

РОЗДІЛ 2

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ НАВЧАННЯ, ВИХОВАННЯ ТА РОЗВИТКУ УЧНІВ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ І-ІІІ СТУПЕНІВ

УДК 519.677:51-37

О.О. Дмитрієнко
м. Київ, Україна

ВИКОРИСТАННЯ ППЗ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ»

На сучасному етапі розвитку суспільства забезпечення належного рівня математичної підготовки набуває особливої актуальності. Це обумовлено насамперед тим, що наразі все більше спеціальностей потребують високого рівня застосування математики, а отже розширюється коло школярів, для яких математика стає професійно значущим предметом. Тобто без належної математичної підготовки неможлива повноцінна освіта сучасної людини.

Вплив предмета «Алгебра і початки аналізу» на особистість школяра має вирішальне значення для системи шкільної освіти: розвиток логічного мислення, просторових уявлень і уяви, уваги, алгоритмічної та інформаційної культури.

Розглядаючи тему «Інтеграл», яка є однією з фундаментальних тем шкільного курсу «Алгебри і початків аналізу», можна стверджувати, що на перших уроках у певних дітей вона викликає деякі труднощі у вивченні. Проте, задача вчителя звести ці труднощі нанівець. А як це краще зробити? Звісно ж, через ту сферу життєдіяльності, яка ближча школярам. Через практичні задачі, ті з якими діти стикалися у реальному житті.

Тому варто для початку розглянути, як вводиться саме поняття «інтеграл» у підручниках різних авторів та чи мають місце задачі прикладного характеру у процесі вивчення певних тем.

Для 11-х класів шкільною освітою запропоновано книги з алгебри, які відповідають новій програмі:

- О. Афанасьєва, Я. Бродський, О. Павлов, А. Сліпенко «Математика» [1];
- Г. Бевз, В. Бевз, Н. Владімірова «Алгебра і початки аналізу» [2];
- Г. Бевз, В. Бевз «Математика» [3];
- А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М.Якір «Алгебра» [5];
- Є. Нелін, О. Долгова «Алгебра» [6].

У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним і рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма і тому має відповідати окремий підручник:

- рівень стандарту [1; 3];
- академічний і профільний [2; 5; 6].

Для того, щоб в учнів з'явилася здатність застосовувати набуті з даного курсу знання і вміння в нестандартних ситуаціях, доречно буде використовувати у якості одного з засобів навчання – прикладні задачі. Під прикладними задачами в школі здебільшого розуміють задачі, які виникають поза курсом математики і розв'язуються математичними методами і способами, які визначаються в шкільному курсі. Що ж стосується теми «Інтеграл», то учні мають справу з задачами прикладного характеру як під час введення даного поняття так і під час вивчення параграфу «Застосування інтегралів».

У всіх трьох підручниках [2; 5; 6] прикладні задачі пропонуються у процесі вивчення параграфу «Знаходження первісних», але їх тематика поширюється тільки на фізику. Наприклад:

Задача. Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася на початку координат (швидкість вимірюється в метрах за секунду) [5].

Більшість прикладних задач розглядається у параграфі «Застосування інтегралів». Щоб отримати уявлення про інтеграл, розглядають здебільшого наступні задачі:

- площі фігур;
- об'єм тіла обертання;
- робота змінної сили;
- сила тиску рідини.

У курсі математичного аналізу вищих навчальних закладів розглядають усі ці задачі, а у шкільному курсі найчастіше докладно розглядають лише одну з них. У більшості випадків, перевагу надають задачам на обчислення об'ємів тіл, оскільки ця задача аналогічна до задачі на знаходження площі криволінійної трапеції.

Але зауважимо, що у підручнику А. Мерзляк та ін. Алгебра [5] у згаданому вище параграфі прикладні задачі відсутні. У підручнику Є. Нелін та ін. Алгебра [6] прикладні задачі на застосування визначених інтегралів зібрані у параграфі «Найпростіші диференціальні рівняння», але їх кількість незначна.

Виходячи з розглянутих підручників на використання прикладних задач у процесі вивчення інтегралу, ми вважаємо доцільним подавати поняття інтегралу за підручником Г. Бевз та ін. Алгебра і початки аналізу [3].

Розглянемо методику вивчення інтегралу у підручнику Г. Бевз та ін. Алгебра і початки аналізу [2].

Після вивчення параграфу «Визначений інтеграл» група авторів переходить до відпрацювання навичок по знаходженню визначених інтегралів і лише після цього використовує набуті вміння у параграфі «Застосування інтегралів», який розбитий на три рівня складності і містить найбільшу кількість прикладних задач з усіх розглянутих підручників. Тому далі у статті ми звернемо увагу на третій рівень складності (рівень В), який складається тільки з прикладних задач на застосування визначених інтегралів, і спробуємо його розв'язати за допомогою педагогічних програмних засобів (ППЗ), наприкладі Mathcad.

У наш час особливого розвитку набули системи комп'ютерної математики такі, як Mathematica, Maple, Mathcad. Системи класу Mathcad є одними з кращих для користувачів, які працюють у галузі техніки або природничих наук, а також для студентів, викладачів і навіть школярів. Mathcad вигідно відрізняється від інших програм комп'ютерної математики можливістю вільно компоувати робочий лист і легкістю у вивченні.

За його допомогою без проблем розв'язуються алгебраїчні та диференціальні рівняння з постійними і змінними параметрами, проводиться аналіз функцій і пошук їхніх екстремумів, числове й аналітичне диференціювання та інтегрування, апроксимація результатів експериментальних досліджень, створення програм будь-якої складності тощо.

Головними перевагами пакета Mathcad порівняно з подібними пакетами є:

- простота у використанні;
- запис складних математичних виразів у тому вигляді, у якому їх, звичайно, записують інженери та науковці на аркуші паперу (тобто відсутність спеціальної мови програмування);
- легкість і наочність програмування задач;
- можливість будувати графіки.

Безсумнівним позитивом пакета є можливість обчислювати функції для багатьох значень аргументу, що дає змогу будувати таблиці й графіки без використання операторів програмування.

Перейдемо до розгляду прикладних задач (рівень В) з параграфу «Застосування інтегралів» підручника Г.Бевз та ін. Алгебра і початки аналізу [2].

Задача 1042. Прямокутна пластина зі сторонами a дм і b дм вертикально занурена у воду. Визначте силу тиску води на пластину, якщо на поверхні води знаходиться сторона, довжина якої a дм.

Розв'язання. Відомо, що зі збільшенням глибини тиск води збільшується. Він виражається формулою $p(x) = 9,8x$, де x – глибина в метрах, $p(x)$ – тиск води в кілопаскалях.

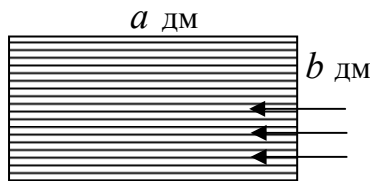


Рис. 1.

$$F = \int_0^h l F(x) dx = l \int_0^h F(x) dx$$

Знайдемо силу тиску води за формулою . Тоді згідно з умовою задачі та рисунка 1 $l = a$, $h = b$, $F(x) = 9,8x$.

$$F = a \int_0^b 9,8x dx = 9,8a \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \frac{9,8ab^2}{2} = 4,9ab^2 \quad (\text{Н}).$$

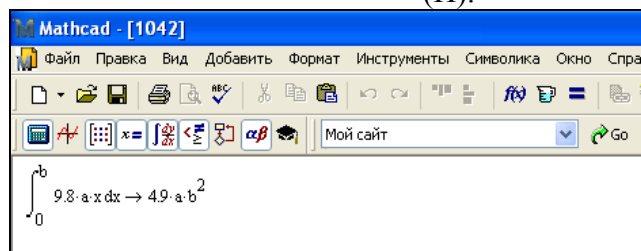


Рис. 2.

Відповідь. $4,9ab^2$ Н.

Задача 1043. Визначте силу тиску води на вертикальну перегородку в каналі, яка має форму півкруга радіуса a м, діаметр якого знаходиться на поверхні води.

Розв'язання. Відомо, що зі збільшенням глибини тиск води посилюється. Він виражається формулою $p(x) = 9,8x$, де x – глибина в метрах, $p(x)$ – тиск води в кілопаскалях.

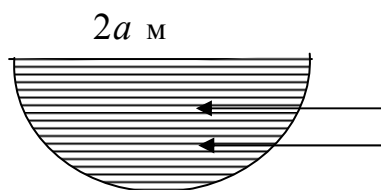


Рис. 3.

$$F = \int_0^h lF(x)dx = l \int_0^h F(x)dx$$

Знайдемо силу тиску води за формулою . Тоді згідно з умовою задачі та рисунка 3 $r = a$, $d = 2a$, $F(x) = 9,8x$.

$$F = 2a \int_0^a 9,8x dx = 2a \cdot 9,8 \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = 9,8a^3 \quad (\text{Н}).$$

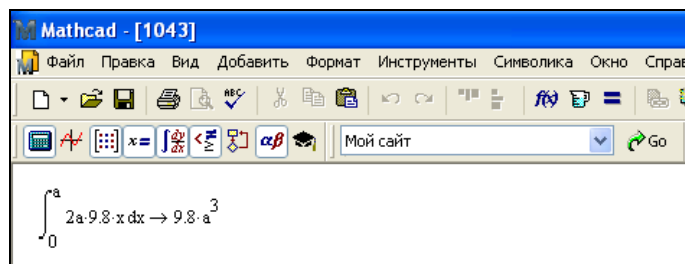


Рис. 4.

Відповідь. $9,8a^3$ Н.

Задача 1044. Обчисліть роботу, яка необхідна для того, щоб викачати воду зі півсферичного котла радіуса R м.

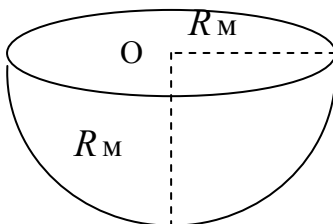


Рис. 5.

Розв'язання. Знаючи з фізики, що шукана робота обчислюється за формулою $A = \int_a^b F(x)dx$ та густина $\rho = 10^3$ кг/м³, знайдемо роботу за формулою $A = \rho \pi r^2 g \int_0^h x dx$. Тоді згідно з умовою задачі та рисунка 5 $r = R$, $h = R$.

$$A = 10^3 \pi R^2 g \int_0^R x dx = 10^3 \pi R^2 9,8 \frac{x^2}{2} \Big|_0^R = 500 \cdot 3,14 \cdot 9,8 \cdot R^4 = 15386 R^4 \quad (\text{Дж}).$$

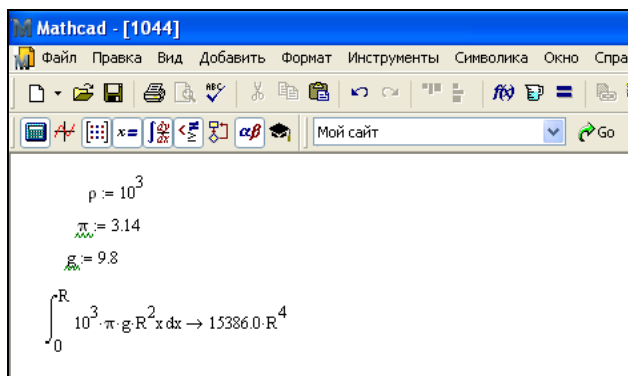


Рис. 6

Відповідь. $15386R^4$ Дж.

Задача 1045. Вода, що подається з площини основи у циліндричний бак через отвір у дні, заповнює весь бак. Визначить затрачену при цьому роботу. Висота бака $h = 3$ м, радіус основи $r = 1$ м.

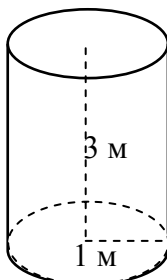


Рис. 7.

Розв'язання. Знаючи з фізики, що шукана робота обчислюється за формулою $A = \int_a^b F(x) dx$ та густина $\rho = 10^3$ кг/м³, здобудемо згідно з рисунком 7:

$$A = \rho \pi r^2 g \int_0^3 x dx = 10^3 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 9,8 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 10^3 \cdot 3,14 \cdot 4,9 \cdot 9 = 138474 \text{ (Дж)}.$$

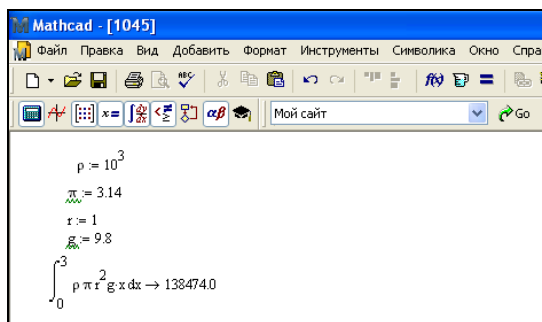


Рис. 8.

Отже, отриманий результат запишемо в коректній формі: $138474 \text{ Дж} = 138,474 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 138,474 \text{ кДж}$.

Відповідь. 138,474 кДж.

$$F_{b.st.} = l \rho g \int_0^l x dx = a \cdot 0,7 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \int_0^a x dx = 6860a \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = 3430a^3$$

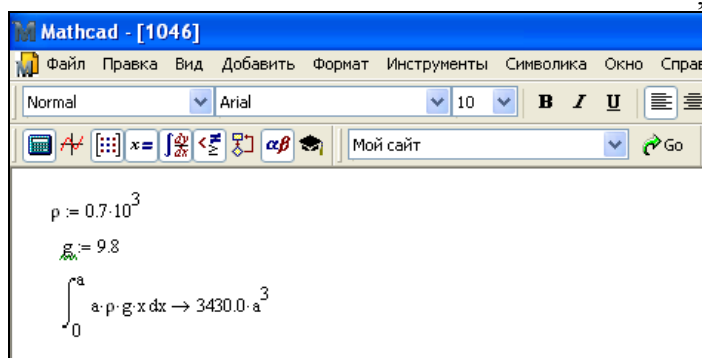


Рис. 9.

Задача 1046. Бак у формі куба заповнений бензином. Знайдіть відношення сил тиску бензину на дно бака і на його бічну стінку.

Розв'язання. Нехай a – сторона бака, який має форму куба. З фізики відомо, що густина бензину дорівнює $0,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Тоді сила тиску бензину на бічну стінку баку має формулу

$$F_{\text{b.st.}} = l \rho g \int_0^l x dx, \quad F_{\text{dn.}} = mg = \rho g V, \text{ де } V = a^3. \text{ Тоді}$$

$$F_{\text{dn.}} = \rho g V = 0,7 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot a^3 = 6860a^3, \text{ звідси } \frac{F_{\text{dn.}}}{F_{\text{b.st.}}} = \frac{6860a^3}{3430a^3} = \frac{2}{1}.$$

Відповідь. 2:1.

Задача 1047. Електричні заряди e_1 і e_2 (у Кулонах) відштовхуються із силою $F = k \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$, де k – сталий коефіцієнт, r – відстань між зарядами (у метрах). Яку роботу треба виконати, щоб відстань між зарядами з $r = a$ зменшилась до $r = b$?

Розв'язання. Дано два заряди e_1 і e_2 , які відштовхуються із силою $F = k \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$, відстань між ними $r = [a; b]$, тоді шукана робота обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \frac{k \cdot e_1 \cdot e_2}{r^2} dr$$

$$\text{Отже, } A = \int_a^b \frac{k \cdot e_1 \cdot e_2}{r^2} dr = k \cdot e_1 \cdot e_2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b = k \cdot e_1 \cdot e_2 \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{ke_1 e_2 (b - a)}{ab}.$$

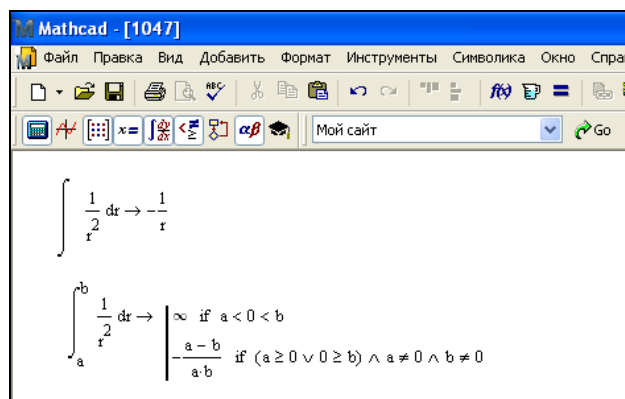


Рис. 10.

$$\frac{ke_1 e_2 (b - a)}{ab}$$

Відповідь. $\frac{ke_1 e_2 (b - a)}{ab}$.

Задача 1048. Яку роботу виконують, запускаючи ракету масою m (кг) з поверхні Землі на висоту h (м), якщо радіус Землі дорівнює R (м)?

Розв'язання. Якщо маса Землі дорівнює M , то $\frac{kMm}{R^2} = mg$, звідси $kM = gR^2$.

$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_R^{R+h} \frac{kMm}{x^2} dx$$

Шукана робота дорівнює $\int_R^{R+h} \frac{kMm}{x^2} dx$. Отже,

$$A = \int_R^{R+h} \frac{kMm}{x^2} dx = \int_R^{R+h} \frac{gR^2m}{x^2} dx = gR^2m \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_R^{R+h} = gR^2m \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right) = \frac{gRmh}{R+h}$$

Відповідь. $\frac{gRmh}{R+h}$.

Підводячи підсумки, можна сказати, що Mathcad поєднує в собі практично все, що може знадобитись для спрощення розрахунків, як це було показано на вище згаданих задачах.

Mathcad є математичним редактором, що дає змогу проводити різноманітні наукові й інженерні розрахунки, починаючи від елементарних арифметичних дій і завершуючи складними реалізаціями числових методів. Завдяки простоті використання, наочності математичних дій, значній бібліотеці вбудованих функцій і числових методів, а також яскравому апарату подання результатів, Mathcad зарекомендував себе прекрасним математичним пакетом, яким можуть користуватися учні загальноосвітніх шкіл.

Література:

1. Афанасьєва О.М. Математика. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. Закладів : рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Освіта, 2011. – 400 с.
3. Бевз Г.П. Математика: 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011. – 320 с.
4. Дубинін А.І. Використання пакета Mathcad у хімічній інженерії : навч. посібник. — Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010. – № 51. – 240 с. – (Серія «Дистанційне навчання»).
5. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2011. – 431 с.
6. Нелін Є.Н. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є.Н. Нелін, О.Є. Долгова. – Х. : Гімназія, 2011. – 448 с.

У статті аналізуються деякі шкільні підручники з математики на наявність задач прикладної та професійної спрямованості з обраної теми, розв'язування задач за допомогою педагогічних програмних засобів.

Ключові слова: підручник, прикладна задача, педагогічний програмний засіб.

В статье анализируются некоторые школьные учебники по математике на наличие задач прикладной и профессиональной направленности с избранной темы, решая задачи с помощью педагогических программных средств.

Ключевые слова: учебник, прикладная задача, педагогическое программное средство.

In the article some school textbooks are analysed from mathematics in the presence of tasks of the applied and professional orientation from a select theme, using the decision of tasks by means of pedagogical software.

Keywords: the textbook, an applied problem, a pedagogical software.