

12. Шаболтас А. В. Мотиви заняття спортом вищих досягнень в юнацькому віці: автореф. дис. канд. пед. наук / А.В. Шаболтас. – СПб., 1998. – 21 с.

У статті наводяться результати дослідження оптимальної рухової активності; впливу мотивації досягнення успіху та мотивації уникнення невдач студентів на підвищення їх рухової активності. Студенти, орієнтовані на успіх, усвідомлюють значущість рухової активності, порівняно зі студентами, у яких через зниження інтересу до фізичної культури виникає дефіцит рухів і погіршення стану здоров'я.

Ключові слова: рухова активність, мотивація до досягнення успіху, мотивація уникнення невдачі, норми рухової активності.

В статье приводятся результаты исследования оптимальной двигательной активности; влияния мотивации достижения успеха и мотивации избегания неудач студентов на повышение их двигательной активности. Студенты, ориентированные на успех, осознают значимость двигательной активности, по сравнению со студентами, в которых из-за снижения интереса к физической культуре возникает дефицит движений и ухудшение состояния здоровья.

Ключевые слова: двигательная активность, мотивация к достижению успеха, мотивация избегания неудачи, нормы двигательной активности.

The article presents the results of a study of optimal physical activity; influence motivation to succeed and motivation of avoiding failure students to increase their physical activity. The students focused on success, aware of the importance of physical activity, compared with students who because of declining interest in physical culture movement and a deficit of ill health.

Key words: physical activity, motivation to achieve success, motivation of avoiding failure, the norms of motor activity.

УДК 378.147:37.022

Н.В. Кульчицька, Р.І. Собкович
м. Івано-Франківськ, Україна

ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Постановка проблеми. У курсі «Методика навчання математики» студенти знайомляться з основними завданнями методики, принципами та методами навчання, програмами та підручниками для загальноосвітньої школи, вимогами до підготовки та проведення уроку. Розглядають та аналізують змістові лінії шкільного курсу математики. На ґрунтовне вивчення окремих тем, особливо тих, що стосуються поглибленого вивчення предмету, часу не вистачає. Блок дисциплін за вибором дає можливість поглибити рівень підготовки майбутніх вчителів за рахунок вивчення різноманітних спецкурсів методичного спрямування: «Розв'язування задач з параметрами», «Основні методи доведення нерівностей», «Конструктивні задачі», «Новітні технології навчання».

Аналіз попередніх досліджень. Поряд із традиційними для елементарної математики задачами відшукування коренів різного типу рівнянь та їх систем, розв'язків нерівностей, часто можна зустрітися з необхідністю оцінювати та порівнювати певні величини. Такими можуть бути як числові вирази, так і вирази, що містять змінні. В окремих випадках може виявитися, що такі вирази зв'язані між собою відношеннями " $>$ ", " $\geq$ ", " $<$ ", " $\leq$ " не для окремих множин допустимих значень змінних, а для всіх можливих таких наборів. Прикладами таких

співвідношень можуть бути нерівності $x^2 + a^2 \geq 2ax$, $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\left(x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $\lg(1 + \sin^2 x) \geq 0$ та ін. У таких випадках є зміст говорити не про розв'язування, а про доведення нерівностей.

Мета статті – розглянути основні методи доведення нерівностей з параметрами та показати доцільність використання тих чи інших прийомів при вирішенні конкретних задач.

Виклад основного матеріалу. При доведенні нерівностей виду $f(a, b, \dots, k) > g(a, b, \dots, k)$ ($f < g$, $f \geq g$, $f \leq g$) змінні $a, b, \dots, k$ є рівноправними та виступають у ролі параметрів. Фіксуємо значення деяких з них у виді конкретних чисел, ми отримуємо частинні випадки початкової нерівності та серію різних задач, які в основному об'єднані єдиною ідеєю доведення.

Виділимо один із параметрів (нехай k) як основну змінну та позначимо її традиційно через x . Цей, на перший погляд зайвий крок, може навести на нові міркування. Так при доведенні нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$, яке реалізується, наприклад, додаванням очевидних нерівностей $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$, запис $x^2 + a^2 + b^2 \geq ax + bx + ab$ може наштовхнути на думку довести, що дискримінант квадратного тричлена $x^2 - (a+b)x + a^2 + b - ab$ не може бути додатним, або показати, що його найменше значення не є від'ємним.

При доведенні нерівності $f(a, b, \dots, x) > g(a, b, \dots, x)$ можна, користуючись методами диференціального числення, постаратися визначити мінімальне значення функції $h(x) = f(a, b, \dots, x) - g(a, b, \dots, x)$ та показати, що воно додатне. Відмовляючись від такого роду міркувань, в даній статті ми хочемо ще раз підкреслити доцільність використання інших прийомів, які у багатьох випадках є ефективнішими.

Аналітичний метод. Іноді може виявитися, що застосування розглянутих вище прийомів не приводить до потрібного результату, оскільки доведення нерівності за означенням може не бути реалізованою через громіздкість та складність перетворень, а синтетичний метод не вдається застосувати у зв'язку з тим, що не зрозуміло, з яких опорних нерівностей доцільно розпочати доведення. Одним з можливих варіантів у цьому випадку може бути застосування аналітичного методу.

Його суть полягає в тому, що після ряду перетворень нерівності, яку потрібно довести, отримують деяку очевидну вірну нерівність.

На мові логіки ми реалізуємо наступну схему такого пошуку:

$$B \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n,$$

де B – нерівність, яку потрібно довести, A_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) – отримані з неї нерівності, A_n – кінцева вірна нерівність. Реалізація такої схеми носить назву *аналізу Евкліда*. Природно, що відшукування нерівності A_n не може завершити доведення, оскільки імплікація $B \rightarrow A_n$ може бути вірною і у випадку, коли твердження B – хибне. Тому далі обґрунтовують можливість здійснення зворотних міркувань, тобто істинність імплікацій

$$A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow B.$$

Фактично тепер ми реалізуємо схему синтетичного методу, причому початкова опорна нерівність цього методу (у нашому випадку – це твердження A_n) відома.

Задача 1. Знайти радіус найбільшого з кіл, що дотикаються до параболи $y = kx^2$ у її вершині, лежать з нею в одній півплощині відносно спільної дотичної та мають з параболою єдину спільну точку.

Розв'язання. Очевидно, що центр шуканого кола розташований на осі симетрії параболи. Нехай це точка $M(0, a)$ (рис. 1). Рівняння кола запишеться у вигляді: $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ або $x^2 - 2ay + y^2 = 0$.

Вимагаючи, щоб система

$$\begin{cases} y = kx^2, \\ x^2 - 2ay + y^2 = 0 \end{cases} \text{ мала єдиний}$$

розв'язок, із рівняння $y^2 + \left(\frac{1}{k} - 2a\right)y = 0$

отримуємо $y_1 = 0 = y_2 = 2a - \frac{1}{k}$, звідки $a = \frac{1}{2k}$. Це і є радіус шуканого кола.

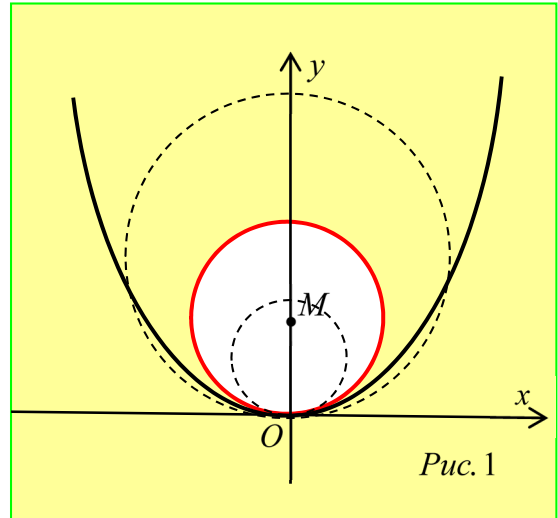


Рис. 1

Метод доведення від супротивного. Доведення нерівностей цим способом полягає в тому, що заперечується початкове твердження, тобто знак $> (\geq, <, \leq)$ у нерівності замінюється на $\leq$ (відповідно $<, \geq, >$). Після цього обґрунтовують, що таке співвідношення неможливе.

Задача 2. Довести, що для всіх дійсних значень x виконується нерівність $(x - 6a)(x - 9a)(x^2 - 5ax + 4a^2) + a^2x^2 + 73a^2 \geq 10ax$.

Доведення. Припустимо, що виконується нерівність

$$(x - 6a)(x - 9a)(x^2 - 5ax + 4a^2) + a^2x^2 + 73a^2 < 10ax.$$

Перетворимо різницю виразів у лівій та правій частині даного співвідношення наступним чином:

$$\begin{aligned} & (x - 6a)(x - 9a)(x^2 - 5ax + 4a^2) + a^2x^2 + 73a^2 - 10ax = \\ & = (x - 6a)(x - 9a)(x - a)(x - 4a) + a^2x^2 + 73a^2 - 10ax = \\ & = (x^2 - 10ax + 9a^2)(x^2 - 10ax + 24a^2) + x^2 - 10ax + 73a^2 = \\ & = t(t + 15) + t + 64 = (t + 8)^2, \end{aligned}$$

де $t = x^2 - 10ax + 9a^2$. Тепер стає очевидним, що одержаний вираз не може бути від'ємним, тому наше припущення невірне. Цим самим нерівність доведено.

Метод підсилення при доведенні нерівностей. Нехай нам потрібно довести нерівність $A > B$, де A, B – деякі числові вирази або вирази із змінними. Вважатимемо, що є очевидною, або легко доводиться нерівність $A_1 > B_1$. Якщо нам вдасться довести нерівності $A > A_1$ та $B_1 > B$, то, очевидно, задача буде розв'язаною. Це впливає з ланцюжка нерівностей $A > A_1 > B_1 > B$. Іноді такий ланцюжок може бути довшим, а іноді навіть коротшим, якщо $A_1 = B_1$. Наприклад, щоб довести числову нерівність $\log_6 7 > \log_{2015} 2014$, достатньо зауважити, що $\log_6 7 > 1$, а $\log_{2015} 2014 < 1$. Такий прийом при доведенні нерівностей називають методом підсилення. При

застосуванні цього методу часто використовують співвідношення: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0, b \geq 0$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ при $ab > 0$; $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$ при $b > 0$; $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1}$ при $a > 0, b > 0$.

Задача 3. Відомо, що $x^2 + a^2 = 2015$. Довести, що виконується нерівність $x^{10} + a^{10} \geq 2015a^4x^4$.

Доведення. Запишемо нерівність у вигляді $\frac{x^6}{a^4} + \frac{a^6}{x^4} \geq 2015$. Тепер, двічі використовуючи

нерівність $\frac{x^2}{y} \geq 2x - y$, де $y > 0$, перетворимо її ліву частину. Отримуємо

$$\frac{x^6}{a^4} + \frac{a^6}{x^4} \geq \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{x^4}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{a^4}{x^2} \geq \frac{x^2}{a^2} \cdot (2x^2 - a^2) + \frac{a^2}{x^2} \cdot (2a^2 - x^2) = 2\left(\frac{x^4}{a^2} + \frac{a^4}{x^2}\right) - (x^2 + a^2) \geq$$

$$\geq 2(2x^2 - a^2 + 2a^2 - x^2) - (x^2 + a^2) = x^2 + a^2 = 2015,$$

що і потрібно було довести.

Застосування векторів. Ідея застосування векторів при розв'язуванні окремих задач ґрунтується на таких простих геометричних міркуваннях.

1. Розглянемо два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Обчислимо число $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ (α – кут між векторами) – скалярний добуток цих векторів. Очевидно, що виконується нерівність $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, або в координатному вигляді

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Знак рівності в даному співвідношенні виконується за умови колінеарності векторів, тобто

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

при виконанні рівностей

2. Нехай виконується векторна рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Переходячи до довжин векторів, отримуємо, що $|\vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (нерівність трикутника). Оскільки $\vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, то з останнього співвідношення випливає, що

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Рівність в одержаному співвідношенні досягається при умові, що вектори колінеарні. В обох випадках кількість координат векторів може бути взята довільною, що дозволяє отримати більш загальні, ніж наведені вище, співвідношення.

Задача 4. При різних значеннях параметра a знайти найбільше значення функції $f(x) = \sqrt{x+a} + \sqrt{2x} + \sqrt{6-a-3x}$

Розв'язання. Область допустимих значень заданої функції визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x+a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a+3x \leq 6 \end{cases}$$

і являє собою в координатній площині xOa множину точок, що належать трикутнику OAB (рис. 2).

Введемо у розгляд вектори $\vec{l} = (\sqrt{x+a}, \sqrt{2x}, \sqrt{6-a-3x})$ та $\vec{k} = (1, 1, 1)$. Очевидно, що вираз, яким задана функція, являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин. Таким чином виконуються співвідношення

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{2x} + \sqrt{6-a-3x} = \vec{k} \cdot \vec{l} \leq |\vec{k}| \cdot |\vec{l}| =$$

$$= \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{x+a+2x+6-a-3x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}.$$

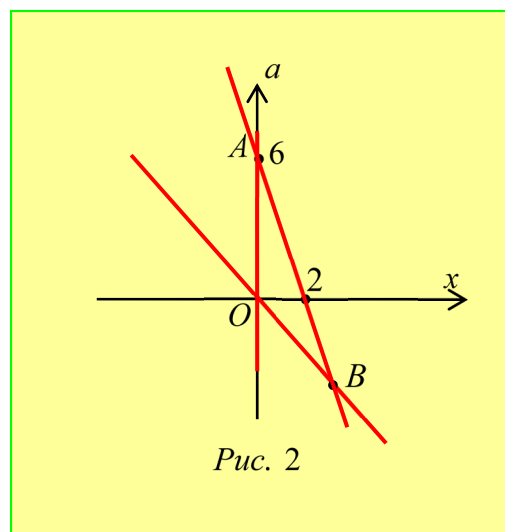


Рис. 2

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{x+a} = \sqrt{2x} = \sqrt{6-a-3x}$.

Із системи рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+a} = \sqrt{2x}, \\ \sqrt{x+a} = \sqrt{6-a-3x} \end{cases}$ дістаємо $\begin{cases} x = a, \\ 4x = 6 - 2a \end{cases} \Rightarrow x = a = 1$.

Очевидно, що знайдена точка $(1; 1)$ належить трикутнику OAB . Таким чином, $f_{\max.} = f(1) = 3\sqrt{2}$. Зауважимо, що фактично нами доведено той факт, що виконується нерівність $\sqrt{x+a} + \sqrt{2x} + \sqrt{6-a-3x} \leq 3\sqrt{2}$. Знак рівності досягається тільки у випадку, коли $x = a = 1$.

Застосування координатного методу. Відповідно до ідей координатного методу вводиться певна система координат. Тепер кожній парі значень змінних (a, b) можна поставити у відповідність точку з такими ж координатами. Лінійному рівнянню $ax + by + c = 0$ на координатній площині відповідатиме пряма. Алгебраїчний вираз $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ можна трактувати, як відстань між двома точками з координатами (x, y) і (a, b) та ін. Взагалі кажучи, певні алгебраїчні співвідношення тепер можна розглядати з точки зору співвідношень між геометричними фігурами та їх кількісними величинами. При доведенні нерівностей це робить його геометрично наглядним та створює ширші можливості для пошуку нових ідей доведень.

Задача 5. Знайти найменше значення виразу

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 6ay + 9a^2} + \sqrt{x^2 - 8ax + y^2 + 16a^2}$$

при різних значеннях параметра a .

Розв'язання. Запишемо даний вираз у вигляді $\sqrt{x^2 + (y-3a)^2} + \sqrt{(x-4a)^2 + y^2}$ та введемо у розгляд точки $O(0, 0)$, $A(4a, 0)$, $B(0, 3a)$, $M(x, y)$ (рис. 3). Маємо

$$AM = \sqrt{(x-4a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + (y-3a)^2}, \quad AB = 5|a|.$$

Тепер, користуючись нерівністю трикутника, можна стверджувати,

що $AM + BM \geq AB$ і для довільних значень x та y виконується співвідношення

$$\sqrt{x^2 + (y-3a)^2} + \sqrt{(x-4a)^2 + y^2} \geq 5|a|.$$

Отже, найменше значення виразу дорівнює $5|a|$. Рівність буде виконуватися для всіх точок відрізка AB .

Геометричні міркування в деяких задачах курсу математичного аналізу. При розв'язуванні задач математичного аналізу використовуються в основному методи саме цього предмету. Зокрема при відшуванні найбільших та найменших значень застосовується похідна, умовних екстремумів функцій двох та більше змінних – частинні похідні, площ та об'ємів – визначений інтеграл, тощо. Проте в окремих із таких задач ефективно можна використовувати геометричні міркування.

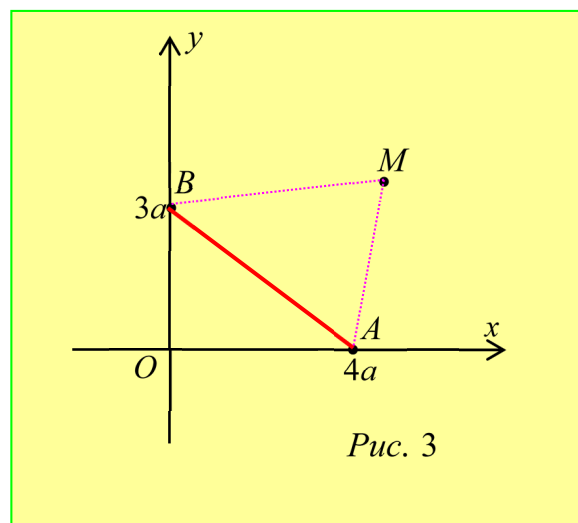


Рис. 3

Задача 6. На відстанях a та b від берегової лінії, яка має форму прямої, розташовані два острови A , B . Потрібно перебраться човном з одного з них на другий, запливши по дорозі на берег. Нехай H та N найближчі до островів точки на березі і $HN = l$. На якій відстані від точки H потрібно пристати човну, щоб час, затрачений на весь шлях, був мінімальним?

Розв'язання. Розглянемо довільну пряму s . Відкладемо на ній відрізок $HN = l$ та зобразимо дві точки A , B , розташовані на відстанях $AH = a$, $BN = b$ від прямої (рис. 4). Нехай M – довільна точка відрізка HN і $HM = x$. Тоді $MN = l - x$. Тепер задачу відшукування мінімального значення часу можна трактувати, як відшукування такого x , при якому сума відрізків $AM = \sqrt{x^2 + a^2}$, $BM = \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$ буде мінімальною. Дослідимо на мінімум функцію $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$.

Нехай точка B' – образ точки B при симетрії відносно прямої s . Тоді

$$AM + MB = AM + MB' = AB' > AM' + M'B = AM' + M'B',$$

де M' – довільна точка прямої, відмінна від точки M . Тому шукана точка M буде знаходитися на перетині прямих s та AB' . З подібності трикутників AHM та $B'MN$

$$\frac{HM}{AH} = \frac{MN}{NB'} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{l-x}{b} = \frac{l}{a+b} \Rightarrow x = \frac{al}{a+b}.$$

Отже, щоб час, затрачений на весь шлях, був мінімальним, човну потрібно пристати на відстані $\frac{al}{a+b}$ від точки H .

Дану задачу можна було розв'язувати, використовуючи методи диференціального числення. Проте перспектива відшукування похідних та подальшого розв'язування ірраціонального рівняння і дослідження зміни знаку похідної підкреслює доцільність застосування саме геометричних міркувань.

Висновок. Оволодіння студентами методами доведення нерівностей, особливо нерівностей з параметрами, суттєво поглиблює рівень їхньої математичної підготовки, формує та розвиває фахові компетентності майбутнього вчителя.

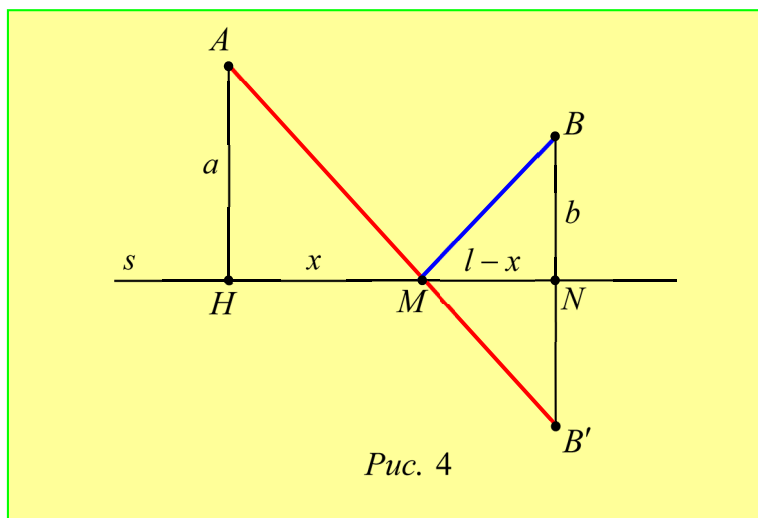


Рис. 4

Література:

1. Мерзляк А.Г. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач / А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С.Якир / – К.: Агрофирма «Александрія», 1993.–59 с.
2. Собкович Р.І. Основні методи доведення нерівностей / Р.І.Собкович, Н.В. Кульчицька – Івано-Франківськ, 2014. – 104 с.
3. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: „Видавництво А.С.К.», 2004.
4. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх / І.В. Федак – Чернівці.: Зелена Буковина. 2002. – 340 с.

У статті розглядаються та ілюструються задачами деякі методи доведення нерівностей з параметрами. Даний матеріал поглиблює знання студентів з методики навчання математики.

Ключові слова: нерівність з параметром, метод доведення, фахова компетентність, рівень математичної підготовки.

В статье рассматриваются и иллюстрируются задачами некоторые методы доказательства неравенств с параметрами. Данный материал углубляет знания студентов с методики преподавания математики.

Ключевые слова: неравенство с параметром, метод доказательства, профессиональная компетентность, уровень математической подготовки.

Some methods of proof of inequalities with parameters considered and illustrated in the examples in the article. This material deepens students' knowledge on methods of teaching mathematics.

Key words: inequality with a parameter, the method of proof, professional competence, level of mathematical training.

УДК 378

Г.З. Лаврін
м. Тернопіль, Україна

СТАВЛЕННЯ СТУДЕНТІВ ДО МОДЕЛЕЙ ОРГАНІЗАЦІЇ ФІЗИЧНОГО ВИХОВАННЯ У ВНЗ ТА СТИМУЛІВ ДЛЯ АКТИВНОЇ УЧАСТІ ЇХ У ФІЗИЧНОМУ ВИХОВАННІ

Актуальність. Інтенсифікації навчального процесу у вищих навчальних закладах протягом останніх років призводить до зниження обсягу рухової активності студентів [1; 3; 6]. Хронічний дефіцит рухової активності в режимі життя студентів стає загрозою не лише їхньому здоров'ю та нормальному фізичному розвитку, але й обороноздатності України. Тому необхідність обов'язкових занять з фізичного виховання у цьому віці цілком закономірна.

Єдиним дієвим способом підвищення рухової активності студентів ВНЗ та майбутніх фахівців є обов'язкові, факультативні та самостійні заняття фізичними вправами. Водночас недостатній обсяг обов'язкових навчальних занять з фізичного виховання не може забезпечити зміцнення здоров'я і підвищення рівня фізичного стану студентів [1].

У 26 статті закону України «Про фізичну культуру і спорт» йдеться, що фізична культура у сфері освіти має на меті забезпечити розвиток фізичного здоров'я учнів та студентів, а керівники навчальних закладів зобов'язані забезпечувати створення сприятливих умов для належної рухової активності учнів та студентів [4]. Хоча вимоги закону повинні виконуватись, на теперішній день тривають дискусії щодо виключення фізичного виховання, із переліку обов'язкових академічних предметів для всіх вишів.

За твердженням Міністра освіти і науки України Сергія Квіта: «Ми повинні зберегти фізичне виховання в університетах не з допомогою примусу, а шляхом залучення до здорового способу життя. Наше завдання – залучити до кафедр фізичного виховання більшість студентів, які не хочуть бути професійними спортсменами. Сучасна молода людина є прагматичною і тому дбає про своє здоров'я. Тому ми повинні піти їй назустріч» [2].

У зв'язку з цим міністерством було запропоновано моделі організації фізичного виховання у вищих навчальних закладах з метою забезпечення викладання фізичного виховання у вищих навчальних закладах на належному рівні [5].

Отже, актуальність дослідження з одного боку зумовлена важливістю та соціальною значущістю підвищення рівня рухової активності студента та виключенням фізичного виховання із обов'язкової навчальної дисципліни у ВНЗ, а з іншого – пропозиціями міністерства щодо можливих форм організації фізичного виховання.