

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ ЗДАТНОСТІ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Анотація. Розглянута проблема формування й розвитку математичної компетентності учнів. Виділені складові математичної компетентності: процедурна, технологічна, логічна, дослідницька та практична. Визначені показники даних компетентностей, що передбачають формування певних умінь і здатностей учнів в процесі навчання математики. Показано, як на їх розвиток можна вплинути в процесі формування в учнів здатності до математичного моделювання. Наведені конкретні приклади задач, з використанням методу математичного моделювання, організувавши роботу над якими, вчитель може скористатися умовами розвитку описаних компетентностей. Зауважено, що процедурна компетентність є базисною і на її формування певним чином можна вплинути при роботі з типовими задачами, що розв'язуються способом побудови однакової математичної моделі. На розвиток технологічної компетентності також можна вплинути вдало організувавши роботу учнів у процесі розв'язування задач методом математичного моделювання. Умовами для розвитку логічної компетентності учнів вчитель також може скористатись відпрацьовуючи метод математичного моделювання. Спонукаючи учнів до самостійних досліджень в процесі формування здатності до математичного моделювання також повною мірою формується їх дослідницька компетентність. Особливу увагу пропонується звернути на практичну компетентність, безпосередньою ознакою якої є здатність учнів до математичного моделювання. Запропонований перелік складових математичної компетентності є своєрідною пропозицією переосмислити і обговорити його в подальших публікаціях. Зроблена спроба довести, що здатність до математичного моделювання є ознакою математичної компетентності учнів.

Ключові слова: компетентнісний підхід, складові математичної компетентності, здатність до математичного моделювання, математична модель.

Annotation. The problem of formation and development of mathematical competence of students has been investigated. The components of mathematical competence have been separated, procedural, technological, logical and practical research. We have defined the indices of these competencies which involve forming certain skills and abilities of students in learning mathematics. We have shown how it is possible to influence their development in the process of forming of students' capacity for mathematical modeling. We have offered the specific examples of problems with the use of mathematical modeling, organizing work over which the teacher can take advantage of the conditions of the development of the described competencies. It has been noted that procedural competence is basic and its formation can be influenced in some way when dealing with typical problems solved by the method of building of the same mathematical model. It is also possible to influence the development of technological competence of the work of students in the process of solving problems through mathematical modeling is organized well. The teacher can also conditions for the development of logical competence of students practicing the method of mathematical modeling. Encouraging students to independent research in the process of formation of student's capacity for mathematical modeling we also can form fully their research competence. We offer to take particular attention to practical competence immediate sign of which is the ability of students to mathematical modeling. The proposed list of components of mathematical competence is the kind of proposal to rethink and discuss it in subsequent publications. We have tried to prove that the capacity for mathematical modeling is a sign of mathematical competence of students.

Key words: competence approach, elements of mathematical competence, capacity for mathematical modeling, mathematical model.

Постановка проблеми. Компетентнісний підхід в освіті визначено нині одним із провідних напрямків удосконалення системи освіти в Україні. Сучасна школа має готувати особистість зі сформованими життєвими компетентностями, тому що саме така особистість здатна успішно самореалізуватися в усіх сферах життя.

Дослідники в галузі педагогіки здебільшого розглядають систему компетентностей за наступною структурою: ключові, загальногалузеві та предметні компетентності, що очевидно, тісно переплітаються між собою. Математична освіта покликана зробити вагомий внесок у формування ключових компетентностей учнів. На нашу думку, серед галузевих компетентностей важливе місце посідає математична компетентність.

Перед учителем математики постає проблема в чіткому усвідомленні показників математичної компетентності учнів, в умінні їх розвивати різними способами і методами, використовуючи при цьому найбільш вдалі.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Аналіз науково-методичної літератури дозволив встановити, що складові реалізації компетентнісного підходу в освітньому процесі досліджували: Н. Бібік, О. Овчарук, Л. Паращенко, О. Пометун, О. Савченко, С. Трубачева та інші.

Теоретичні та практичні питання реалізації формування математичних компетентностей досліджували: П. Білецький, М. Головань, І. Зіненко, І. Кожевнікова, Л. Крикунова, О. Матяш, С. Раков, Н. Самарук, І. Сафонова, Н. Тарасенкова, О. Ткаченко, Л. Шатохіна, Н. Шустова та багато інших.

Питання місця і ролі математичного моделювання у процесі формування математичної компетентності учнів, на нашу думку, потребує додаткових досліджень.

Мета статті: визначити, які уміння і здатності можуть бути показниками математичної компетентності учнів та розглянути, як формування здатності учнів до математичного моделювання може впливати на розвиток їхніх математичних компетентностей.

Виклад основного матеріалу. Українські дослідники розглядаючи зміст поняття «математична компетентність» найчастіше посилаються на означення Сергія Анатолійовича Ракова [4, с. 15]: Математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. У цьому визначенні ключовими є поняття: математичне моделювання та математична модель. С. Раков наводить таку класифікацію математичних компетентностей: процедурна, логічна, технологічна, дослідницька та методологічна компетентності. Автор чітко прописує напрями набуття цих компетентностей.

У навчальній програмі з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів зазначено, що шкільний курс математики має будуватися на застосуванні методу математичного моделювання. Розглянемо, як процес формування в учнів знань та вмінь математичного моделювання може впливати на розвиток математичних компетентностей учнів.

Показниками **процедурної компетентності** учнів найчастіше виступають такі уміння: уміння працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші і т.п.); уміння розв'язувати типові математичні задачі, що передбачає використання на практиці алгоритму розв'язування типових задач; уміння відтворювати контекст задач, які виникають на практиці і зводяться до типових, уміння систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміння розпізнавати типову задачу або зводити задачу до типової; уміння використовувати різні інформаційні джерела (підручники, довідники, інтернет-ресурси) для пошуку процедур розв'язування типових задач.

Очевидно, що процедурна компетентність є базисною. На початковому етапі роботи з задачами певного типу ми використовуємо типові задачі, що розв'язуються способом побудови однакової математичної моделі. У нашій статті [1, с. 243] наведена серія типових текстових задач, в процесі розв'язування яких одержуємо однакоvu математичну модель. Це дає учням змогу навчитися систематизувати типові задачі, розпізнавати їх або зводити задачу до типової на основі готової математичної моделі. При створенні моделей типових математичних задач потрібно спонукати учнів до використання різних інформаційних джерел для пошуку процедур їх розв'язування, тим самим і формувати процедурну компетентність. Так, наприклад, при розв'язуванні прикладних задач на тему «Розв'язування трикутників», слід спонукати учнів для їх самостійного відшукування в довіднику «Таблиця Брадіса» значень синусів і косинусів тригонометричних кутів, а не наводити ці дані в умові задачі.

Технологічна компетентність передбачає: здатність володіти технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені; здатність використовувати математичну та логічну символіку на практиці при оформленні математичних текстів; володіння сучасними математичними пакетами, що реалізується через: розв'язування задач з використанням різних типів математичного програмного забезпечення; оцінювання похибки при використанні наближених обчислень; побудова та дослідження комп'ютерних моделей задач з метою її евристичного, наближеного або точного розв'язку.

На розвиток технологічної компетентності можна вплинути вже на першому етапі роботи з текстовими задачами при перекладі задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики. Учні набувають здатність використовувати математичну та логічну символіку, з'являються необхідні умови для формування здатності до математичного моделювання. Найпростіша символіка вводиться в середній школі (знаки дій, рівності та нерівності, дужки, знаки кута, паралельності і т.д.). Правильному використанню символів слід вчити, розкриваючи їх роль і значення при розв'язуванні задач методом математичного моделювання в процесі оформлення математичних текстів. На етапі дослідження математичної моделі, тобто при безпосередньому розв'язуванні отриманої математичної задачі, спонукаючи учнів використовувати таке математичне програмне забезпечення, як Derive (пакет комп'ютерної алгебри), DG (динамічна геометрія), комплект програм Gran (Gran1, Gran-2D, Gran-3D), **Algebrator** (програма для розв'язування алгебраїчних задач), Математика (програма для розв'язування різного роду задач з математики), Excel (електронні таблиці) та багато інших.

На розвиток технологічної компетентності можна вплинути вдало організувавши роботу учнів у процесі розв'язування наступної стереометричної задачі. Дбаючи про формування знань та вмінь математичного моделювання, ця задача, на нашу думку, може бути запропонована для розв'язання навіть у 6 класі.

Задача 1. Скільки води містить циліндричний паровий котел, що має довжину 4 м? Усередині котла по довжині проходить жарова труба з внутрішнім діаметром 40 см.

Розв'язання. Вода в паровому котлі (надалі використовуватимемо просто котел) міститься в жаровій трубі. За необхідності про це потрібно повідомити учням. Саме використання програми Gran3D і дозволяє розв'язати дану задачу в 6 класі при вивченні теми «Циліндр», на етапі мотивації навчальної діяльності учнів, із зазначенням того, що цю задачу вони навчаться розв'язувати без даної програми в 11 класі.

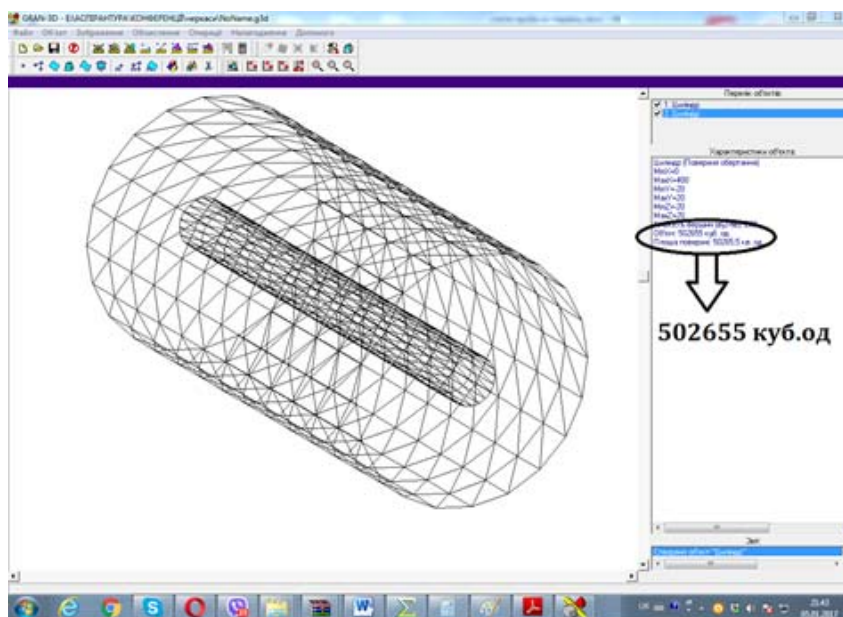


Рис. 1.

Для цього спочатку з головного меню програми, що розміщене безпосередньо під стрічкою заголовку, потрібно обрати пункт «Об'єкт», далі визвати команду «Створити базовий об'єкт», або ж на панелі інструментів

натиснути кнопку  — «Створити базовий просторовий об'єкт», після чого активізується вікно програми «Задання базових просторових об'єктів». В даному вікні потрібно обрати «Циліндр», після чого вказати його параметри, що дані в умові задачі. Для цього в рядку «Висота» вводимо число 400, маючи на увазі см, оскільки довжина котла, а також і труби складає 4 м, а в рядку радіус – 20, оскільки за умовою задачі діаметр труби дорівнює 40 см. Потім натискаємо кнопку «Створити», що активізує вікно «Конструювання об'єкта», на якому потрібно натиснути кнопку «Виконати». Для наочності, аналогічним чином створюємо ще один об'єкт для зображення котла, такої ж довжини, але більшого радіуса, наприклад 1 м. В правому кутку під написом «Характеристика об'єкта» отримуємо шуканий результат об'єму труби, що і дорівнює об'єму води, яка міститься в ній.

Для переходу від кубічних одиниць (сантиметрів) до літрів можна використати будь який конвертор, навіть онлайн:

конвертер

Вы переводите единицы объем из кубический сантиметр в литр

502655 cm³ = 502.655 l

кубический сантиметр	↔	литр
502655 cm ³	→	502.655 l ≈ 502 l 655 ml

Основание перевода величин : 1 cm³ = 0.001 l

Основание перевода величин : 1 l = 1000 cm³

Відповідь. 502 л 655 мл води містить паровий котел.

Розв'язання (11 кл). Оскільки жарова труба, як і самий котел має циліндричну форму, задача розв'язується використовуючи відому формулу для знаходження об'єму циліндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$.

Функція $V = \pi R^2 H$ – математична модель задачі.

$$V_{\text{води}} = V_{\text{труби}} = \pi R^2 H = 3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 4 \approx 0,5024 \text{ (м}^3\text{)}$$

Аналогічно для переходу до потрібної одиниці вимірювання можна скористатись конвертором.

Відповідь. 502 л 400 мл

Основою **логічної компетентності** є логічна грамотність і розвинене логічне мислення, а також здатність використовувати логічну грамотність і логічне мислення в навчальній діяльності та в житті. Ознаками логічної компетентності школярів можуть виступати наступні здатності: здатність мислити точно й послідовно, не допускаючи протиріч у своїх міркуваннях, та вміння викривати логічні помилки; здатність до володіння

дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, що передбачає володіння і використання понятійного апарату (поняття, висловлювання, предикати, логічні операції, аксіоми і теореми) на практиці; здатність будувати, вдосконалювати та використовувати власну систему математичних уявлень на практиці, на основі понятійного апарату; здатність до відтворення доведень теорем та доведення правильності процедур розв'язування типових задач; здатність до проведення обґрунтувань правильності розв'язування задач та відшукування логічних помилок у неправильних міркуваннях.

Відпрацьовуючи метод математичного моделювання при розв'язуванні текстових і не лише задач, вчитель може скористатися умовами для розвитку логічної компетентності учнів.

Розглянемо, наприклад, задачу, з допомогою якої можна формувати логічну компетентність на уроці алгебри в учнів 9 класу. З цієї задачі може розпочинатись вивчення теми «Системи двох рівнянь з двома змінними».

Задача 2. Спортивний майданчик прямокутної форми має площу 1600 м^2 . Довжина огорожі, якою оточений спортивний майданчик дорівнює 200 м. Знайдіть розміри майданчика.

Розв'язання. Нехай довжина — x (м), а ширина — y (м), тоді xy (м^2) — площа майданчика, що за умовою дорівнює 1600 м^2 .

$2(x + y)$ м — периметр майданчика, що і є довжиною огорожі, яка за умовою дорівнює 200 м.

Складемо математичну модель задачі, що є системою двох рівнянь з двома змінними:
$$\begin{cases} xy = 1600, \\ 2(x + y) = 200 \end{cases}$$

Дослідимо одержану математичну модель, розв'язавши складену систему:
$$\begin{cases} xy = 1600, \\ x + y = 100 \end{cases}; \begin{cases} (100 - y)y = 1600, \\ x = 100 - y \end{cases}; \begin{cases} (100 - y)y = 1600, \\ 100y - y^2 - 1600 = 0, \\ y^2 - 100y + 1600 = 0, \\ x = 100 - y \end{cases}; \begin{cases} 100y - y^2 - 1600 = 0, \\ y^2 - 100y + 1600 = 0, \\ x = 100 - y \end{cases}.$$

Розв'яжемо перше рівняння системи. Корені можна отримати за теоремою Вієта:
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 100, \\ y_1 \cdot y_2 = 1600 \end{cases}; \begin{cases} y_1 = 20, \\ y_2 = 80 \end{cases}$$

. Тоді
$$\begin{cases} x_1 = 80 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

Отримавши корені системи рівнянь, проведемо аналіз одержаних результатів. Оскільки за x ми позначили довжину, а за y — ширину майданчика, то очевидно, що $x = x_1 = 80$, а $y = y_1 = 20$. Інтерпретуємо отриманий результат і одержимо, що довжина майданчика становить 80 м, а його ширина — 20 м.

Відповідь: 20 м і 80 м.

Показниками **дослідницької компетентності** виступають наступні здатності: здатність володіти методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами, що полягає у здатності формулювати математичні задачі на основі аналізу соціально та індивідуально значущих задач; здатність будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач; здатність висувати та емпірично перевіряти справедливості гіпотез, спираючись на відомі методи, такі як індукція, аналогія, узагальнення, а також на власний досвід досліджень; здатність інтерпретувати результати, отримані за формальними методами, у термінах вихідної предметної області задачі; здатність систематизувати отримані результати (досліджувати межі застосувань отриманих результатів, встановлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики та інших галузях знань); здатність проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі.

Пропонуємо прикладну дослідницьку задачу, що розв'язується методом математичного моделювання, її умову одержимо склавши до попередньої задачі обернену.

Задача 3. Спортивний майданчик сусідньої школи вдвічі менший за наш. Знайдіть його площу та периметр.

Дана задача може бути запропонована у 5 класі при вивченні теми «Геометричні фігури і величини». Учніям під керівництвом вчителя пропонується зробити виміри на місцевості довжини і ширини шкільного спортивного майданчика. Далі використовуючи вивчені формули периметра і площі прямокутника скласти математичні моделі задачі. Функції $S = ab$ і $S = 2(a + b)$ є математичними моделями даної задачі. Враховуючи умову, що спортивний майданчик сусідньої школи вдвічі менший за власний, потрібно поділити отриманий результат на 2.

Вбачаємо необхідним доповнити цей перелік математичних компетентностей **практичною компетентністю**, що передбачає здатність будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач; здатність оволодівати необхідною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; вміння уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язування задачі; вміння переформулювати задачу; здатність розбивати задачу на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вміння вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; вміння перевіряти правильність розв'язання задачі; здатність аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; вміння узагальнювати задачу, всебічно її розглядати і приймати рішення за результатами розв'язання задачі.

Здатність до математичного моделювання є безпосередньою ознакою практичної компетентності учнів, яка формується паралельно з формуванням та розвитком вмінь використовувати математичне моделювання в навчальній діяльності та на практиці.

Висновки. Виокремлення складових математичної компетентності, які запропоновані у цій статті, є умовним. Компетентнісний підхід у навчанні математики полягає у збалансованому формуванні всіх вказаних складових. Формування математичної компетентності, як цілісної характеристики, забезпечується внаслідок успішного оволодіння учнями: процедурною, технологічною, логічною, дослідницькою та практичною математичними компетентностями. Методично грамотно побудований процес формування здатності учнів до математичного моделювання є важливою передумовою розвитку їхніх математичних компетентностей.

Література:

1. Катеринюк Г. Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання / Г.Д. Катеринюк // «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – Київ: Гнозис, 2016. – С. 239-246.
2. Матяш О. І. Задачі методичної діяльності вчителя у навчанні учнів геометрії / О. І. Матяш // Наукові записки Малої академії наук України: Зб. наук. пр. – Вип. 3. Серія: педагогічні науки. – Київ: ТОВ «СІТІПРІНТ». – 2013. – С. 224-232.
3. Матяш О. І. Формування знань старшокласників про різні методи розв'язування задач стереометрії / О. І. Матяш, В.А. Ясінський, А. В. Прус // Математика в школі. – 2010. – № 10. – С. 8-17.
4. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.