SAC loop.

Since a loop isotopic to a group is also isomorphic to it (Lemma 2), the group and the SA-loop are not isotopic. Lemma 1 implies that the quasigroup  $(Q; \bullet)$ , where

$$x \bullet y := R_u^{-1}(x) \diamond L_u^{-1}(y), \quad L_u(x) := u \diamond x, \quad R_u(y) := y \diamond u,$$

is a loop with neutral element  $u \diamond u$ . In this loop, the square of the element  $x$  is equal to  $x \bullet x = \gamma_u(x)$ . According to Theorem 15, a loop is a group if and only if the squares of all elements are pairwise distinct, i.e.  $\gamma_u$  is a bijection of the set  $Q$ .  $\square$

**4.3. Some applications of Theorem 15.** Consider the quasigroups  $(Z_5; *, 2)$ ,  $(Q; \diamond)$  and  $(Z_5; \otimes)$  which are defined by the following Cayley tables:

*	0	1	2	3	4
0	4	2	0	1	3
1	3	0	1	4	2
2	0	1	2	3	4
3	1	4	3	2	0
4	2	3	4	0	1

$\diamond$	a	b	c	d	e
a	b	c	a	e	d
c	a	e	d	c	b
b	c	d	b	a	e
e	d	a	e	b	c
d	e	b	c	d	a

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	4	3	0	1	2
1	2	1	3	4	0
2	3	2	4	0	1
3	1	0	2	3	4
4	0	4	1	2	3

**Example 1.** To which loop the loop  $(Z_5; *, 2)$  is isomorphic?

From the Cayley table, it follows that the neutral element of the loop  $(Z_5; *, 2)$  is 2, therefore only 2 and 3 are unipotents:  $2 * 2 = 2$  and  $3 * 3 = 2$ . The squares of the elements 0, 1, 4 are respectively equal to 4, 0, 1, therefore they are pairwise distinct. The right inverse of 0 is not its square. Indeed, the element  $4 = 0 * 0$  and  $0 * 4 \neq 2$ . Hence, the loop  $(Z_5; *, 2)$  is isomorphic to the 10-loop.

**Example 2.** To which loop is isotopic the quasigroup  $(Q; \diamond)$ ?

We use Corollary 16. Consider the case  $u = a$ , then

$$R_a = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix}, \quad L_a = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & a & e & d \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_a(a) = R_a^{-1}(a) \diamond L_a^{-1}(a) = b \diamond c = b; \quad \gamma_a(b) = R_a^{-1}(b) \diamond L_a^{-1}(b) = a \diamond a = b.$$

Since  $\gamma_a(a) = \gamma_a(b)$ , the transformation  $\gamma_a$  is not a bijection of the set  $Z_5$ . By Corollary 16, the quasigroup  $(Q; \diamond)$  is not isotopic to a group, so it is isotopic to the SAC loop.

**Example 3.** Is the quasigroup  $(Z_5; \otimes)$  a group isotope?

Again, we use Corollary 16. Let  $u = 0$ , then

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Let's find the values of the function  $\gamma_0(x) = R_0^{-1}(x) \otimes L_0^{-1}(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0(0) &= R_0^{-1}(0) \otimes L_0^{-1}(0) = 4 \otimes 2 = 1, & \gamma_0(1) &= R_0^{-1}(1) \otimes L_0^{-1}(1) = 3 \otimes 3 = 3, \\ \gamma_0(2) &= R_0^{-1}(2) \otimes L_0^{-1}(2) = 1 \otimes 4 = 0, & \gamma_0(3) &= R_0^{-1}(3) \otimes L_0^{-1}(3) = 2 \otimes 1 = 2, \\ \gamma_0(4) &= R_0^{-1}(4) \otimes L_0^{-1}(4) = 0 \otimes 0 = 4. \end{aligned}$$

The quasigroup  $(Z_5; \otimes)$  is isotopic to the group  $Z_5$ , because all values of the function  $\gamma_0$  are different.

**Conflict of interest and ethics.** The author is a member of the editorial board of this journal. To avoid a conflict of interest, the manuscript underwent an appropriate peer-review process by independent reviewers, and the decision on publication was made by an independent editor. The author also declares full adherence to all journal research ethics policies.

**Acknowledgements.** Theorem 15 of this paper has been inspired by a teaching material of Aleš Drápal in which he discusses loops of order 5. The author thanks Aleš Drápal for agreeing to use his ideas in this paper of mine. The author also declares no special funding for this work.

## References

1. Keedwell, A. D., Dénes, J. (2015). *Latin Squares and their Application* (2nd ed.), Elsevier B.V., Amsterdam. <https://doi.org/10.1016/C2014-0-03412-0>
2. McKay, B.D., Wanless, I.M. (2005). *On the Number of Latin Squares*, *Ann. Comb.*, **9**, 335–344. <https://doi.org/10.1007/s00026-005-0261-7>
3. Sokhatsky, F. M. (2016). *Parastrophic symmetry in quasigroup theory*, *Bull. of DonNU., Ser. A. Natural Sciences*, No. 1–2, 70–83.
4. Wall, D.W. (1957). *Subquasigroups of finite quasigroups*, *Pacific Journal of Mathematics*, **7** (4), 1711–1714.
5. Sokhatsky, F.M., Krainichuk, H.V., Luzhetsky, V.A. (2024). *Canonical and matrix figuration of quasigroups of the fourth order*, *Applied problems of mechanics and mathematics*, **22**, 95–105. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.15407/apmm2024.22.95-105>
6. Sokhatsky, F. (2025). *Quasigroups and loops up to order 5*, *ConfQRS-2025: Book of Abstracts* (Chisinau, July 2–4, 2025), 41–45.
7. Sokhatsky, F.M., Lutsenko, A.V., Fryz, I.V. (2024). *Construction of Quasigroups with Invertibility Properties*, *J. Math. Sci.*, **279**, 115–132. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06999-0>
8. Sokhatsky, F., Lutsenko, A. (2020). *Classification of quasigroups according to directions of translations I*, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **61** (4), 567–579. <http://dx.doi.org/10.14712/1213-7243.2021.002>
9. Sokhatsky, F., Lutsenko, A. (2021). *Classification of quasigroups according to directions of translations II*, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **62** (3), 309–323. <http://dx.doi.org/10.14712/1213-7243.2021.021>

UDC 512.548.7

## SAC лупи і лупи п'ятого порядку

Федір Сохацький

*Анотація.* У цій статті ми продовжуємо аналітичне дослідження луп малих порядків. А саме, ми досліджуємо лупи порядку 5. Нагадаємо, що елемент лупи називається *уніпотентним*, якщо його квадрат нейтральний. Лупа називається *уніпотентною*, якщо всі її елементи уніпотентні.

Одна з луп порядку 5 є напівсиметричною антикомутативною лупою (SAC-лупа). Виконується така властивість: «Якщо уніпотентна лупа ізотопна SAC-лупі, то компоненти ізотопії збігаються, отже, лупи ізоморфні». Оскільки будь-яка SAC-лупа є уніпотентною, то будь-який ізотопізм (автотопізм) є ізоморфізмом (відповідно, автоморфізмом) у класі SAC-луп. Ця властивість дозволила нам описати відношення ізоморфізму на ізотопах SAC-лупи. Як наслідок ми отримуємо повну класифікацію луп порядку 5 та кожну з їхніх груп автоморфізмів. Крім того, нам вдалося вирішити проблему розпізнавання для всіх шести луп порядку 5. Наприклад, лупа порядку 5 ізоморфна: 1) групі тоді і тільки тоді, коли квадрати всіх її елементів попарно різні; SAC лупі тоді і тільки тоді, коли вона має принаймні три уніпотенти.

*Ключові слова:* квазігрупа, лупа, ізотоп, SAC лупа, квазігрупи малих порядків, лупи малих порядків, лупа порядку 5.

## Список використаних джерел

1. Keedwell A. D., Dénes J. *Latin Squares and their Application*. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier B.V., 2015. 424 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2014-0-03412-0>
2. McKay B.D., Wanless I.M. *On the Number of Latin Squares*. *Ann. Comb.* 2005. Vol. 9. P. 335–344. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00026-005-0261-7>

3. Sokhatsky F. M. Parastrophic symmetry in quasigroup theory. *Вісн. ДонНУ., Сер. А. Природничі науки*. 2016. No. 1–2. С. 70–83.
4. Wall D.W. Subquasigroups of finite quasigroups. *Pacific Journal of Mathematics*. 1957. Vol. 7, No. 4. P. 1711–1714.
5. Сохацький Ф.М., Крайнічук Г.В., Лужецький В.А. Канонічні та матричні задавання квазігруп четвертого порядку. *Прикладні проблеми механіки та математики*. 2024. Вип. 22. С. 95–105. DOI: <https://doi.org/10.15407/apmm2024.22.95-105>
6. Sokhatsky F. Quasigroups and loops up to order 5. ConfQRS-2025: Book of Abstracts (Chisinau, July 2–4, 2025). P. 41–45.
7. Sokhatsky F.M., Lutsenko A.V., Fryz I.V. Construction of Quasigroups with Invertibility Properties. *J. Math. Sci*. 2024. Vol. 279. P. 115–132. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06999-0>
8. Sokhatsky F., Lutsenko A. Classification of quasigroups according to directions of translations I. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 2020. Vol. 61, No. 4. P. 567–579. DOI: <http://dx.doi.org/10.14712/1213-7243.2021.002>
9. Sokhatsky F., Lutsenko A. Classification of quasigroups according to directions of translations II. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 2021. Vol. 62, No. 3. P. 309–323. DOI: <http://dx.doi.org/10.14712/1213-7243.2021.021>

### Про автора / About the author

**Федір Сохацький**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, відділ алгебри, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної академії наук України, вул. Наукова, 3 Б, м. Львів, 79060, Україна;

**Fedir Sokhatsky**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Algebra, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine.

Отримано / Received 31.03.2026  
Прийнято до друку / Accepted 07.05.2026  
Опубліковано / Published 27.05.2026

UDC 512.548.7

## Parastrophic-orthogonal ternary medial quasigroups with 3 and 4 distinct parastrophes

Iryna Fryz<sup>1</sup>, Yevhen Pirus<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Vasyl' Stus Donetsk National University,  
 Department of Information Technologies, Vinnytsia, Ukraine  
 iryna.fryz@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-5609-0434>

<sup>2</sup>Donetsk Regional Center for Educational Quality Assessment,  
 Department of Information Technologies, Sloviansk, Ukraine  
 pirus@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0003-3442-201X>

---

*Abstract.* In the article, we study parastrophic-orthogonal ternary quasigroups: namely, group isotopes which have 3 and 4 distinct parastrophes. The necessary and sufficient conditions for ternary medial quasigroups with 3 and 4 distinct parastrophes to be totally parastrophic-orthogonal are proved. The conditions under which these quasigroups are strongly parastrophic-orthogonal are described. Thus, some methods of constructing orthogonal and strongly orthogonal ternary quasigroups are obtained.

*Keywords:* ternary quasigroup, group isotope, medial quasigroup, parastrophe, (strongly) orthogonal quasigroups, totally parastrophic-orthogonal (top) quasigroup.

---

### 1. Introduction

Ternary quasigroups possessing a certain number of pairwise distinct parastrophes and their existence were studied in M. McLeish's papers [1] and [2]. Later F. Sokhatsky and Ye. Pirus in [3] and [4] described a classification and canonical decompositions of ternary group isotopes possessing various numbers of distinct parastrophes. The study of ternary quasigroups with orthogonal parastrophes is a natural completion of these results. The conditions for a medial ternary quasigroup to be totally self-orthogonal (i.e. all distinct

principal parastrophes are orthogonal) were proved in [5] for the case when all its principal parastrophes are pairwise different. This approach was proposed by G. Belyavskaya and T. Rotari (Popovich) in [6] who described the conditions for a central binary quasigroup to be totally parastrophic-orthogonal.

Each parastrophe of an invertible operation can be regarded as a principal operation, and the regularities that arise in the study of these quasigroups are expressed in terms of parastrophic symmetry. Suppose that  $f$  is an  $n$ -ary invertible operation and  ${}^\sigma f$  denotes a  $\sigma$ -parastrophe of  $f$ ,  $\sigma \in S_n$ . The mapping  $(\sigma, f) \mapsto {}^\sigma f$  is an action of the symmetric group  $S_{n+1}$  on the set of all invertible  $n$ -ary operations defined on a carrier and is called a parastrophic action [7]. The stabilizer group  $\text{Ps}(f)$  and the orbit  $\text{Po}(f)$  of an operation  $f$

$$\text{Ps}(f) := \{\sigma \in S_{n+1} \mid {}^\sigma f = f\} \leq S_{n+1}, \quad \text{Po}(f) := \{{}^\sigma f \mid \sigma \in S_{n+1}\}$$

are called a *parastrophic symmetry group* and a *parastrophic orbit* of the operation  $f$  respectively. The series of statements follows from classical group theory, specifically

$$|\text{Ps}(f)| \cdot |\text{Po}(f)| = (n+1)!, \quad \text{Ps}({}^\sigma f) = \sigma \text{Ps}(f) \sigma^{-1}.$$

Therefore, parastrophic quasigroups belong to the same parastrophic orbit and their parastrophic symmetry groups are conjugated.

## 2. Statement of the problem and preliminaries

We restrict our attention to the symmetric group  $S_4$ . It is known fact that  $S_4$  has 30 subgroups distributed into 11 conjugacy classes. Here, we consider groups of parastrophic symmetry  $D_8$ ,  $S_3$  and  $A_3$ , where

$$\begin{aligned} D_8 &:= \{\iota, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}, \\ S_3 &:= \{\iota, (12), (13), (23), (123), (132)\}, \quad A_3 := \{\iota, (123), (132)\}. \end{aligned}$$

In the article, we consider the conditions when a ternary medial quasigroup with the parastrophic symmetry group  $D_8$ ,  $S_3$  and  $A_3$  possesses the property that it is parastrophic-orthogonal or totally parastrophic-orthogonal, i.e., in the cases when the quasigroup has 3 and 4 pairwise distinct parastrophes. Before proceeding further, we need the following definitions and statements.

Throughout the article, all operations are defined on a fixed set  $Q$  called a *carrier set* or a *carrier* and  $m := |Q| < \infty$ . We will often use the following lemma.

**Lemma 1.** *A product of elements in a finite monoid is invertible if and only if each of these elements is invertible.*

A ternary operation  $f$  defined on  $Q$  is called *invertible* or a *quasigroup operation* and the pair  $(Q; f)$  is called a *quasigroup* of order  $m$ , if each of the terms  $f(x, a, b)$ ,  $f(a, x, b)$ ,  $f(a, b, x)$  defines a permutation of  $Q$  for all  $a, b \in Q$ .

**Orthogonality.** A triplet of ternary operations  $f_1, f_2, f_3$  is called *orthogonal*, if the system of equations

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = a_1, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = a_2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = a_3 \end{cases}$$

has a unique solution for all  $a_1, a_2, a_3 \in Q$ . A set of ternary operations  $\Sigma = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ ,  $s \geq 3$ , is called *orthogonal*, if each triplet of distinct operations from  $\Sigma$  is orthogonal. Operations  $f_1, f_2, f_3$  are called *strongly orthogonal* if the set of operations  $\{f_1, f_2, f_3, e_1, e_2, e_3\}$  is orthogonal, where  $e_i$  defined by the equality

$$e_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$$

is called an *i-th selector*,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

The operation  $\alpha f$  defined by

$$(\alpha f)(x, y, z) := \alpha(f(x, y, z)),$$

where  $\alpha$  is a permutation of  $Q$ , is called a *torsion* of  $f$ .

**Proposition 2.** [5, Proposition 1] *If a set of operations is orthogonal, then their torsions are also orthogonal.*

**Parastrophes and parastrophic symmetry.** For each permutation  $\sigma \in S_4$ , a  $\sigma$ -*parastrophe*  ${}^\sigma f$  of an invertible ternary operation  $f$  is defined by

$${}^\sigma f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) = x_{4\sigma} : \iff f(x_1, x_2, x_3) = x_4,$$

which is equivalent to

$${}^\sigma f(x_1, x_2, x_3) = x_4 : \iff f(x_{1\sigma^{-1}}, x_{2\sigma^{-1}}, x_{3\sigma^{-1}}) = x_{4\sigma^{-1}}. \quad (1)$$

For all permutations  $\sigma, \tau \in S_4$  and for each invertible operation  $f$ , it is true that

$$\sigma(\tau f) = \sigma\tau f, \quad {}^\tau f = f. \quad (2)$$

A  $\sigma$ -parastrophe is called:

- an *i-th division* if  $\sigma = (i4)$  for  $i = 1, 2, 3$ ;
- a *principal parastrophe* if  $4\sigma = 4$ .

The formula (1) implies that any principal  $\sigma$ -parastrophe can be defined by

$${}^\sigma f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{1\sigma^{-1}}, x_{2\sigma^{-1}}, x_{3\sigma^{-1}}).$$

Each ternary invertible operation has  $4! = 24$  parastrophes including  $3! = 6$  principal parastrophes.

**Theorem 3.** [3, 7] *The relations (2) imply that the symmetric group  $S_4$  acts on the set  $\Delta_3$  of all ternary invertible operations defined on a set  $Q$ . Therefore, the following statements are true:*

- (1) *parastrophy is an equivalence relation on  $\Delta_3$ ; each block under the action is a set of all pairwise parastrophic operations, where  $f$  is one of these operation (representative);*
- (2)  *$\text{Ps}(f)$  is a subgroup of  $S_4$ ;*
- (3) *parastrophic symmetry groups of parastrophic operations are isomorphic, i.e., they are conjugated: namely,  $\text{Ps}(\sigma f) = \sigma \text{Ps}(f) \sigma^{-1}$ ;*
- (4) *the number of all different parastrophes of  $f$  equals  $\frac{24}{|\text{Ps}(f)|}$ ;*
- (5) *parastrophes  ${}^\sigma f$  and  ${}^\tau f$  are different if and only if  $\sigma$  and  $\tau$  belong to different elements of the set  $S_4/\text{Ps}(f)$ .*

$\mathfrak{P}(H)$  denotes the class of all quasigroups whose parastrophic symmetry group includes the subgroup  $H \leq S_4$ . Note that  $\mathfrak{P}(H)$  is a variety [3].

By item 5 of Theorem 3, all distinct parastrophes of a quasigroup with the groups of parastrophic symmetry  $D_8$ ,  $S_3$  or  $A_3$  are representatives from the elements of the sets

$$S_4/D_8 = \{D_8, (23)D_8, (13)D_8\}, \quad S_4/S_3 = \{S_3, (14)S_3, (24)S_3, (34)S_3\},$$

$$S_4/A_3 = \{A_3, (12)A_3, (14)A_3, (24)A_3, (34)A_3, (124)A_3, (134)A_3, (142)A_3\}.$$

A ternary quasigroup is called:

- *parastrophic-orthogonal* if it has a triplet of orthogonal parastrophes;
- *self-orthogonal* if it has a triplet of orthogonal principal parastrophes;
- *totally parastrophic orthogonal* (briefly, *a top quasigroup*) if its all distinct parastrophes are orthogonal.

**Group isotopes.** A ternary groupoid  $(Q; f)$  is called a *group isotope*, if there exists a group  $(G; \cdot)$  and bijections  $\alpha, \beta, \gamma$  from  $Q$  to  $G$  such that

$$f(x, y, z) = \delta^{-1}(\alpha x \cdot \beta y \cdot \gamma z) \quad \forall x, y, z \in Q.$$

Each group isotope  $(Q; f)$  has a *0-canonical decomposition*  $(+, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a)$  for every element  $0 \in Q$ , i.e.,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + a, \quad (3)$$

for some group  $(Q; +, 0)$ , permutations  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  with  $\alpha_1 0 = \alpha_2 0 = \alpha_3 0$  and  $a \in Q$ ;  $(Q; +, 0)$  is called *0-canonical decomposition group*.

If a ternary quasigroup  $(Q; f)$  is *linear* over a group  $(Q; +)$ , then it has decomposition (3), where  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  are automorphisms of  $(Q; +)$  and  $a \in Q$ . If  $(Q; +)$  is abelian, then  $(Q; f)$  is called a *central* or *T-quasigroup*.

**Corollary 4.** [8] *A quasigroup  $(Q; f)$  is medial if and only if there exists an abelian group  $(Q; +)$  such that (3), where  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  are pairwise commuting automorphisms of  $(Q; +)$  and  $a \in Q$ .*

All parastrophes of a group isotope can be obtained by the following lemma.

**Lemma 5.** *Let  $(Q; f)$  be an arbitrary ternary group isotope and let (3) be its canonical decomposition. Then its divisions and principal parastrophes are*

$$\begin{aligned} {}^{(14)}f(x_1, x_2, x_3) &= \alpha_1^{-1}(x_1 - a - \alpha_3 x_3 - \alpha_2 x_2), \\ {}^{(24)}f(x_1, x_2, x_3) &= \alpha_2^{-1}(-\alpha_1 x_1 + x_2 - a - \alpha_3 x_3), \\ {}^{(34)}f(x_1, x_2, x_3) &= \alpha_3^{-1}(-\alpha_2 x_2 - \alpha_1 x_1 + x_3 - a), \\ {}^\sigma f(x_1, x_2, x_3) &= \alpha_1 x_{1\sigma^{-1}} + \alpha_2 x_{2\sigma^{-1}} + \alpha_3 x_{3\sigma^{-1}} + a, \quad \sigma \in S_3. \end{aligned}$$

**Lemma 6.** *Let  $(Q; f)$  be a medial ternary quasigroup  $(Q; f)$  with (3),  $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in S_4$ . The parastrophes  ${}^{\tau_1}f, {}^{\tau_2}f, {}^{\tau_3}f$  are*

- (1) *orthogonal if and only if the determinant*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1\tau_1} & \alpha_{2\tau_1} & \alpha_{3\tau_1} \\ \alpha_{1\tau_2} & \alpha_{2\tau_2} & \alpha_{3\tau_2} \\ \alpha_{1\tau_3} & \alpha_{2\tau_3} & \alpha_{3\tau_3} \end{vmatrix} \quad (4)$$

- is an automorphism of the group  $(Q; +)$ , where  $\alpha_4 := -\iota$ ;  
 (2) strongly orthogonal if and only if the determinant (4) and all its minors are automorphisms of the group  $(Q; +)$ .

*Proof.* The first statement is taken from [5].

The parastrophes  ${}^{\tau_1}f$ ,  ${}^{\tau_2}f$ ,  ${}^{\tau_3}f$  are strongly orthogonal if and only if  ${}^{\tau_1}f$ ,  ${}^{\tau_2}f$ ,  ${}^{\tau_3}f$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  are orthogonal, i.e., each triplet of this set is orthogonal. By item 1, orthogonality of these parastrophes is equivalent to invertibility of (4), and clearly  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  are always orthogonal. Now, consider the cases when one of the operations is a selector, say the triplet  ${}^{\tau_i}f$ ,  ${}^{\tau_j}f$ ,  $e_1$  for all  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  and  $i \neq j$ . Then its orthogonality is equivalent to invertibility of the determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1\tau_i} & \alpha_{2\tau_i} & \alpha_{3\tau_i} \\ \alpha_{1\tau_j} & \alpha_{2\tau_j} & \alpha_{3\tau_j} \\ \iota & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{2\tau_i} & \alpha_{3\tau_i} \\ \alpha_{2\tau_j} & \alpha_{3\tau_j} \end{vmatrix}.$$

Hence, orthogonality of  ${}^{\tau_i}f$ ,  ${}^{\tau_j}f$ ,  $e_1$  is equivalent to invertibility of obtained minor. The proof is similar for the selectors  $e_2$  and  $e_3$ . Thus, we get all minors of (4). The result of the lemma follows.  $\square$

**Canonical decompositions of group isotopes.** Let  $(Q; f)$  be a ternary quasigroup with  $\text{Ps}(f) = D_8$ . By Proposition 4 from [3], only different parastrophes of  $f$  are  $f$ ,  ${}^{(14)}f$ ,  ${}^{(24)}f$ .

**Theorem 7.** [3, Theorem 5] *A ternary group isotope  $(Q; f)$  belongs to  $\mathfrak{P}(D_8)$  if and only if there exists an abelian group  $(Q, +, 0)$ , its involutive automorphism  $\alpha$  and an element  $a \in Q$  such that  $\alpha(a) = -a$  and*

$$f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y - z + a. \quad (5)$$

By Proposition 6 in [3], if  $\text{Ps}(f) = S_3$ , then different parastrophes are  $f$ ,  ${}^{(14)}f$ ,  ${}^{(24)}f$ ,  ${}^{(34)}f$ .

**Theorem 8.** [3, Theorem 6] *A ternary group isotope  $(Q; f)$  belongs to  $\mathfrak{P}(S_3)$  if and only if there exists an abelian group  $(Q, +, 0)$ , its bijection  $\alpha$  and an element  $a \in Q$  such that*

$$f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y + \alpha z + a. \quad (6)$$

Theorem 8 and Lemma 5 imply the following statement.

**Corollary 9.** *All distinct parastrophes of a ternary group isotope  $(Q; f)$  with the parastrophic symmetry group  $S_3$  are*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \alpha x + \alpha y + \alpha z + a, & {}^{(24)}f(x, y, z) &= \alpha^{-1}(-\alpha x + y - \alpha z - a), \\ {}^{(14)}f(x, y, z) &= \alpha^{-1}(x - \alpha y - \alpha z - a), & {}^{(34)}f(x, y, z) &= \alpha^{-1}(-\alpha x - \alpha y + z - a). \end{aligned} \quad (7)$$

By Proposition 8 in [3], if  $\text{Ps}(f) = A_3$ , then  $f$  has only different parastrophes  $f$ ,  ${}^{(12)}f$ ,  ${}^{(14)}f$ ,  ${}^{(24)}f$ ,  ${}^{(34)}f$ ,  ${}^{(124)}f$ ,  ${}^{(134)}f$ ,  ${}^{(142)}f$ . By Theorem 7, a group isotope with the parastrophic symmetry group  $A_3$  has decomposition (6).

### 3. Main results

Two transformations  $\alpha$  and  $\beta$  of a group  $(Q; +)$  are supposed to be equivalent if  $\alpha = \gamma \cdot \beta$ , where  $\gamma$  is a bijection of  $(Q; +)$ , i.e., equivalent transformations are invertible on  $(Q; +)$  simultaneously. If the transformations are given in the determinant form, then to equivalent

transformations there corresponds determinants up to common row or column multipliers or to rearrangements of rows or columns.

**Group isotopes whose parastrophic symmetry group is  $D_8$ .** The necessary and sufficient conditions for a dihedrally symmetric group isotope to be a top quasigroup were announced in [10]. Here, we provide the complete proof of this criterion. Later, the corresponding criterion for a linear ternary quasigroup over a unitary, associative, commutative ring was announced without proof in [11] and some of its corollaries were presented.

Theorem 7 and Corollary 4 imply immediately the following statement.

**Proposition 10.** *A ternary group isotope with the parastrophic symmetry group  $D_8$  is a medial quasigroup.*

**Theorem 11.** *A ternary group isotope  $(Q; f)$  with the group of parastrophic symmetry  $D_8$  is a top quasigroup if and only if it has canonical decomposition (5), where  $(Q, +, 0)$  is an abelian group,  $\alpha$  is its involutive automorphism, an element  $a \in Q$  such that  $\alpha(a) = -a$ , and  $\alpha + \iota$  is an automorphism of  $(Q; +)$ .*

*Proof.* Let  $(Q; f)$  be a ternary group isotope and  $\text{Ps}(f) = D_8$ . By item 5 of Theorem 3,  ${}^\sigma f$  and  ${}^\tau f$  are different parastrophes if and only if  $\sigma$  and  $\tau$  belong to different elements of the set

$$S_4/D_8 = \{D_8, (14)D_8, (24)D_8\}.$$

We may choose  $\iota, (23), (13)$  as the representatives of  $S_4/D_8$ . Hence, all parastrophes of  $(Q; f)$  are principal. Consequently, the classes of parastrophic-orthogonal, self-orthogonal and totally parastrophic-orthogonal ternary group isotopes with the group of parastrophic symmetry  $D_8$  coincide.

By Theorem 7, this group isotope has decomposition (5), and by Lemma 5, its distinct parastrophes are

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \alpha x + \alpha y - z + a, \\ {}^{(23)}f(x, y, z) &= \alpha x - y + \alpha z + a, \\ {}^{(13)}f(x, y, z) &= -x + \alpha y + \alpha z + a. \end{aligned}$$

By item 1 of Lemma 6, the parastrophes  $f, {}^{(23)}f$  and  ${}^{(13)}f$  are orthogonal if and only if the determinant

$$d_{D_8} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & -\iota \\ \alpha & -\iota & \alpha \\ -\iota & \alpha & \alpha \end{vmatrix} \quad (8)$$

is an automorphism of the group  $(Q; +)$ . Adding the first row to the second one multiplying by  $-\iota$ , then adding the second and third columns, we get the following transformations for  $d_{D_8}$ :

$$\begin{aligned} d_{D_8} &= \begin{vmatrix} 0 & \alpha + \iota & -(\alpha + \iota) \\ \alpha & -\iota & \alpha \\ -\iota & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -(\alpha + \iota) \\ \alpha & \alpha - \iota & \alpha \\ -\iota & 2\alpha & \alpha \end{vmatrix} = \\ &= -(\alpha + \iota)(2\alpha^2 + \alpha - \iota) = -(\alpha + \iota)(2\iota + \alpha - \iota) = (-\iota)(\alpha + \iota)(\alpha + \iota). \end{aligned}$$

Since  $-\iota$  is invertible, by Lemma 1 the determinant  $d_{D_8}$  is invertible if and only if the transformation  $\alpha + \iota$  is an automorphism of the group  $(Q; +)$ .  $\square$

**Example 12.** Let  $\mathbb{Z}_{15}$  be a ring of integers modulo 15. By Theorem 11,  $(\mathbb{Z}_{15}; f)$ , where

$$f(x, y, z) = x + y - z,$$

is a top quasigroup with  $\text{Ps}(f) = D_8$ , since  $\alpha + \iota = 1 + 1 = 2$  is relatively prime to 15 and so is invertible in the ring  $\mathbb{Z}_{15}$ .

**Corollary 13.** *A ternary group isotope with the group of parastrophic symmetry  $D_8$  is not a strongly top quasigroup.*

*Proof.* Suppose that  $(Q; f)$  satisfies the conditions of the corollary and is a strongly top quasigroup. By item 2 of Lemma 6, all minors of  $d_{D_8}$  which is defined by (8) should be invertible. However,  $d_{D_8}$  contain the minor

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\iota \\ -\iota & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \iota = \iota - \iota = 0, \quad (9)$$

which is a contradiction. Therefore, a strongly top group isotope with the group of parastrophic symmetry  $D_8$  does not exist.  $\square$

**Corollary 14.** *There does not exist any strongly orthogonal parastrophes of a ternary group isotope with the group of parastrophic symmetry  $D_8$ .*

*Proof.* Suppose that  $(Q; f)$  is a quasigroup with (5). Since each two rows of the determinant  $d_{D_8}$  contains the minor (9), the pairs of parastrophes  $(^{(13)}f, ^{(23)}f)$ ,  $(f, ^{(13)}f)$  and  $(f, ^{(23)}f)$  can not be strongly orthogonal.  $\square$

**Group isotopes whose parastrophic symmetry group is  $S_3$ .** Earlier, the necessary and sufficient conditions for a group isotope with the parastrophic symmetry group  $S_3$  to be a top quasigroup were announced in [12]. Here, we provide the complete proof of this criterion and some of its corollaries.

**Lemma 15.** *A triplet of parastrophes  $f, {}^\tau f, {}^\nu f$ , where  $\tau, \nu \in \{(14), (24), (34)\}$ , of a ternary medial quasigroup  $(Q; f)$  with the group of parastrophic symmetry  $S_3$  is orthogonal if and only if it has canonical decomposition (6),  $a \in Q$ , and  $\alpha, \alpha + \iota$  are automorphisms of the group  $(Q; +)$ .*

*Proof.* Let the conditions of the lemma be true. According to Proposition 2 and item 1 of Lemma 6, the parastrophes  $f, {}^\tau f, {}^\nu f$  are orthogonal if and only if the determinant (4) is an automorphism of the group  $(Q; +)$ , where one of its row is  $\alpha, \alpha, \alpha$  and others are two of the following sequences:

$$-\iota, \alpha, \alpha; \quad \alpha, -\iota, \alpha; \quad \alpha, \alpha, -\iota.$$

Note that the invertibility property for a determinant is invariant under permutations of its rows and columns.

By permuting the rows, we can put the row  $\alpha, \alpha, \alpha$  first. By permuting the columns, we can get  $-\iota, \alpha, \alpha$  as the second row. If the third row is  $\alpha, \alpha, -\iota$ , we permute the second and third columns to obtain the following determinant:

$$d_{S_3}^1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ -\iota & \alpha & \alpha \\ \alpha & -\iota & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \iota & 0 & 0 \\ -\iota & \alpha & \alpha \\ \alpha & -\iota & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha + \iota)(\alpha^2 + \alpha) = (\alpha + \iota)\alpha(\alpha + \iota). \quad (10)$$

By Lemma 1, the determinant  $d_{S_3}^1$  is invertible if and only if the transformations  $\alpha$  and  $\alpha + \iota$  are automorphisms of the group  $(Q; +)$ .  $\square$

**Lemma 16.** *A triplet of parastrophes  $^{(14)}f$ ,  $^{(24)}f$ ,  $^{(34)}f$  of a ternary medial quasigroup  $(Q; f)$  with the group of parastrophic symmetry  $S_3$  is orthogonal if and only if it has canonical decomposition (6),  $a \in Q$ , and  $\alpha$ ,  $\alpha + \iota$ ,  $2\alpha - \iota$  are automorphisms of the group  $(Q; +)$ .*

*Proof.* Let the conditions of the lemma be true. According to Proposition 2 and item 1 of Lemma 6, the parastrophes  $^{(14)}f$ ,  $^{(24)}f$ ,  $^{(34)}f$  are orthogonal if and only if the determinant (4) is an automorphism of the group  $(Q; +)$  whose rows are the following sequences:

$$-\iota, \alpha, \alpha; \quad \alpha, -\iota, \alpha; \quad \alpha, \alpha, -\iota.$$

Under a permutation of the rows, we obtain the following determinant:

$$d_{S_3}^2 = \begin{vmatrix} -\iota & \alpha & \alpha \\ \alpha & -\iota & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\iota \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Adding the first row to the second one multiplied by  $-\iota$ , and then adding the first and second columns, results in the following transformations for  $d_{S_3}^2$ :

$$\begin{aligned} d_{S_3}^2 &= \begin{vmatrix} -(\alpha + \iota) & \alpha + \iota & 0 \\ \alpha & -\iota & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\alpha + \iota) & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha - \iota & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & -\iota \end{vmatrix} = \\ &= -(\alpha + \iota)(-\alpha - \iota - 2\alpha^2) = -(\alpha + \iota)((\iota - \alpha^2) - \alpha(\iota + \alpha)) = \\ &= (-\iota)(\alpha + \iota)(\alpha + \iota)(\iota - 2\alpha) = \alpha(\alpha + \iota)(\alpha + \iota)(2\alpha - \iota). \end{aligned}$$

By Lemma 1, the determinant  $d_{S_3}^2$  is invertible if and only if the transformations  $\alpha$ ,  $\alpha + \iota$  and  $2\alpha - \iota$  are automorphisms of the group  $(Q; +)$ .  $\square$

**Theorem 17.** *A ternary medial quasigroup  $(Q; f)$  with the group of parastrophic symmetry  $S_3$  is a top quasigroup if and only if it has canonical decomposition (6),  $a \in Q$ , and  $\alpha$ ,  $\alpha + \iota$ ,  $2\alpha - \iota$  are automorphisms of the group  $(Q; +)$ .*

*Proof.* Suppose that  $(Q; f)$  is a ternary medial quasigroup and  $\text{Ps}(f) = S_3$ . By item 5 of Theorem 3, the parastrophes  $^\sigma f$  and  $^\tau f$  are different if and only if  $\sigma$  and  $\tau$  belong to different elements of the set

$$S_4/S_3 = \{S_3, (14)S_3, (24)S_3, (34)S_3\}.$$

In other words, all pairwise different parastrophes are  $f$ ,  $^{(14)}f$ ,  $^{(24)}f$ ,  $^{(34)}f$ .

Consequently, if the parastrophic symmetry group of a ternary quasigroup is  $S_3$ , then all its principal parastrophes coincide. By Theorem 8, this group isotope has decomposition (6), and by Corollary 9, its distinct parastrophes are (7).

Thus, the proof of the theorem follows from Lemma 15 and Lemma 16.  $\square$

**Example 18.** Let  $\mathbb{Z}_{21}$  be a ring of integers modulo 21. By Theorem 17,  $(\mathbb{Z}_{21}; f)$ , where

$$f(x, y, z) = 10x + 10y + 10z, \quad (12)$$

is a top quasigroup with  $\text{Ps}(f) = S_3$ , since

$$\alpha + \iota = 10 + 1 = 11, \quad 2\alpha - \iota = 2 \cdot 10 - 1 = 19.$$

We may formulate some generalizations for a cyclic quasigroup  $(\mathbb{Z}_m; f)$  with (12) as follows:

**Corollary 19.** *Let  $\mathbb{Z}_m$  be a ring of integers modulo  $m$ , and the operation  $f$  be defined by (12).*

- (1)  $(\mathbb{Z}_m; f)$  is a top quasigroup with  $\text{Ps}(f) = S_3$  if and only if  $m$  is relatively prime to 2, 3, 5, 7, 11 and 19.
- (2) If  $m = p$  is a prime number, then  $(\mathbb{Z}_p; f)$  is a top quasigroup with  $\text{Ps}(f) = S_3$  for each prime  $p > 19$ .
- (3) If  $p$  is the least prime divisor of  $m$ , then  $(\mathbb{Z}_m; f)$  is a top quasigroup with  $\text{Ps}(f) = S_3$  for each prime  $p > 19$ .

**Corollary 20.** *A triplet of parastrophes  $\sigma f, \tau f, \nu f$  of a medial quasigroup  $(Q; f)$  with the group of parastrophic symmetry  $S_3$  is strongly orthogonal if and only if  $\{\sigma, \tau, \nu\} = \{(14), (24), (34)\}$ ,  $f$  has canonical decomposition (6), and  $\alpha, \alpha + \iota, 2\alpha - \iota, \alpha - \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ .*

*Proof.* By item 2 of Lemma 6, we should consider all non-trivial minors of the determinants  $d_{S_3}^1$  and  $d_{S_3}^2$  defined by (10) and (11) respectively. The determinant (10) contains the minor

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Therefore, the triplet  $\sigma f, \tau f, \nu f$  does not contain the operation  $f$  and so

$$\{\sigma, \tau, \nu\} = \{(14), (24), (34)\}.$$

Consider the determinant (11) and its nine minors. All its minors are equivalent to two of them under permutations of the rows and columns:

$$\begin{vmatrix} -\iota & \alpha \\ \alpha & -\iota \end{vmatrix} = \iota - \alpha^2 = -(\alpha - \iota)(\alpha + \iota), \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -\iota \end{vmatrix} = -\alpha - \alpha^2 = -\alpha(\iota + \alpha).$$

These minors are invertible if and only if  $\alpha + \iota$  and  $\alpha - \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ . Consequently,  ${}^{(14)}f, {}^{(24)}f, {}^{(34)}f$  are strongly orthogonal if and only if  $\alpha, \alpha + \iota, 2\alpha - \iota$  and  $\alpha - \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ . □

**Example 21.** Consider the field  $\mathbb{Z}_{13}$  of integers modulo 13. By Corollary 20,  $(\mathbb{Z}_{13}; f)$ , where

$$f(x, y, z) := 8x + 8y + 8z,$$

is a quasigroup with  $\text{Ps}(f) = S_3$  which has strongly orthogonal parastrophes  ${}^{(14)}f, {}^{(24)}f, {}^{(34)}f$ , since

$$\alpha + \iota = 8 + 1 = 9, \quad 2\alpha - \iota = 2 \cdot 8 - 1 = 15, \quad \alpha - \iota = 8 - 1 = 7.$$

**Corollary 22.** *Let  $(Q; f)$  be a medial quasigroup with (6) and possess the group of parastrophic symmetry  $S_3$ . Then*

- (1)  $(Q; f)$  is not a strongly top quasigroup;
- (2)  ${}^{(14)}f, {}^{(24)}f$  and  ${}^{(34)}f$  are orthogonal if and only if  $(Q; f)$  is a top quasigroup;
- (3)  $(Q; f)$  is parastrophic-orthogonal if and only if  $\alpha + \iota$  is an automorphism of  $(Q; +)$ .

*Proof.* Corollary 20 implies immediately item 1. Item 2 follows from Lemma 16 and Theorem 17. Item 3 follows from Lemma 15 and Lemma 16. □

A group isotope  $(Q; f)$  with the parastrophic symmetry group  $S_3$  has no principal parastrophes except  $f$ , however each of its divisions has three principal parastrophes.

**Proposition 23.** *Let  $(Q; f)$  be a medial quasigroup with (6) and  $\text{Ps}(f) = S_3$ . For each  $i \in \{1, 2, 3\}$ , its parastrophe  $(Q; {}^{(i4)}f)$  is*

- (1) *self-orthogonal if and only if  $\alpha + \iota$  and  $2\alpha - \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ ;*
- (2) *strongly self-orthogonal if and only if  $\alpha + \iota$ ,  $2\alpha - \iota$  and  $\alpha - \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ .*

*Proof.* Consider a division of  $f$ , say  ${}^{(14)}f$ , as a principal operation. Then obviously, it has the parastrophic symmetry group  $H := \{\iota, (23), (24), (34), (234), (243)\} \leq S_4$  which is a conjugate of  $S_3$  by the permutation (14). In this case,  $S_4/H = \{H, (12)H, (13)H, (14)H\}$ . The operation  ${}^{(14)}f$  has three principal parastrophes  ${}^{(14)}f, {}^{(24)}f, {}^{(34)}f$  whose orthogonality and strong orthogonality follow from Lemma 16 and Corollary 20 respectively.  $\square$

Note that a ternary quasigroup with the parastrophic symmetry group  $A_3$  exists, as follows from the paper [2] (see for example Theorem 3.3). However, there are no group isotopes with eight distinct parastrophes.

**Proposition 24.** *If the parastrophic symmetry group of a group isotope contains  $A_3$ , then it contains  $S_3$ .*

*Proof.* Theorem 7 from [3] states that a group isotope  $(Q; f)$  with  $\text{Ps}(f) \supseteq A_3$  has canonical decomposition (6). This implies the equalities

$${}^{(12)}f = f, \quad {}^{(13)}f = f$$

and hence  $(12), (13) \in \text{Ps}(f)$ . Since the permutations (12), (13) generate  $S_3$ , it follows that  $S_3 \subseteq \text{Ps}(f)$ .  $\square$

**Conclusions.** The necessary and sufficient conditions for a ternary medial quasigroup to be a top quasigroup are given in the cases when the quasigroup has the parastrophic symmetry group  $D_8$  and  $S_3$  (Theorem 11 and Theorem 17). Consequently, this provide methods of constructing ternary orthogonal quasigroups which have 3 and 4 distinct orthogonal parastrophes. Besides, we have shown that a medial quasigroup with  $\text{Ps}(f) = S_3$  may have a triplet of strongly orthogonal parastrophes (Corollary 20). A method of constructing a triplet of ternary strongly parastrophic-orthogonal quasigroups follows.

From the obtained results, we have the following theorem.

**Theorem 25.** *Let  $(Q; +)$  be an abelian group and  $\varphi$  be its automorphism. Then the operations  $f_1, f_2, f_3$  defined by*

$$f_1(x, y, z) = \varphi x + y + z, \quad f_2(x, y, z) = x + \varphi y + z, \quad f_3(x, y, z) = x + y + \varphi z$$

*are strongly orthogonal quasigroup operations if and only if  $\varphi, \varphi - 2\iota, \varphi - \iota, \varphi + \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ .*

*Proof.* Let the conditions of the theorem hold. Then the quasigroup  $(Q; f)$  defined by

$$f(x, y, z) = \alpha x + \alpha y + \alpha z$$

is medial. According to Corollary 9, all divisions of this quasigroup can be expressed in the form

$$\begin{aligned} {}^{(14)}f(x, y, z) &= I(-\alpha^{-1}x + y + z), & {}^{(24)}f(x, y, z) &= I(x - \alpha^{-1}y + z), \\ {}^{(34)}f(x, y, z) &= I(x + y - \alpha^{-1}z), \end{aligned}$$

where  $I(x) := -x$ . By Corollary 20, these operations are strongly orthogonal if and only if  $\alpha, 2\alpha - \iota, \alpha + \iota, \alpha - \iota$  are automorphisms of  $(Q; +)$ . Let  $\varphi := I\alpha^{-1}$ . Then  $\alpha := I\varphi^{-1}$ , and the given conditions mean that

$$I\varphi^{-1}, \quad 2I\varphi^{-1} - \iota = I\varphi^{-1}(\varphi - 2\iota), \quad I\varphi^{-1} + \iota = \varphi^{-1}(\varphi - \iota), \quad I\varphi^{-1} - \iota = I\varphi^{-1}(\varphi + \iota)$$

are automorphisms of  $(Q; +)$ . This proves the theorem.  $\square$

**Corollary 26.** *Let  $\mathbb{Z}_m$  be a ring of integers modulo  $m$ . Then the operations  $f_1, f_2, f_3$  defined by*

$$f_1(x, y, z) = kx + y + z, \quad f_2(x, y, z) = x + ky + z, \quad f_3(x, y, z) = x + y + kz$$

*are strongly orthogonal quasigroup operations if and only if  $k, k-2, k-1, k+1$  are relatively prime to  $m$ .*

**Conflict of interest and ethics.** The authors declare no conflict of interests. The authors also declare full adherence to all journal research ethics policies, namely involving the participation of human subjects anonymity and/ or consent to publish.

**Acknowledgements.** The authors declare no special funding for this work.

## References

1. McLeish, M. (1979). *On the number of conjugates of  $n$ -ary quasigroups*, Can. J. Math. **XXXI** (3), 637–654. <https://doi.org/10.4153/CJM-1979-064-6>
2. McLeish M. (1980). *On the Existence of Ternary Quasi-Groups with Two or Eight Conjugacy Classes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **29**, 199–211. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(80\)90009-6](https://doi.org/10.1016/0097-3165(80)90009-6)
3. Sokhatsky, F., Pirus, Ye. (2018). *Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, I*, Visnyk DonNu. Series A: Natural Sciences, **1-2**, 70–82. <https://doi.org/10.31558/1817-2237.2018.1-2.5>
4. Pirus, Ye. (2019). *Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, II*, Visnyk DonNu. Series A: Natural Sciences, **1-2**, 66–75. <https://doi.org/10.31558/1817-2237.2019.1-2.9>
5. Fryz I., Sokhatsky, F. (2022). *Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups*, Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., **3** (100), 41–55. <https://doi.org/10.56415/basm.y2022.i3.p41>
6. Belyavskaya, G.B., Popovich, T.V. (2010). *Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs*, J. Math. Sci., **185** (2), 184–191. <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0907-z>
7. Sokhatsky, F. (2016). *Parastrophic symmetry in quasigroup theory*, Visnyk DonNu. Series A: Natural Sciences, **1-2**, 70–83.
8. Sokhatsky, F. (2017). *Factorization of operations of medial and abelian algebras*, Visnyk DonNY. Series A: Natural Sciences, **1-2**, 84–96. <https://doi.org/10.31558/1817-2237.2017.1-2.7>
9. Belyavskaya, G., Mullen, G.L. (2006). *Strongly orthogonal and uniformly orthogonal many-placed operations*, Algebra Discrete Math., **5**, 1, 1–17.
10. Pirus, Ye. (2020). *On ternary top-quasigroups whose group of parastrophic symmetry is  $D_8$* . *Book of Abstracts of International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (Kyiv, Ukraine, July 14–17, 2020), 64.
11. Rotari, T. (2024). *On ternary quasigroups with exactly three distinct and orthogonal parastrophes*. *e-Book of Abstracts of the 31st International Conference on Applied and Industrial Mathematics* (Oradea, Romania, September 19–22, 2024), 53–54.
12. Pirus, Ie. (2015). *About parastrophic orthogonality of medial ternary quasigroups*. *Abstracts of X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd* (Odesa, Ukraine, August 20–27, 2015), 87.

## Парастрофно-ортогональні тернарні медіальні квазігрупи, які мають 3 і 4 різних парастрофи

Ірина Фриз, Євген Пірус

*Анотація.* У цій статті ми вивчаємо парастрофно-ортогональні тернарні квазігрупи, а саме, ізотопи груп, які мають 3 і 4 різних парастрофи. Виведено необхідні і достатні умови коли тернарні медіальні квазігрупи, що мають 3 і 4 різних парастрофи, є тотально парастрофно-ортогональними. Описано за яких умов такі квазігрупи є строго парастрофно-ортогональними. Таким чином, отримано деякі методи побудови ортогональних і строго-ортогональних квазігруп.

*Ключові слова:* тернарна квазігрупа, ізотоп групи, медіальна квазігрупа, парастроф, (сильно) ортогональні квазігрупи, тотально парастрофно-ортогональна (top) квазігрупа.

### Список використаних джерел

1. McLeish M. On the number of conjugates of  $n$ -ary quasigroups. *Can. J. Math.* 1979. Vol. XXXI, № 3. P. 637–654. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-1979-064-6>
2. McLeish M. On the Existence of Ternary Quasi-Groups with Two or Eight Conjugacy Classes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. 1980. Vol. 29, Iss. 2. P. 199–211. DOI: [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(80\)90009-6](https://doi.org/10.1016/0097-3165(80)90009-6)
3. Sokhatsky F., Pirus Ye. Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, I. *Visnyk DonNu. Series A: Natural Sciences*. 2018. № 1-2. P. 70–82. DOI: <https://doi.org/10.31558/1817-2237.2018.1-2.5>
4. Pirus Ye. Classification of ternary quasigroups according to their parastrophic symmetry groups, II. *Visnyk DonNu. Series A: Natural Sciences*. 2019. № 1-2. P. 66–75. DOI: <https://doi.org/10.31558/1817-2237.2019.1-2.9>
5. Fryz I., Sokhatsky F. Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.* 2022. № 3(100). P. 41–55. DOI: <https://doi.org/10.56415/basm.y2022.i3.p41>
6. Belyavskaya G.B., Popovich T.V. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. *J. Math. Sci.* 2012. Vol. 185, No. 2. P. 184–191. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0907-z>
7. Sokhatsky F. Parastrophic symmetry in quasigroup theory. *Visnyk DonNu. Series A: Natural Sciences*. 2016. № 1-2. P. 70–83.
8. Sokhatsky F. Factorization of operations of medial and abelian algebras, *Visnyk DonNY. Series A: Natural Sciences*. 2017. № 1-2. P. 84–96. DOI: <https://doi.org/10.31558/1817-2237.2017.1-2.7>
9. Belyavskaya G., Mullen G.L. Strongly orthogonal and uniformly orthogonal many-placed operations. *Algebra Discrete Math.* 2006. Vol. 5, № 1. P. 1–17.
10. Pirus Ye. On ternary top-quasigroups whose group of parastrophic symmetry is  $D_8$ . *International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv*: Book of Abstracts (Kyiv, July 14–17, 2020) / Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2020. P. 64.
11. Rotari T. On ternary quasigroups with exactly three distinct and orthogonal parastrophes. *The 31st International Conference on Applied and Industrial Mathematics: e-Book of Abstracts* (Oradea, Romania, September 19–22, 2024) / Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics. P. 53–54.
12. Pirus Ie. About parastrophic orthogonality of medial ternary quasigroups. *X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd*: Abstracts (Odessa, August 20–27, 2015) / I.I. Mechnikov Odessa National University. P. 87.

**Про авторів / About the authors**

**Ірина Фриз**, кандидат фізико-математичних наук, кафедра інформаційних технологій, Донецький національний університет імені Василя Стуса, вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна;

**Iryna Fryz**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Department of Information Technologies, Vasyl' Stus Donetsk National University, 21 600-richchia Str., Vinnytsia 21021, Ukraine;

**Євген Пірус**, начальник відділу інформаційних технологій, Донецький регіональний центр оцінювання якості освіти, вул. Добровольського, 1, м. Слов'янськ, 84122, Україна;

**Yevhen Pirus**, Head of Department of Information Technologies, Donetsk Regional Center for Educational Quality Assessment, 1 Dobrovolskyi Str., Sloviansk 84122, Ukraine.

Отримано / Received 28.03.2026  
Прийнято до друку / Accepted 20.04.2026  
Опубліковано / Published 27.05.2026

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ФІЗИКА:  
НАУКА ТА ОСВІТА

електронний науковий журнал

Том 3, № 1

Видавець:

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до  
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції

серія ДК № 7482 від 19.10.2021 р.

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32

Тел.: (0432) 61-28-12

e-mail: [info@vspu.edu.ua](mailto:info@vspu.edu.ua)

<http://www.vspu.edu.ua>

Підписано до публікації 27.05.2026 р.

Гарнітура Computer Modern Roman

Ум. друк. арк. 4,75