

Проте, є підстави вважати, що дані факти лише тимчасові явища, які у недалекому майбутньому, завдяки спільній та скоординованій діяльності науковців, фахівців з питань профорієнтації, практиків, законодавців будуть подолані.

Висновки. Отже, профорієнтаційна робота забезпечує учнівську молодь всебічною інформацією щодо професій, які користуються попитом на ринку праці, вимог, що висуває певна професія до психофізіологічної сфери людини, допомагає школярам визначити їхні особистісні психофізіологічні особливості та зробити правильний вибір професійної діяльності. Своєчасне реагування на попит ринку праці, інтеграція різнорівневих освітніх програм, розвиток соціального партнерства, упорядкування профорієнтаційної навчально-матеріальної бази у відповідності до сучасних вимог, впровадження в навчально-виховний процес сучасних педагогічних технологій – все це сприятиме вихованню справжніх професіоналів, які зможуть на рівних конкурувати на світовому ринку праці.

Як свідчать результати аналізу даної проблеми, у системі профорієнтаційної роботи з учнівською молоддю ще й досі існують значні прогалини, зумовлені певними суб'єктивними та об'єктивними факторами нашого сьогодення. Але, разом з тим, відбувається поступове вдосконалення, подолання деяких негативних тенденцій профорієнтаційної діяльності з учнівською молоддю, завдяки спільним зусиллям науковців, практиків, державних діячів та інших зацікавлених у вирішенні даної проблеми осіб.

Література:

1. Збірник нормативних, інструктивних та методичних матеріалів з питань професійної орієнтації незайнятого населення та інших категорій громадян. – К.: ДЦЗ ІПКДСЗ, 1997. – 136 с.
2. Маршавін Ю. Шлях до узгодження попиту й пропозиції // Праця і зарплата. – 2006. - №25. – С. 4.
3. Ринок праці та зайнятість населення // Бюлетень ІПКДСЗУ. – 2007. – № 4.
4. Стан надання послуг незайнятому населенню службою зайнятості Хмельницької області за січень – грудень 2007 року // Аналітико-статистичний збірник. – Хмельницький, 2007.
5. Харламенко В. Формування в учнів профорієнтаційних понять на уроках з основ вибору професії // Трудова підготовка з закладах освіти. – 2006. - №4. – С. 38-41.

УДК 372.4 (477)

О.М. Василенко,
м. Хмельницький, Україна

АНАЛІЗ СТАНУ АДАПТАЦІЇ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ З ОСОБЛИВИМИ ПОТРЕБАМИ ДО НАВЧАННЯ У ВІТЧИЗНЯНИХ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ЗАКЛАДАХ

Постановка проблеми. Актуальним питанням нині є всебічний розвиток особистості та індивідуальності дітей з особливими потребами під час навчання їх у загальноосвітніх школах. У зв'язку з цим перед школою постають дві серйозні проблеми: по-перше, як допомогти цим дітям нормально розвиватись та навчатись і, по-друге, як звести до мінімуму можливі негативні наслідки їх спільного навчання із здоровими дітьми.

Проблеми, пов'язані з діагностикою соціально-педагогічної адаптації особистості з вадами психофізичного розвитку дуже складні. До нині немає спеціальної методики, яка б надійно розв'язувала завдання комплексної психодіагностики адаптації особистості. Складність полягає в тому, що комплексна психодіагностика адаптації має бути одночасно спрямована як на діагностику загального рівня адаптації особистості дитини, так і на діагностику її конкретного стану, адаптаційного потенціалу.

Аналіз наукової літератури свідчить, що соціально-психологічні аспекти адаптації особистості з обмеженими можливостями до нових умов життєдіяльності представлені в роботах Л. Виготського, Т. Комар, В. Скрипник, Л. Солнцевої, М. Томчука та ін. Педагогічні

аспекти адаптації розглянуті в працях таких педагогів як О. Берак, В. Давидова, І. Мяглова, Н. Талізїна, М. Чайковський та їн.

Складні питання діагностики, класифікації психічного і фізичного розвитку дітей добре висвітлені у дослідженнях І. Аптера, Н. Сибірцевої, Ц. Каргузанської, О. Володимирського, А. Сукачова, О. Щербини, В. Тарасович, М. Тарасович та їн. [1].

Вагомий внесок в розробку методик для дослідження розумового розвитку дітей дошкільного та шкільного віку з метою диференціації властивих їм відхилень зробили українські вчені-дефектологи Н. Стадненко, Т. Ілляшенко, А. Обухівська, Т. Марчук, Л. Борщевська [2].

Аналіз праць учених доводить необхідність розробки інноваційних технологій, програм, методик, орієнтованих на діагностику процесу адаптації до навчання в загальноосвітніх школах дітей з особливими потребами.

З огляду на це, **метою статті** є аналіз стану адаптації до навчання в загальноосвітніх школах учнів молодшого шкільного віку з особливими потребами та розробка методики визначення рівнів адаптованості молодших школярів з обмеженими можливостями до шкільного навчання.

Для з'ясування сучасного стану адаптації до навчання в загальноосвітніх школах молодших школярів з особливими потребами, ми провели констатуючий експеримент, в якому взяло участь 59 учнів з особливими потребами других класів Хмельницьких навчально-виховних об'єднань № 9 та №3 (28 молодших школярів з обмеженими можливостями НВО № 9 та 31 молодший школяр з обмеженими можливостями НВО № 3).

Основними методами констатуючого дослідження були обрані: спостереження, бесіда, психодіагностичні методики (тести: Тестова бесіда (автори А. Керн, Я. Йєрасек), Тест шкільної тривожності за Філіпсом; методики: методика оцінки рівнів ворожості, конфліктності, агресивності і негативізму «Будинок-дерево-людина», проєктивна методика «Кінетичний малюнок сім'ї») та анкети для батьків дітей з особливими потребами.

Одним із основних методів дослідження адаптації молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі нами було обрано спостереження. За допомогою цього методу досліджувалась поведінка дітей у класі протягом двох годин щоденно. Спостерігаючи за дітьми, ми аналізували їхні типові прояви поведінки протягом занять та під час ігор з однолітками, що дало можливість одержати значну інформацію для створення програми дослідження. Бесіди з учнями, які мають психофізичні вади розвитку дозволили уточнити особистісні властивості, стани, думки, ставлення досліджуваних до навчання, товаришів, вчителів, до самих себе тощо.

Дослідження проводилось за створеною нами *методикою визначення рівнів адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі*, яка складалась з трьох етапів:

Перший етап передбачав дослідження рівнів адаптованості дітей з особливими потребами до шкільного навчання за запропонованими автором психодіагностичними методиками: «Тестова бесіда (автори А. Керн, Я. Йєрасек)», «Кінетичний малюнок сім'ї», «Будинок-дерево-людина», «Тест шкільної тривожності за Філіпсом»), які дозволили, за допомогою балів показників даних тестів, з'ясувати адаптаційний рівень кожного молодшого школяра з обмеженими можливостями.

Варто зауважити, що рівні адаптованості за даною методикою визначались наступним чином: якщо в досліджуваного за чотирма чи трьома показниками виявлялась низька кількість балів, або за одним показником – середня, а за трьома – низька, то рівень адаптованості його визначався як *низький*; якщо за чотирма показниками досліджуваний набирив середню кількість балів, або ж за одним показником – низьку, а за іншими трьома – середню, то рівень адаптованості визначався – *середній*; якщо досліджуваний за всіма показниками набирив високу кількість балів або за трьома – високу, а за одним – середню, то в нього переважав *високий* рівень адаптованості до шкільного навчання.

**Методика визначення рівнів адаптованості молодших школярів з особливими
потребами до навчання в загальноосвітній школі**

Рівні	Продуктивність у навчальній діяльності (Тестова бесіда (автори А. Керн-Я. Йерасек)	Критерії		
		Сформованість умінь міжособистісного спілкування з вчителями та однолітками («Кінетичний малюнок сім'ї»)	Позитивне емоційне самопочуття («Будинок-дерево-людина»)	Відсутність внутрішньої напруженості («Тест шкільної тривожності за Філіпсом»)
Показники				
Бали				
Високий	24-29	1-8	1-5	1-2
	Навчальний матеріал засвоює легко. Глибоко і повно опановує програмовий матеріал, розв'язує ускладнені задачі. Виявляє зацікавленість до самостійної роботи, готується до всіх уроків.	Уважний до вказівок, вимог та пояснень вчителя. Доручення виконує охоче і сумлінно, без зовнішнього контролю. Добре вміє знаходити необхідні форми поведінки при розв'язанні зовнішніх і внутрішніх конфліктів.	Позитивно ставиться до школи, її правил і вимог. Самокритичний та відповідально ставиться до свого життя, адекватно сприймає себе і свої соціальні зв'язки.	Легко та швидко адаптується до школи (від 10-18 днів до 1 місяця). Спроможний долати труднощі, уміє вирішувати повсякденні проблеми, впорюватись із внутрішніми душевними кризами, здатний оптимістично сприймати життя.
Середній	20-23	9-13	6-11	3-6
	Розуміє навчальний матеріал, коли вчитель пояснює його досить детально і наочно. Засвоює основний зміст програми з усіх предметів. Майже завжди виконує домашні завдання. Ініціативу проявляє інколи. Має бажання самостійно розв'язувати задачі, але не вистачає знань і умінь.	Зосереджений і уважний під час виконання завдань, разом з тим потребує контролю з боку дорослих. Доручення виконує сумлінно, але не завжди розуміє справедливості вимогливості вчителя.	Відвідування уроків не спричиняє негативних переживань. Дружить з багатьма однокласниками, але іноді відчуває страх за самостійно прийняте рішення. Не одразу реагує та робить правильні висновки на критику вчителя, батьків.	Процес адаптації продовжується від 1 до 3 місяців і супроводжується незначним внутрішнім напруженням. Емоційний стан нормалізується повільніше. Не завжди готовий долати труднощі, вирішувати повсякденні проблеми.

Низький	15-19	14-26	23-33	7-10
	Матеріал, який пояснює учитель, засвоює фрагментарно, під час виконання самостійних завдань не виявляє інтересу. Для розв'язання задач за зразком потребує значної допомоги вчителя і батьків. Невпевнений у власних знаннях, має низьку мотивацію до навчання.	Потребує постійного контролю, систематичних нагадувань як з боку вчителя, так і з боку батьків. Доручення виконує під контролем і без особливого бажання. Пасивний, близьких друзів не має. Має проблеми у спілкуванні з оточуючими.	Має низьку самооцінку, песимістично ставиться до свого життя. Негативно або байдуже ставиться до школи. Часто скаржиться на пригнічений настрій.	Емоційний стан нормалізується досить повільно. Іноді цей процес триває кілька місяців або й до року. Наявне нервово-психічне напруження: тривога, агресія, дратівливість, імпульсивність, апатія, неприйняття оточенням.

На другому етапі проводилось дослідження зв'язку між запропонованими діагностичними методиками за допомогою коефіцієнта рангової кореляції Спірмена (r_s). Визначаючи адаптованість молодших школярів з особливими потребами до навчання в школі як, насамперед, відображення внутрішнього благополуччя дітей, яке пов'язане з високою продуктивністю їх у навчальній діяльності, сформованістю умінь міжособистісного спілкування, позитивним емоційним самопочуттям і відсутністю внутрішньої напруженості, необхідно визнати існування зв'язку між адаптацією учнів з обмеженими можливостями та визначеними нами її показниками. Тому, для перевірки цього припущення було використано обчислення кореляції через коефіцієнт рангової кореляції Спірмена (r_s) [3; с.208-223].

Третій етап передбачав зняття емпіричних даних після проведення експериментального дослідження за методикою визначення рівнів адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі та з'ясування сучасного стану адаптації дітей з вадами розвитку до шкільного навчання.

Для визначення переліку основних труднощів, які відчували молодші школярі з особливими потребами під час дослідження, ми провели процедуру їх ранжування (таблиці 2 і 3). При цьому дотримувалися загальноприйнятих у психологічних дослідженнях правил ранжирування: найменшому значенню кожного з показників нараховувався найменший ранг 1, а найбільшому значенню нараховувався ранг, що відповідав кількості значень, які підлягали ранжируванню. Загальна сума рангів повинна була співпадати з розрахунковою, яка визначалась за формулою [3; с.52]:

$$\sum(R_i) = \frac{N(N+1)}{2}$$

де N – загальна кількість значень, що підлягали ранжируванню.

Загальна сума рангів в досліджуваних НВО №9 виявилась рівною:

$$\sum(R_i) = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{28(28+1)}{2} = 406.$$

Загальна сума рангів в досліджуваних НВО №3 виявилась рівною:

$$\sum(R_i) = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{31(31+1)}{2} = 496.$$

Результати проведеного дослідження серед 28 учнів з обмеженими можливостями НВО №9 за методикою визначення рівнів адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання у загальноосвітній школі наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

№ п/п	«Тестова бесіда (автори А. Керн, Я. Йєрасек)»		«Кінетичний малюнок сім'ї»		«Будинок-дерево- людина»		«Тест шкільної тривожності за Філіпсом»	
	Бали	Ранг	Бали	Ранг	Бали	Ранг	Бали	Ранг
1.	14	8	13	3	23	3,5	9	5
2.	24	24	3	27,5	7	26	2	27,5
3.	21	15,5	6	20	11	19	6	15
4.	15	11	8	11,5	23	3,5	9	5
5.	20	13,5	7	15	11	19	4	22,5
6.	13	5	12	7,5	22	7,5	9	5
7.	23	21	6	20	9	23,5	3	25
8.	13	5	12	7,5	22	7,5	7	11,5
9.	22	18	5	23	11	19	4	22,5
10.	25	27	4	25	6	28	2	27,5
11.	12	2	8	11,5	23	3,5	9	5
12.	21	15,5	6	20	11	19	5	19,5
13.	13	5	13	3	23	3,5	9	5
14.	20	13,5	7	15	12	14,5	6	15
15.	25	27	3	27,5	7	26	3	25
16.	15	11	12	7,5	21	10	8	9,5
17.	24	24	6	20	19	12,5	5	19,5
18.	14	8	12	7,5	22	7,5	9	5
19.	24	24	4	25	9	23,5	5	19,5
20.	14	8	13	3	24	1	10	1
21.	22	18	7	15	11	19	6	15
22.	12	2	13	3	20	11	8	9,5
23.	23	21	6	20	11	19	5	19,5
24.	12	2	13	3	22	7,5	9	5
25.	22	18	7	15	12	14,5	6	15
26.	15	11	11	10	19	12,5	7	11,5
27.	25	27	4	25	7	26	3	25
28.	23	21	7	15	11	19	6	15

Результати проведеного дослідження за участю 31 учня з обмеженими можливостями НВО №3 за методикою визначення рівнів адаптованості молодших школярів з особливими потребами до шкільного навчання наведені в таблиці 3.

На основі одержаних результатів досліджень, проведених серед 28 молодших школярів з особливими потребами НВО №9 та 31 молодшого школяра з особливими потребами НВО №3, нами було визначено коефіцієнти рангової кореляції між середніми значеннями балів респондентів за показниками адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі [3; с.208-223].

Спочатку сформулювали гіпотези:

H_0 : кореляція між показниками адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі статистично значимо не відрізняється від нуля.

H_1 : кореляція між показниками адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі статистично значимо відрізняється від нуля.

Далі визначали коефіцієнт рангової кореляції r між a і b за формулою:

$$r = 1 - (6 \sum (a-b)^2) / (n (n^2 - 1)),$$
де d – різниця між рангами за двома перемінними для кожного з досліджуваних;
 N – кількість значень, які підлягають ранжируванню, в даному випадку кількість досліджуваних.

Таблиця 3

№ п/п	«Тестова бесіда (автори А. Керн, Я. Йєрасек)		«Кінетичний малюнок сім'ї»		«Будинок-дерево- людина»		«Тест шкільної тривожності за Філіпсом»	
	Бали	Ранг	Бали	Ранг	Бали	Ранг	Бали	Ранг
1.	24	25,5	2	28,5	8	28,5	3	25,5
2.	12	1,5	12	8	23	3	9	6,5
3.	20	14,5	6	21	15	17,5	6	15
4.	25	29,5	1	30,5	6	31	2	29,5
5.	25	29,5	1	30,5	7	30	2	29,5
6.	12	1,5	11	12	19	12,5	9	6,5
7.	13	4,5	12	8	23	3	9	6,5
8.	21	17	6	21	15	17,5	5	19,5
9.	24	25,5	9	14	11	24	3	25,5
10.	14	8	13	3	22	8,5	10	1
11.	15	11,5	13	3	22	8,5	7	13
12.	22	20	6	21	12	20,5	5	19,5
13.	22	20	6	21	12	20,5	5	19,5
14.	14	8	11	12	22	8,5	9	6,5
15.	15	11,5	12	8	22	8,5	9	6,5
16.	15	11,5	13	3	22	8,5	9	6,5
17.	25	29,5	2	28,5	8	28,5	2	29,5
18.	23	22,5	6	21	11	24	5	19,5
19.	24	25,5	6	21	11	24	3	25,5
20.	13	4,5	13	3	23	3	9	6,5
21.	14	8	12	8	23	3	9	6,5
22.	23	22,5	6	21	11	24	5	19,5
23.	15	11,5	11	12	23	3	8	12
24.	13	4,5	12	8	22	8,5	9	6,5
25.	20	14,5	5	26	19	12,5	6	15
26.	25	29,5	7	15,5	14	19	2	29,5
27.	13	4,5	13	3	16	15	9	6,5
28.	21	17	6	21	16	15	4	23
29.	22	20	7	15,5	11	24	5	19,5
30.	24	25,5	4	27	10	27	3	25,5
31.	21	17	6	21	16	15	6	15

Розрахунки емпіричного значення r_s довели, що коефіцієнти рангової кореляції між середніми значеннями балів респондентів за обраними показниками адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі становлять $r_s \approx 0,80 - 0,95$.

За таблицею XVI Додаток 1 [3; с.340] визначили критичні значення r_s :

$$r_{s \text{ кр.}} = \begin{cases} 0,38 & (p < 0,05) \\ 0,48 & (p < 0,01) \end{cases}$$

$$r_{s \text{ кр.}} = \begin{cases} 0,36 & (p < 0,05) \\ 0,46 & (p < 0,01) \end{cases}$$

У результаті співставлення $r_{s \text{ емп}}$ та $r_{s \text{ кр}}$ виявилось, що $r_{s \text{ емп}}$ перевищує $r_{s \text{ кр}}$, і це свідчить про те, що гіпотеза H_0 відхиляється, а приймається H_1 . Отже, кореляція між показниками адаптованості до шкільного навчання молодших школярів з особливими потребами НВО №9 та НВО №3 статистично значима ($p < 0,01$) і є позитивною.

Одержанні дані проведеного дослідження свідчать про те, що адаптаційні рівні учнів молодшого шкільного віку з обмеженими можливостями доцільно досліджувати за запропонованою методикою визначення рівнів адаптованості молодших школярів з особливими потребами до навчання в загальноосвітній школі.

Таким чином, результати проведеної методики дозволили нам визначити рівні адаптованості молодших школярів з вадами психофізичного розвитку до навчання в Хмельницьких загальноосвітніх закладах (НВО) № 9 та №3.

Таблиця 4

Рівні адаптованості молодших школярів з особливими потребами Хмельницьких НВО №9 та №3 (після проведення констатуючого дослідження)

№ п/п	Рівень адаптованості	Кількість дітей		%	
		НВО №9	НВО №3	НВО №9	НВО №3
1.	Високий	5	6	17,9	19,3
2.	Середній	11	11	39,2	35,5
3.	Низький	12	14	42,9	45,2

Висновок. Аналіз соціально-педагогічної, психологічної літератури з проблеми адаптації дітей з вадами розвитку до навчання в загальноосвітніх закладах та результати проведеного констатуючого дослідження свідчать про необхідність розробки і апробації в практичній діяльності загальноосвітніх шкіл соціально-педагогічних умов адаптації до шкільного навчання молодших школярів з особливими потребами.

Перспективами подальшого дослідження даної проблеми є розробка і обґрунтування соціально-педагогічних умов адаптації до навчання дітей з обмеженими можливостями у вітчизняних загальноосвітніх закладах та перевірка ефективності їх застосування шляхом проведення формувального етапу експериментального дослідження.

Література:

1. В. Бондар, В. Золотоверх. Інтерпретація еволюції спеціальної освіти: зародження, становлення, розвиток // Дефектологія. – 2004. - №1. – с. 2-10.
2. І. Родименко. Сучасна модель супроводу дітей з особливими потребами // Дефектологія. – 2003. - №2. – с. 20-24.
3. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. - Спб.: «Социально-психологический центр», 1996. - 350 с.

В статтє проведен анализ современного состояния адаптации младших школьников с особыми потребностями к учебе в общеобразовательных школах. Разработана методика определения уровней адаптивности младших школьников с особенными потребностями к учебе в школе, а также четко определены адаптационные уровни учеников с нарушениями развития начальных классов Хмельницких общеобразовательных учреждений.

ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ
КУРСІ АЛГЕБРИ

Стаття присвячена питанням введення дійсних чисел у шкільний курс алгебри, оскільки наявні шкільні підручники повною мірою їх не висвітлюють.

Одним із ключових питань, яке постає перед побудовою множини дійсних чисел, це питання розширення множини раціональних чисел, яка може здаватися, повністю задовольняє потреби людини. На перший погляд, здається, що множина раціональних чисел є неперервною, оскільки між будь-якими двома раціональними числами можемо вставити деяке раціональне число. Насправді, цей факт не означає, що множина раціональних чисел неперервна, але це означає, що вона *щільна*, тобто між будь-якими нерівними раціональними числами α і β міститься, по крайній мірі, одне раціональне число.

Методику аргументації того факту, що множина раціональних чисел є неперервною і що є зміст її розширювати до неперервної множини дійсних чисел ми і поставили за **мету даної статті**.

Перед послідовним викладом вище зазначеного матеріалу нам буде потрібне розуміння читачем поняття щільної множини, яке було описане вище, інтуїтивно зрозумілого поняття упорядкованої множини раціональних чисел за відношенням « $\leq$ » і архімедівськи розміщеної множини.

Означення 1. Множина раціональних чисел архімедівськи розміщена, якщо для будь-

яких раціональних чисел $\alpha = \frac{a}{b}$ і $\beta = \frac{c}{d}$, де a, b, c, d – цілі числа і $b \neq 0, d \neq 0$, причому $\beta > 0$, існує натуральне число n , таке, що $\beta \cdot n > \alpha$.

Існують різні рівносильні, між собою шляхи визначення неперервності розміщеної множини, зокрема, множини раціональних чисел. Для розгляду одного з них доцільно скористатися поняттям перерізу Дедекінда.

Означення 2. Перерізом Дедекінда упорядкованої множини M називається пара підмножин M_1 і M_2 множини M , які задовольняють умовам:

- 1. M_1, M_2 – непорожні підмножини, тобто $M_1 \neq \emptyset, M_2 \neq \emptyset$;*
- 2. Кожен елемент множини M належить одній і тільки одній з цих підмножин, тобто: $M_1 \cup M_2 = M, M_1 \cap M_2 = \emptyset$;*
- 3. Кожен елемент множини M_1 менший будь-якого елемента множини M_2 , тобто, якщо $\alpha \in M_1$ і $\beta \in M_2$ то $\alpha < \beta$.*

Для спрощення подальших записів переріз Дедекінда позначатимемо так: (M_1, M_2) .

Без коментарів розглянемо приклади, які роз'яснюють суть цього означення на прикладі множини натуральних чисел N , яка упорядкована відношенням « $\leq$ ».

Приклад 1. $(N; \leq)$ $N_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $N_2 = \{6; 7; 8; \dots\}$, (N_1, N_2) – переріз Дедекінда.

Приклад 2. $(N; \leq)$ $N_1 = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$, $N_2 = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$ (N_1, N_2) – не є перерізом Дедекінда.

Якщо (M_1, M_2) – переріз Дедекінда упорядкованої множини M , то M_1 часто називають нижнім класом перерізу, а M_2 верхнім класом перерізу, відповідно до цього можуть бути такі випадки:

1. У нижньому класі M_1 є найбільший елемент, а у верхньому класі є найменший. У цьому випадку говорять, що переріз зв'язаний із стрибком;
2. У нижньому класі є найбільший елемент, а у верхньому немає найменшого;
3. У нижньому класі немає найбільшого елемента, а у верхньому є найменший; у цих двох випадках, другому і третьому, говорять, що перерізи мають межу або зв'язані з межею.
4. У нижньому класі немає найбільшого елемента, а у верхньому найменшого. Кажуть, що переріз зв'язаний з розривом.

Відповідно до вище зазначених чотирьох ситуацій сформулюємо деякі теореми.

Теорема 1. Не існує перерізу розміщеної множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, зв'язаного із стрибком.

Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що (Q_1, Q_2) – переріз розміщеної множини $\mathbb{Q}$, зв'язаний із стрибком. Це означає, що в Q_1 є найбільший елемент α , а в Q_2 – найменший елемент β , (мал. 1), причому $\alpha < \beta$. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} \alpha &< \beta; \\ \alpha + \alpha &< \beta + \alpha; \\ 2\alpha &< \beta + \alpha; \\ \alpha &< \frac{\beta + \alpha}{2} \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{2} \in Q_2; \\ \alpha &< \beta; \\ \beta + \alpha &< \beta + \beta; \\ \beta + \alpha &< 2\beta; \\ \frac{\beta + \alpha}{2} &< \beta \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{2} \in Q_1. \end{aligned}$$

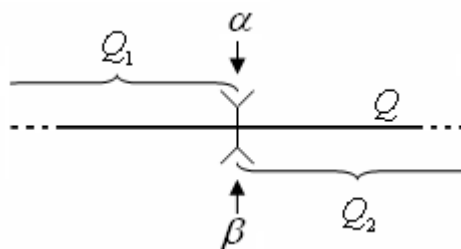


Рис. 1.

Отже, наше припущення хибне, оскільки один і той самий елемент не може належати двом множинам одночасно, другий пункт означення перерізу Дедекінда, таким чином теорему доведено.

Теорема 2. Існують перерізи розміщеного поля $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, зв'язані з межею.

Доведення. Віднесемо наприклад, до нижнього класу Q_1 всі від'ємні раціональні числа,

число нуль і всі додатні числа, менші $\frac{5}{2}$, а до верхнього класу Q_2 – всі інші раціональні числа. $\frac{5}{2}$ – це межа перерізу (Q_1, Q_2) , отже теорему доведено.

Теорема 3. Існують перерізи розміщеного поля Q , зв'язані з розривом.

Доведення. Покажемо спочатку, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Достатньо встановити цей факт для невід'ємних раціональних чисел. До речі, серед невід'ємних цілих чисел такого числа не існує, дійсно нехай $a \in Z$, якщо $a \leq 1$, то $a^2 \leq 1^2 < 2$, якщо $a \geq 2$ то $a^2 \geq 2^2 > 2$, тобто $a^2 \neq 2$.

Припустимо, що серед невід'ємних дробових чисел є таке число α , що $\alpha^2 = 2$.

Зрозуміло, що число α можна визначити різними дробами; серед них виберемо дріб $\frac{p}{q}$ – дріб з найменшим знаменником, причому p і q – натуральні числа, цей факт є наслідком того, що істинність теореми достатньо встановити для невід'ємних раціональних чисел. Дріб

$\frac{p}{q}$ нескоротний, оскільки p і q взаємно прості; інакше, скоротивши б його, ми отримали б дріб із ще меншим знаменником. По припущенню $\alpha^2 = 2$, тобто $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, звідки $\frac{p^2}{q^2} = 2$, $p^2 = 2q^2$. Остання рівність означає, що $p^2 : 2$, тоді $p : 2$, звідси $p = 2m$, тобто $p^2 = 4m^2$. Порівнявши $2q^2$ і p^2 маємо $2q^2 = 4m^2$, $q^2 = 2m^2$, звідси $q^2 : 2$, а тому $q : 2$. Отримали:

$\frac{p}{q}$ і q діляться на 2, а це суперечить тому, що дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний.

Отримана суперечність свідчить про те, що наше припущення неправильне, а тому $\alpha^2 \neq 2$, тобто квадрат будь-якого раціонального числа або більший за 2, або менший за 2. Фактично ми вказали на розрив у множині Q і тим самим побачили що множина раціональних чисел не є неперервною.

Приступимо тепер до доведення теореми безпосередньо. До нижнього класу Q_1 віднесемо всі від'ємні раціональні числа, нуль і будь-які додатні раціональні числа, квадрат яких менший за 2, а до верхнього класу Q_2 – всі додатні раціональні числа, квадрат яких більше за 2. Зрозуміло, що

(Q_1, Q_2) – буде перерізом Дедекінда розміщеного поля Q , тому, що:

1. $Q_1 \neq \emptyset$, $Q_2 \neq \emptyset$;
2. $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $Q_1 \cup Q_2 = Q$;
3. $\alpha \in Q_1$ $\beta \in Q_2 \Rightarrow \alpha < \beta$.

Покажемо, що переріз (Q_1, Q_2) поля Q зв'язаний із розривом, тобто у нижньому класі Q_1 немає найбільшого елемента, а у верхньому класі Q_2 немає найменшого.

Покажемо, що у нижньому класі Q_1 немає найбільшого елемента. Припустимо

протиілежне, тобто, що у нижньому класі Q_1 є найбільший елемент a , цим самим ми

визначаємо, що $a > 0$ і $a^2 < 2$. Побудуємо раціональне число $a_1 = \frac{a(a^2 + 4)}{2(a^2 + 1)}$. Встановимо, до якого класу воно належить. Для цього знайдемо різницю

$a_1 - a = \frac{a(a^2 + 4)}{2(a^2 + 1)} - a = \frac{a(2 - a^2)}{2(a^2 + 1)}$, очевидний факт, що чисельник і знаменник цього дробу більші за нуль, тому і весь дріб більший нуля. Якщо $a_1 - a > 0$, то $a_1 \in Q_2$.

В той же час, якщо розглянути різницю $a_1^2 - 2$ то матимемо $a_1^2 - 2 = \frac{a^2(a^4 + 8a^2 + 16)}{4(a^4 + 2a^2 + 1)} - 2 = \frac{a^6 + 8a^4 + 16a^2 - 8a^4 - 16a^2 - 8}{4(a^2 + 1)^2} = \frac{a^6 - 8}{4(a^2 + 1)^2} < 0$

Якщо $a_1^2 - 2 < 0$, то слідує, що $a_1^2 < 2$, тобто $a_1 \in Q_1$. Один і той самий елемент належить двом різним класам, що суперечить другій умові означення перерізу Дедекінда.

Припущення, що у нижньому класі Q_1 є найбільший елемент – хибне, отже, в Q_1 немає найбільшого елемента.

Припустимо тепер, що у верхньому класі Q_2 є найменший елемент b . Розглянемо

раціональне число виду $b_1 = \frac{b(b^2 + 4)}{2(b^2 + 1)}$, аналогічно можна показати, що $b_1 \in Q_1$ і $b_1 \in Q_2$, що знову суперечить другій умові означення перерізу Дедекінда.

Отже, наш переріз (Q_1, Q_2) зв'язаний з розривом, тобто не має межі, теорему доведено.

Зауваження. Межею цього перерізу є дійсне число $\sqrt{2}$, але $\sqrt{2}$ не є раціональним числом, це нами було доведено вище.

Таким чином побудований нами переріз (Q_1, Q_2) не має в Q границі, тобто немає у множині раціональних чисел числа, яке б зробило цей переріз. Ще раз повторимось, що цей переріз зв'язаний з розривом, і тому множина раціональних чисел перервна.

Відзначимо, що у множині раціональних чисел існує скільки завгодно таких перерізів. Можна замість числа 2 взяти будь-яке інше просте число, або добуток простих чисел, довівши, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює якому-небудь із цих чисел. Замість квадрата можна розглядати й інші степені.

На основі вище викладених міркувань дамо означення неперервної числової множини.

Означення 3. Числова множина називається неперервною, якщо будь-який переріз Дедекінда цієї множини має межу, яка належить цій самій множині.

Із теореми 3 і означення 3 слідує, що множина раціональних чисел не володіє властивістю неперервності. Звідси і постає задача – розширити множину раціональних чисел так, щоб нова множина була неперервною, саме архімедівськи розміщена неперервна множина, яка вміщує множину Q , якраз і називається множиною дійсних чисел.

У статті розглядаються питання пов'язані із розширенням множини раціональних чисел до множини дійсних чисел в курсі алгебри середньої школи.

The article deals with the questions connected with the enlargement of the set of rational real numbers in the course of algebra of secondary school.