

УДК 37.01:007+378

М.Є. Зюков
м. Полтава, Україна

НАВЧАННЯ ЛІНІЙНІЙ АЛГЕБРИ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT MATHEMATICS

Останнім часом спостерігається невідповідність між зростаючою забезпеченістю вищих навчальних закладів України комп'ютерною технікою та рівнем використання інформаційних технологій у навчанні, зокрема вищій математиці. Можна сперечатися щодо причин виникнення цього явища. На нашу думку, одна з них – це відсутність відповідного програмного забезпечення. Тому звернімо увагу на появу в 2011 р. програми Microsoft Mathematics 4.0 [1], яка є безкоштовною, російською мовою, має зручний інтерфейс, не вимагає спеціального навчання, а її використання нагадує роботу біля дошки або в зошиті.

Найбільш корисними для знайомства з можливостями MS Mathematics є серія уроків [2], короткий огляд [3] та стаття [4].

Розглянемо можливості використання MS Mathematics з метою швидкого та ґрунтовного освоєння основних інструментів лінійної алгебри – матриць, векторів, визначників та систем лінійних рівнянь (СЛР), використовуючи переваги систем комп'ютерної алгебри. Це не вимагатиме суттєвої зміни змісту і методики викладання, але відкриває шлях до створення та використання нових, більш ефективних алгоритмів розв'язування типових задач. Деякі з них будуть викладені далі.

Основи роботи в MS Mathematics описані в огляді [4]. Обмежена кількість ретельно підібраних команд, їх простий синтаксис та відсутність опцій, є скоріше перевагою цієї програми, адже дозволяє почати працювати з нею без попереднього навчання. Результати обчислень не можна повторити автоматично з іншим набором вхідних даних. Робочий аркуш MS Mathematics є лише звітом про виконані команди. Його можна зберегти у файлі, переглянути або надрукувати, але не можна повторно виконати. Для розв'язування нової задачі потрібно принаймні редагувати команди робочого аркушу та повторно їх виконати. Ці відмінності MS Mathematics від систем комп'ютерної алгебри, таких як Maple, Mathematica або MathCAD, не вимагають кардинальних змін у змісті та методиці викладання лінійної алгебри.

У MS Mathematics матриця – це прямокутний масив об'єктів, що складається не більше ніж з 15 рядків і стовпців, а вектор – це список, тобто впорядкований набір об'єктів у фігурних дужках. Дозволяється зберегти введені або обчислені значення й вирази у змінних. Тоді дії з матрицями або векторами можна виконувати як обчислення виразу із змінними, в яких вони зберігаються. Так, наприклад, можна обчислювати лінійні комбінації векторів або многочлени від матриці.

Більшість функцій MS Mathematics для матриць та векторів описані у [4]. Інші можна знайти у її довідковій системі. Наприклад, обчислення визначника розкладенням за елементами ряду реалізується функціями `matrixElement`, `subBlockMatrix`, `subMatrix` і `det`, призначення яких зрозуміле з назви.

Важливий метод виключення Гауса використовує елементарні перетворення рядків матриці, що реалізуються у MS Mathematics як аналогічні операції зі списком рядків матриці, до яких звертаються функцією `row(матриця, номер_рядка)`. Після закінчення процесу виключення одержують матрицю у східчастій по рядках формі (`row echelon form`) або коротко – східчасту матрицю. Опишемо ці матриці більш детально.

Перший ліворуч ненульовий елемент рядка матриці назвемо провідним, а стовпець, у якому він розташований, – основним. Матриця називається східчастою, якщо її ненульові рядки розташовані над нульовими і провідний елемент рядка знаходиться ліворуч провідного елемента наступного рядка. Прикладами східчастих матриць є нульова, одинична та верхня трикутна матриці або матриця з одного рядка. Квадратна підматриця, що утворена ненульовими рядками

й основними стовпцями східчастої матриці, є верхньою трикутною або діагональною і невикористаною. Отже, і ненульові рядки й основні стовпці східчастої матриці лінійно незалежні, а їх кількість дорівнює її рангу. Елементарними перетвореннями рядків будь-яку ненульову матрицю можна привести до еквівалентної східчастої матриці [5, с. 199]. Якщо $(j_1, \dots, j_r)$ номери основних стовпців цієї східчастої матриці, то стовпці цієї матриці з цими номерами проходять через її базисний мінор. Щоб знайти номери рядків, що проходять через базисний мінор матриці, треба її транспонувати, привести до еквівалентної східчастої матриці та визначити номери основних стовпців цієї матриці.

Східчаста матриця має приведену (reduced) форму, якщо її провідними елементами є одиниці, а інші елементи основних стовпців дорівнюють нулю. Елементарними перетвореннями рядків будь-яку ненульову матрицю можна привести до еквівалентної приведенної східчастої матриці [5, с. 201]. Функція `reduce(матриця)` напевне повертає еквівалентну приведену східчасту матрицю, якщо стовпці базисного мінору цієї матриці є суміжними. В інших випадках це може бути просто східчаста матриця.

Розглянемо дослідження та розв'язування у MS Mathematics СЛР $Ax = b$. Застосуємо функцію `reduce` до розширеної матриці системи $[A|b]$. За її східчастим виглядом визначаються ранги матриць A та $[A|b]$, а за теоремою Кронекера-Капеллі – сумісність та визначеність цієї системи.

Визначені СЛР розв'язуються функцією `linearSolve(матриця, список)`, де *матриця* – матриця коефіцієнтів, а *список* – список правих частин рівнянь. Для визначених систем просто реалізуються методи Крамера й оберненої матриці через функції `det` та `inverse`.

Якщо СЛР невизначена, то функцією `reduce` визначається базисний мінор матриці коефіцієнтів як описано вище. Його стовпцям відповідають базисні невідомі, а рядкам – лінійно незалежні рівняння системи. Система розв'язується відносно базисних невідомих функцією `solve(рівняння, змінні)`, де *рівняння* – список лінійно незалежних рівнянь системи, а *змінні* – список базисних невідомих. Загальний розв'язок системи одержується у вигляді рівносильної системи, що розв'язана відносно базисних невідомих. Щоб знайти частинний розв'язок системи для такого набору значень небазисних невідомих, потрібно додати цей набір у вигляді рівнянь до списку лінійно незалежних рівнянь і застосувати функцію `solve(список_рівнянь)`.

Розглянемо дослідження лінійної незалежності системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ з простору R^m . Ця задача зводиться до розв'язування однорідної СЛР $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$ з матрицею коефіцієнтів $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, ранг r якої дорівнює кількості лінійно незалежних векторів серед даних. Функція `reduce(A)` повертає еквівалентну східчасту матрицю A_{ref} , основним стовпцям якої відповідає певний базис даної системи векторів [6, с. 41].

Несуміжність основних стовпців A_{ref} свідчить про наявність альтернативних базисів. Щоб розкласти інші вектори системи за певним її базисом, складається матриця A , в якій базисні вектори будуть першими, і до неї застосовується функція `reduce`. Одержується еквівалентна приведена східчаста матриця, що має канонічний блоковий вигляд

$$A_{ref} = \begin{bmatrix} E_r & A_{n-r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

якщо $r < m$, або $A_{ref} = [E_r \ A_{n-r}]$, якщо $r = m$, де E_r – одинична матриця порядку r , а нулі позначають матриці відповідного розміру, що складаються з нулів. Тоді елементами

стовпців підматриці A_{n-r} будуть коефіцієнти розкладу відповідних векторів системи за даним базисом [6, с. 41].

Застосуємо цей факт для знаходження фундаментальної системи розв'язків (ФСР) невизначеної однорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими $Ax = 0$, де ранг A дорівнює r . Функція $\text{reduce}(A)$ повертає еквівалентну східчасту матрицю A_{ref} . Якщо ця матриця має канонічний приведений вигляд A_{ref} , то стовпці $f_1, f_2, \dots, f_{n-r}$ блокової матриці

$$F = \begin{bmatrix} -A_{n-r} \\ E_{n-r} \end{bmatrix}$$

утворюють ФСР даної системи. Дійсно, вони лінійно незалежні та

$$\begin{bmatrix} E_r & A_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{n-r} \\ E_{n-r} \end{bmatrix} = -E_r A_{n-r} + A_{n-r} E_{n-r} = -A_{n-r} + A_{n-r} = 0$$

Якщо A_{ref} не має канонічного вигляду, то перестановкою зробимо її основні стовпці першими. Тоді або зразу одержимо канонічний вигляд A_{ref} , або знову застосуємо функцію reduce . Далі робимо як описано вище, лише при складанні матриці F виконуємо відповідну перестановку рядків матриць $-A_{n-r}$ і E_{n-r} .

Загальним розв'язком однорідної СЛР $Ax = 0$ є лінійна комбінація $x = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_{n-r} f_{n-r}$ її ФСР, де $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – довільні дійсні числа [6, с. 93]. Це означає, що ФСР утворює базис підпростору розв'язків однорідної СЛР.

У застосуваннях, зокрема при знаходженні власних векторів матриці, доводиться розв'язувати однорідні СЛР $Ax = 0$ з квадратною матрицею коефіцієнтів, ранг r якої менше кількості невідомих n . Якщо застосувати функцію reduce до розширеної матриці $[A^T | E]$, то одержимо матрицю $[A_{Tref} | S]$, де S – матриця перетворення до східчастого вигляду: $SA^T = A_{Tref}$. Міркуючи як у [7], бачимо, що останні $n-r$ лінійно незалежних рядків S , що відповідають нульовим рядкам A_{Tref} , задовольняють рівність $xA^T = 0$ або $Ax^T = 0$. Тобто останні $n-r$ стовпців S^T утворюють ФСР системи $Ax = 0$.

Щоб застосувати цей алгоритм, коли матриця коефіцієнтів не квадратна, потрібно перетворити її на еквівалентну квадратну матрицю. Для цього або відкидають лінійно залежні рядки матриці коефіцієнтів, які визначаються як описано вище, або дописують нульові рядки.

Розглянемо тепер невизначену систему m лінійних рівнянь з n невідомими $Ax = b$, де ранг A дорівнює r . Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що після застосування функції reduce до розширеної матриці системи $[A | b]$, одержимо еквівалентну приведену східчасту матрицю канонічного блокового вигляду

$$\begin{bmatrix} E_r & A_{n-r} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

якщо $r < m$, або $\begin{bmatrix} E_r & A_{n-r} & b_1 \end{bmatrix}$, якщо $r = m$.

Елементами стовпця b_1 є коефіцієнти розкладення стовпця b за першими r стовпцями матриці A [6, с. 41]. Отже, стовпець з n елементів $f_0 = [b_1 \ 0]^T$ є розв'язком системи рівнянь $Ax = b$. Тоді загальний розв'язок невизначеної СЛР $Ax = b$ має вигляд $x = f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_{n-r} f_{n-r}$, де $f_1, f_2, \dots, f_{n-r}$ – ФСР відповідної однорідної СЛР $Ax = 0$, а $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – довільні дійсні числа [6, с. 97].

У MS Mathematics доволі просто розв'язується задача про власні значення та власні вектори матриці. Власні значення знаходять як корені характеристичного рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ – алгебраїчного рівняння степеня n , а власні вектори – як нетривіальні розв'язки відповідних однорідних СЛР $(A - \lambda E)x = 0$ [6, с. 131].

MS Mathematics успішно справляється з розв'язанням алгебраїчних рівнянь до третього степеня включно. Рівняння більш високих степенів розв'язуються чисельно. Для пошуку комплексних коренів треба змінити налаштування програми на стрічці Главная.

Розв'язки системи $(A - \lambda E)x = 0$ утворюють власний підпростір матриці A , що відповідає власному значенню λ . Його базисом є, наприклад, ФСР цієї системи, яку можна знайти одним із способів описаних вище. Кратність власного значення λ як кореня характеристичного рівняння називається його алгебраїчною кратністю, а розмірність відповідного власного підпростору – геометричною кратністю [8, с. 327]. Якщо ранг $[A - \lambda E]$ дорівнює r_λ , то геометрична кратність власного значення λ становить $n - r_\lambda$. Геометрична кратність власного значення на перевищує його алгебраїчної кратності [9, с. 435].

Із знаходженням власних векторів тісно пов'язана задача перетворення квадратної матриці A до діагонального вигляду. Якщо ця задача має розв'язок, то існує матриця перетворення подібності C , для якої матриця $D = C^{-1}AC$ має діагональний вигляд. Стовпцями матриці C є лінійно незалежні власні вектори матриці A , а діагональ матриці D складають власні значення матриці A з урахуванням їх алгебраїчної кратності [10, с. 168]. Для існування матриці C необхідно і достатньо, щоб всі власні значення матриці A були дійсними і мали однакові алгебраїчну та геометричну кратності [11, с. 110]. Ця умова перевіряється обчисленням рангів матриць $A - \lambda E$ функцією reduce для кожного власного значення.

Для симетричної матриці A матриця C завжди існує і ортогональна, тобто матриця $C^T AC$ має діагональний вигляд [10, с. 168]. Власні вектори симетричної матриці, що належать різним власним значенням, ортогональні. Тому для знаходження матриці C потрібно ортогоналізувати та нормувати ФСР системи $(A - \lambda E)x = 0$ для кожного власного значення λ . Ортогоналізація лінійно незалежних векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ виконується методом Грама-Шмідта, який описується формулами

$$b_1 = a_1, \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i, \quad (k = 2..m)$$

де (a, b) – скалярний добуток векторів a і b . Тоді вектори $c_k = \frac{b_k}{|b_k|}$, $(k = 1..m)$ ортонормовані. Ця процедура реалізується у MS Mathematics через скалярний добуток векторів (inner) та модуль вектора (magnitude).

Розглянемо квадратичну форму відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, тобто вираз виду $x^T A x$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ і A – дійсна симетрична матриця, що називається матрицею квадратичної форми. Як вже зазначалося вище, для симетричної матриці A існує ортогональна матриця C така, що матриця $C^T A C$ діагональна з власними значеннями матриці A з урахуванням їх кратності на головній діагоналі. Якщо ввести нові змінні $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійним перетворенням $x = C y$, то квадратична форма $x^T A x$ набуде вигляду $y^T (C^T A C) y = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$, який називається канонічним [10, с. 168].

Розглянуті приклади показують, що можливостей MS Mathematics цілком достатньо для розв'язування типових задач лінійної алгебри. Обмежена кількість функцій цієї програми вимагає від користувача досконалого володіння теоретичними основами розв'язування цих задач. Відсутність автоматизації розгалужених алгоритмів робить роботу в MS Mathematics схожою на обчислення з калькулятором, лише інтелектуальним. Тому її використання не вимагатиме суттєво змінювати зміст і методику викладання лінійної алгебри. Все сказане дозволяє зробити висновок про доцільність використання MS Mathematics при навчанні лінійній алгебрі.

Література:

1. Microsoft Download Center. Microsoft Mathematics 4.0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.microsoft.com/ru-ru/download/details.aspx?id=15702>. – Назва з екрану.
2. Math and Multimedia. Microsoft Mathematics Tutorial Series [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://mathandmultimedia.com/2012/03/10/microsoft-mathematics-tutorials/>. – Назва з екрану.
3. Жизнь в Интернете. Microsoft Mathematics – помощник для решения математических задач [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://lifevinet.ru/soft/reshenie-matematic-zadach.html>. – Назва з екрану.
4. Зюков М. Е. Обучение высшей математике с использованием Microsoft Mathematics / Зюков М. Е. // Вісник Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (педагогічні науки) – 2013, № 20 (279). – С. 67-72.
5. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов / Л. Я. Куликов – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.
6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 656 с. – (Высшее образование)
7. Wolfram Language & Sysem. Documantation Center. RowReduce\ Properties & Relations [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://reference.wolfram.com/language/ref/RowReduce.html>. – Назва з екрану.
8. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics / Erwin Kreyszig. – 10th Ed. – New York: John Wiley & Sons, 2011. – 1152 p.
9. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн; пер. с англ. под общ. ред. И. Г. Арамановича. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
10. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. Т. 3, ч. 1 / В. И. Смирнов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 324 с.

У статті розглядається робота в Microsoft Mathematics з матрицями, векторами, визначниками та системами лінійних рівнянь. Описуються алгоритми знаходження рангу та базисного мінору матриці, базису системи векторів, фундаментальної системи розв'язків та загального розв'язку систем лінійних рівнянь. Ці алгоритми спираються на властивості східчастої по рядках форми матриці. Розроблені алгоритми застосовуються для знаходження власних векторів матриці, перетворення матриці до діагонального вигляду та квадратичної форми до канонічного вигляду.

Ключові слова: Microsoft Mathematics, лінійна алгебра, східчаста по рядках форма матриці, фундаментальна система розв'язків, власні вектори

В статье рассматривается работа в Microsoft Mathematics с матрицами, векторами, определителями и системами линейных уравнений. Описываются алгоритмы нахождения ранга и базисного минора матрицы, базиса

системы векторов, фундаментальной системы решений и общего решения систем линейных уравнений. Эти алгоритмы опираются на свойства ступенчатой по строкам формы матрицы. Разработанные алгоритмы применяются для нахождения собственных векторов матрицы, преобразования матрицы к диагональному виду и квадратичной формы к каноническому виду.

Ключевые слова: Microsoft Mathematics, линейная алгебра, ступенчатая по строкам форма матрицы, фундаментальная система решений, собственные векторы

The article discusses the work in Microsoft Mathematics with matrices, vectors, determinants and systems of linear equations. Algorithms are described to find rank and basis minor of matrix, basis of vectors system, the fundamental system of solutions and the general solution of linear systems of equations. These algorithms are based on the properties of the row echelon form of matrix. The developed algorithms are applied to find the eigenvectors and to convert the matrix to diagonal form and the quadratic form to canonical form.

Keywords: Microsoft Mathematics, linear algebra, row echelon form of matrix, fundamental system of solutions, eigenvectors.

УДК 378.147.002.2

А.В. Іванчук, В.П. Мельничук
м. Вінниця, Україна

РОЗШИРЕННЯ ПОЛІТЕХНІЧНОЇ СКЛАДОВОЇ В ЗМІСТІ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ СУЧАСНОГО ВИРОБНИЦТВА» ДЛЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ТЕХНОЛОГІЙ

Постановка проблеми. Сучасність висуває нові вимоги до фахової підготовки майбутніх учителів технологій, однією з основних є її фундаменталізація. Фундаментальність підготовки полягає в широті та ґрунтовності професійної компетентності майбутнього вчителя, яка формує готовність до реагування на зміни у сфері діяльності [1; 6; 7].

Одним із шляхів фундаментальності підготовки стає створення нових інтегрованих навчальних дисциплін, до яких і належить навчальна дисципліна «Основи сучасного виробництва». Ця навчальна дисципліна спрямована на формування в майбутніх учителів технологій технічної культури, технічної ерудиції і технічного світогляду як складових їхньої професійної підготовки [7].

Зміст навчальної дисципліни «Основи сучасного виробництва» відповідає загальній структурі сучасного виробництва (техніка, технологія, організація та управління) і має на меті системно розглянути виробничу діяльність, якщо основними елементами її змісту є техніка і технологія [7].

Техніко-технологічні знання (природничо-наукові основи техніки і технологічних процесів) майбутнього вчителя технологій мають володіти властивостями, які дозволяють їх переносити на широке коло об'єктів техніки. Традиційно цього досягають шляхом використання узагальнюючих понять відповідно до дидактичних принципів політехнізму. Однак аналіз змісту опублікованих навчальних посібників із навчальної дисципліни [2, с. 5] розкриває протиріччя між намаганням авторів створити цілісну систему знань про сучасне виробництво та зменшенням обсягу навчального матеріалу політехнічного спрямування.

Аналіз попередніх досліджень. Проблеми фахової підготовки вчителів трудового навчання були предметом уваги дослідників: В. Андріяшина, І. Волощука, А. Вихруща, О. Гедвілло, В. Гетти, Р. Гуревича, В. Гусева, П. Дмитренка, О. Коберника, В. Кузьменка, В. Мадзігона, Н. Ничкало, В. Сидоренка, Г. Терещука, В. Титаренко, Д. Тхоржевського, О. Шпака, М. Янцура та ін.

Питанням змісту та методики підготовки вчителів трудового навчання присвячені дослідження В. Борисова, В. Буринського, В. Васенка, І. Каньковського, Л. Козачок, М. Корця,