УДК [37.016:514]
DOI: 10.31652/2412-1142-2021-60-272-281

Ленчук Іван Григорович
доктор педагогічних, професор, професор кафедри алгебри та геометрії
Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна
ORCID ID: 0000-0003-1923-9540
lench456@gmail.com

КОНСТРУКТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ З ПЕРЕРІЗАМИ

Анотація. На сьогодні у старших класах закладів загальної середньої освіти (ЗЗСО) на уроках геометрії розв’язують, головним чином, задачі обчислювального характеру без їх якісного рисункового супроводу. Однак, рисунок є головним засобом у геометрії. Схожий підхід до навчання найпершої з наук призвів до того, що студенти педагогічних університетів слабо володіють навичками розв’язування задач, не знають практичної (прикладної) геометрії, не вміють належним чином оперувати стереометричними фігурами. Ми, в межах даної статті, пропонуємо кардинально змінити підхід у викладанні та навчанні в першу чергу майбутніх учителів математики, збільшивши рисункове навантаження геометризацією звичайних задач на обчислення, помітно додавши конструктивізму шляхом формулювання їх умов з наголосом на практицизм. Продемонстровано лише один тип задач – із перерізами стереометричних тіл площиною, які можна розв’язувати не тільки обчислювально, але й побудовно, зокрема графічно (або графоаналітично), отримуючи результати практичного змісту через візуалізацію покрокових алгоритмів у відшуканні відстаней, кутів, площ плоских фігур тощо, тобто працюючи на картинній площині (зошит, дошка, комп’ютер чи будь-який інший мультимедійний засіб). Не рекомендується відкидати обчислювальний варіант розв’язання задачі, а застосовуючи графоаналітичний метод, використовувати певні результати обчислень з метою оптимізації рисункових операцій. Представлено п’ять базових способів задавання площини у просторі, які логічними міркуваннями обгрунтовуються в підручниках стереометрії для ЗЗСО. Річ у тім, що студенти (учні) не надто добре володіють питаннями можливих способів задавання площини в умовах задач обчислювального характеру, не мають належних навичок перезадавання січної площини, приведення її до одного із можливих базових способів та, нарешті, не розуміють, що без такого перезадавання задачу розв’язати неможливо. Розкрито прикладний бік дисципліни «Геометрія», адже площинні перерізи, розгортання поверхонь широко застосовуються в різних галузях промисловості.

Ключові слова: стереометрія; геометризація і конструктивізм задач; графічний та графоаналітичний методи.

1. ВСТУП

Постановка проблеми. Пригадується факт, який для Житомирського державного університету імені Івана Франка (в минулому – педагогічного інституту) можна вважати лише моментом у більше чим 100-літній історії. В кінці 50-х і на початку 60-х років минулого століття в тодішніх навчальних планах дисципліни «Методика математики» був уведений практичний розділ із моделювання стереометричних фігур. Уміло виготовляти моделі з картону, проволоки, скла і т. ін. навчали досвідчені, фахові педагоги. Ставилося конкретне завдання студенту і, щоб отримати залік, потрібно було виконати, здати на оцінку готову модель деякого тіла чи комбінації тіл. Серед інших були завдання і на фігури з перерізами. Суттєво, що теорією рисункового моделювання студенти не володіли, а працювали, головним чином, методом «спроб і помилок», проте ініціативно, творчо і результативно. Викладачі консультували, коригуючи реальне виготовлення моделі. Процес моделювання студентським загалом (чоловічої статі) сприймався позитивно.

У теперішній час більш доцільно займатися 3-D моделюванням у комп’ютерній графіці спеціалізованими програмними засобами із наступним представленням у мультимедіа. В такому разі постає вельми злободенна **проблема** *фахового володіння матеріалом евклідової геометрії* (стереометрії), й у тому числі, майбутніми вчителями інформатики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У підручнику для ЗЗСО зі стереометрії (§ 1) сформульовано аксіому $\mathbf{C}_3$, яку варто розуміти так: «… коли дві різні прямі a і b перетинаються в деякій точці M, то існує площина $\mathbf{\Sigma}$, яка містить прямі a і b. Площина, що має цю властивість, єдина» [1, с. 4]. Із практичної точки зору аксіома $\mathbf{C}_3$ встановлює ***перший спосіб*** *задавання площини* у просторі – **двома прямими**, які перетинаються.

Після подання аксіом стереометрії та уточнення окремих аксіом планіметрії щодо їх місця і ролі у просторі, доводять теорему про «Існування площини, яка проходить через задані точку і пряму». Отже, **точка і пряма**, коли точка не лежить на прямій, є де-факто ***другим способом*** *задавання площини*. Довівши першу ознаку належності прямої площині та теорему про «Існування площини, яка проходить через **три** задані **точки**», які не належать одній прямій, вочевидь отримаємо ***третій спосіб*** *задавання площини* [1, с. 4-7]. Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести єдине коло; з'єднавши точки відрізками, отримаємо трикутник; трикутник зовсім легко добудовати до паралелограма, трапеції тощо. Отже, задавати площину можна *будь-якою* **плоскою фігурою**. Це – ***четвертий спосіб*** *задавання площини* у стереометрії.

У темі «Паралельність прямих і площин» (§ 2) дається означення: «Дві прямі простору називаються ***паралельними***, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються». Таким чином, **дві паралельні прямі** забезпечують ***п'ятий спосіб*** *задавання площини*. Друга ознака належності прямої площині обґрунтовується теоремою: «Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну цій прямій, і тільки одну» [1, с. 10, 11].

«Моделювання в широкому сенсі – це особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об'єкта пізнання вибирає чи створює схожий з ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення. Моделювання – це процес створення та дослідження моделі, а модель – засіб, форма наукового пізнання» [Вікіпедія].

Нами напрацьовано завершену теорію і практику зображень стереометричних фігур та їх комбінацій на картинній площині [2]. Ми у змозі графічними (графоаналітичними) методами вирішувати й інші питання стереометрії практичного спрямування. Якщо врахувати можливості сучасних ІКТ, ППЗН та взяти до уваги результати досліджень у прикладній геометрії, наприклад з розгортання кривих поверхонь [3, с. 7-10], то такого роду комп'ютерне 3-D моделювання могло б виконуватися з вельми високим ступенем точності.

Зауважимо, що в навчанні окрім доведень важливі «*візуальна культура*» як викладачів, так і студентів [4], уміння розв'язувати стереометричні задачі не лише обчислювального, але й **конструктивного** (побудовного) характеру. Покрокове моделювання і бінарне відтворення зображеннями операцій із просторовим фігурами сприяє наочно-образному з'ясуванню *позиційних* та *метричних* залежностей між елементами заданих фігур, їх розумінню.

Указані у шкільному підручнику способи задавання площини у просторі є *базовими*, що обґрунтовані теоретично. Однак, в обчислювальних задачах стереометрії, зокрема, на перерізи тіл площиною, трапляються й інші (не базові) варіанти задавання площини [5].

Мета статті – розкрити прикладами питання: Як у незвичній ситуації, працюючи над геометризованою задачею конструктивно, міркувати і діяти вчителю, студенту, учню?

2. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Задача 1. *Знайдіть довжину діагоналі* AC_1 *правильної* 4*-кутної призми* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *зі стороною основи* 5*, якщо довжина спільного перпендикуляра між цією діагоналлю та мимобіжним з нею ребром основи* BC *дорівнює* 4.

Сформульовано звичайну задачу на **обчислення**. Розв'яжемо її (рис. 1).

Виконаємо внутрішнє ортогональне проекціювання діагоналі AC_1 і ребра BC на грань призми DCC_1D_1. Так, ребро BC вироджується в точку C, а діагональ AC_1 проекціюється в діагональ DC_1 цієї грані. Опускаємо перпендикуляр з точки C на DC_1 (т. M_1 – основа перпендикуляра, обирається на **кресленні-картині** довільно). Оберненим проекціюванням маємо зображення MN спільного перпендикуляра.

Із прямокутного трикутника DM_1C (за теоремою Піфагора): $DM_1 = 3$.

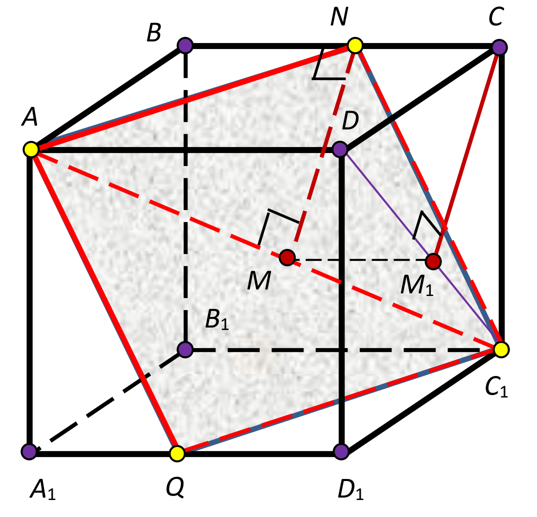

Рис. 1

У свою чергу, трикутник DCC_1 також прямокутний: $CM_1^2 = DM_1 \cdot M_1C_1$. Звідси $M_1C_1 = \frac{16}{3}$, $DC_1 = \frac{25}{3}$, а $CC_1 = \frac{20}{3}$.

Нарешті, із прямокутного трикутника ACC_1 ($AC = 5\sqrt{2}$) остаточно матимемо такий результат: $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = \frac{850}{9}$ і $AC_1 = \frac{5\sqrt{34}}{3} \approx 9{,}72$. (*)

Задачу на обчислення розв'язано.

Додамо **конструктивізму** і **практицизму** в її умову, переформулювавши висновок: 1) Знайдіть **графічно** площу перерізу призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, який задається діагоналлю AC_1 та спільним перпендикуляром між діагоналлю і мимобіжним з нею ребром основи BC. 2) Оцініть точність виконаних графічних операцій. 3) Побудуйте розгортку зрізаної призми.

Уявимо, що ми призму тримаємо в руках і, рухаючись, кладемо ребром D_1C_1 на картинну площину ($D_1C_1 = 5$ в оригіналі) (рис. 2, *а*).

Обертаючи прямокутник DCC_1D_1 навколо ребра нульового рівня D_1C_1, суміщаємо його з площиною зображень ($D_1C_1D'C'$): а) на відрізку D_1C_1 як на діаметрі проводимо коло з радіусом $R_1 = 2{,}5$; б) розділимо D_1C_1 на п'ять рівних частин і з центром у точці D_1 радіусом $R_2 = 4$ проводимо ще одне коло; в) фіксуємо точку P перетину обох кіл; г) промінь C_1P у перетині з променем, що має початок у точці D_1 і перпендикулярний D_1C_1, дає точку D' – третю вершину трикутника (з катетом $D_1C_1 = 5$ і висотою $D_1P = 4$, проведеною з вершини прямого кута D_1); д) четверта вершина грані в оригіналі добудовується просто.

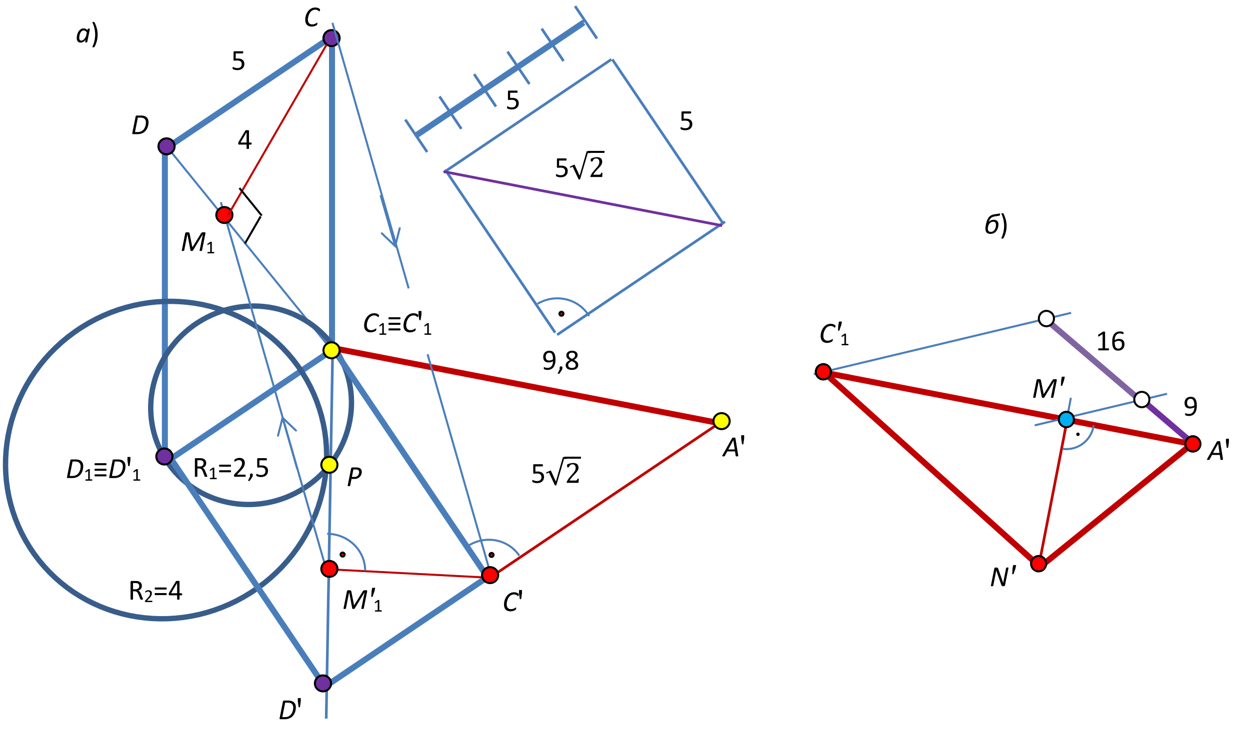

Рис. 2

Тепер, на відрізку C_1C' як на катеті, будуємо оригінальний прямокутний трикутник $A'C_1C'$, в якого катет $A'C' = 5\sqrt{2}$, а гіпотенуза $A'C_1$ зображена в натуральну величину і (за наближеними комп'ютерними замірами) рівна 9,8, що у порівнянні (9,72, див. (*)) дає похибку: $9{,}8 - 9{,}72 = 0{,}08$; $\frac{0{,}08}{9{,}72} \cdot 100\% = 0{,}82\%$.

Далі вводимо до розгляду площина перерізу призми. Хоча і задається вона перетином двох прямих, проте одна з них (спільний перпендикуляр MN) поки що відсутня, її потрібно строго побудовно зобразити на картинній площині. Інакше практично неможливо буде з'ясувати форму фігури перерізу і працювати з перерізом метрично.

Легко бачити, що $\frac{DM_1}{M_1C_1} = \frac{AM}{MC_1} = \frac{9}{16}$, а площа паралелограма ANC_1Q рівна площі двох трикутників ANC_1. Сумістивши з картинною площиною трикутник ANC_1 (рис. 2, *б*), отримаємо шукану площу: $S_{\text{ANC1Q}} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC_1 \cdot MN \approx 38{,}48$.

В оригіналі: $S_{\text{ANC1Q}} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC_1 \cdot MN = 38{,}88$. Отже, $\Delta S = 0{,}4$; $\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = 1{,}029\%$.

Побудуйте самостійно розгортку зрізаної призми за її відомими елементами (рис. 2).

Задача 2. *Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює а, площа її перерізу, що має форму квадрата, дорівнює* m^2*. Знайдіть відношення бічної поверхні піраміди до площі її основи.*

Тут січна площина задається формою фігури перерізу та її визначальними метричними параметрами, проте місце перерізу нефіксоване.

Найперше варто з'ясувати розташування перерізу відносно окремих елементів піраміди. Мислимо просто. У квадрата кожна із чотирьох сторін рівна m, протилежні сторони попарно паралельні, а суміжні – перпендикулярні. Граней у трикутної піраміди теж чотири і кожна пара граней у перетині висікає спільне ребро. Відомо також, що будь-яка площина, паралельна лінії перетину двох інших площин, перетинає ці площини уздовж двох прямих, паралельних лінії перетину. Звідси випливає, що січна площина, по-перше, перетинає всі грані піраміди та, по-друге, одна пара протилежних сторін квадрата паралельна, наприклад, ребру AB у гранях SAB і CAB, а друга пара – ребру SC у гранях SAC і SBC (рис. 3).

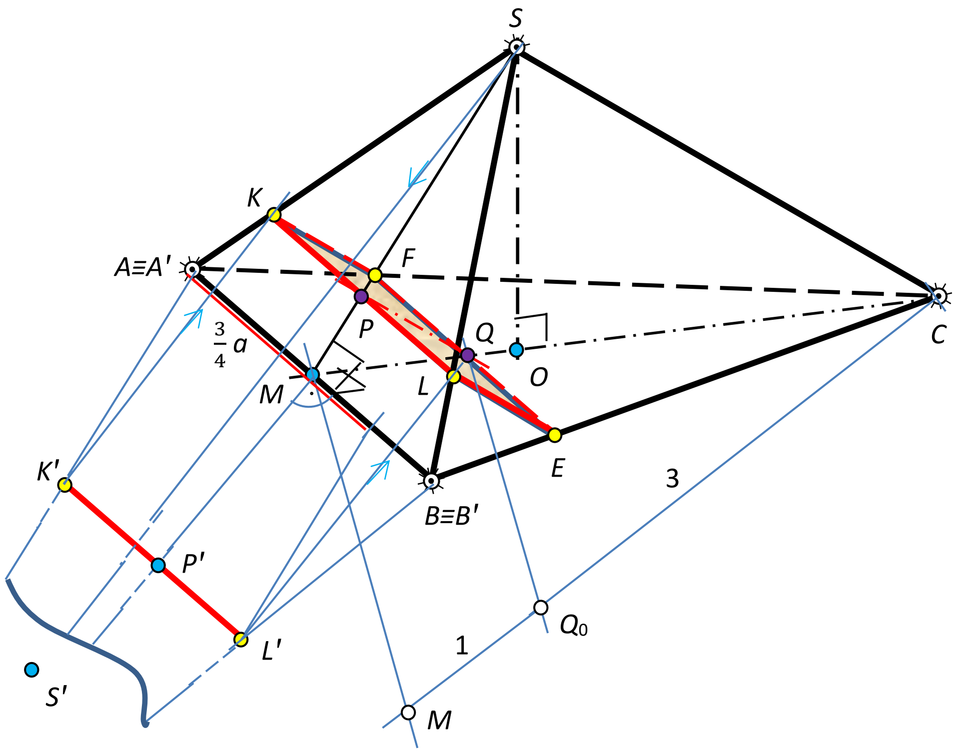

Рис. 3

Оперуючи **кресленням-картиною** (зображення відсутнє), надто важливо витримати на картинній площині обумовлену паралельність сторін квадрата відповідним ребрам уже накресленої піраміди, його ж розташування (наприклад, вибір точки P на апофемі лівої грані SM) – не суть значимо. Задачу розв'язуємо аналітичним методом міркувань.

Бічна поверхня піраміди $S_б = 3\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SM$, де $AB = a$, а SM у прямокутному трикутнику SMB слід виразити через a і m. Площина квадрата $KLEF$ перетинає осьовий переріз SMC уздовж відрізка $PQ \parallel SC$. Отже, трикутники SMC і PMQ подібні, тобто $\frac{SC}{PQ} = \frac{CM}{QM}$. З цього відношення можна знайти довжину бічного ребра піраміди. Але попередньо потрібно визначитися з місцем точки Q на медіані CM в основі піраміди SMC. Фіксуємо ще одну пару подібних трикутників: CFE і CAB. Тут $\frac{CQ}{CM} = \frac{FE}{AB}$, де $FE = m$, $AB = a$, а $CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Звідси маємо $CQ = \frac{m}{2}\sqrt{3}$. Далі, повернувшись до попередньої пропорції, де $QM = CM - CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - m)$, знайдемо: $SC = \frac{am}{a-m}$. Скориставшись теоремою Піфагора, матимемо вираз для апофеми бічної грані піраміди $SM = \frac{a\sqrt{3m^2-a^2+2am}}{2(a-m)}$ (*) і, як результат, отримаємо вираз для її бічної поверхні $S_б = \frac{3a^2\sqrt{3m^2-a^2+2am}}{4(a-m)}$. Площа основи піраміди $S_о = \frac{1}{2}AB\cdot CM = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Поділивши бічну поверхню піраміди на площу її основи, остаточно отримаємо такий вираз: $\frac{S_б}{S_о} = \frac{\sqrt{9m^2-3a^2+6am}}{a-m}$ (**). Задачу розв'язано.

Тепер **геометризуємо** висновок задачі, додаючи **конструктивізму**: 1) На вже готовому зображенні піраміди $SABC$ побудуйте її квадратний переріз. 2) Розгорніть на картинну площину поверхню піраміди, нанесіть на розгортку лінію перерізу. 3) Оцініть точність виконаних конструктивних операцій.

Основним поняттям у конструктивній геометрії є відношення «побудувати геометричну фігуру». Загальна аксіоматика та аксіоми циркуля і лінійки індукують найпростіші та основні побудови. Фактично, аксіоми конструктивізму стосуються лише вказаного основного відношення і, певною мірою, умовні, що випливають з базової аксіоматики геометрії та цілісної теорії, розбудованої дидактичним шляхом на визначеній системі аксіом. У середовищі загальних аксіом вирізняємо одну з них: «Усяка задана в умові задачі фігура, побудована».

У нашій ситуації, будемо вважати, що відрізки a і m задані (накреслені) або ж, для конкретики, відрізок m є частиною відрізка a (наприклад, $m = \frac{3}{4}a$, а відрізком a в оригіналі оберемо ребро основи $AB \equiv A'B'$). Це означає, що рухом у просторі ми «поклали» піраміду ребром AB на картинну площину.

Узявши до уваги попередньо виконані формально-аналітичні перетворення, переріз піраміди у формі квадрата можна побудувати двома різними способами.

Раніше встановлено, що $CQ = \frac{m}{2}\sqrt{3}$, а $QM = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - m)$, тому $CQ : QM = m : (a - m)$. Скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки, замірявши довжину відрізка $AB \equiv A'B' = a = 4{,}8$ см та пам'ятаючи, що $m = \frac{3}{4}a$, вельми просто знаходимо на медіані CA основи піраміди ABC точку Q, яку вміщує сторона квадрата FE. Добудова до повного квадрата випливає з попередніх міркувань.

Інший спосіб теж добре зрозумілий із рисунка. Тут бічна грань піраміди (точка S) методом суміщення (поворотом навколо прямої нульового рівня) «покладена» на площину зображень ($S \to S'$). Зроблено це з допомогою простої підстановки чисел $a = 4{,}8$ см, $m = 3{,}6$ см у вище отриману формулу (*), дякуючи чому підраховано (з досить високим ступенем точності) довжину апофеми бічної грані $SM = 14{,}195$ см. Такий підхід варто вважати більш прийнятним у нашій ситуації, адже зараз отримано бічну грань піраміди в оригінальному вигляді, що тепер дозволяє без проблем побудувати її розгортку. Це – **графоаналітичний** спосіб розв'язання задачі.

Розрізаємо (в уявленнях) піраміду *SABC* уздовж ребер *SC*, *CA* і *CB* та кладемо методом тріангуляції грані стереометричного тіла на картинну площину. Розміри беремо з рисунка 3: *A'B'* = 4,8 см, *M'* | *A'M'* = *M'B'*, *S'M'* ⊥ *A'B'* і *S'M'* = 14,195 см). З подібності трикутників *SMC* і *PMQ* шукаємо оригінальну відстань від основи піраміди *A'B'* до сторони квадрата *K'L'* на грані *S'A'B'*: *M'P'* = 3,55 см (рис. 4).

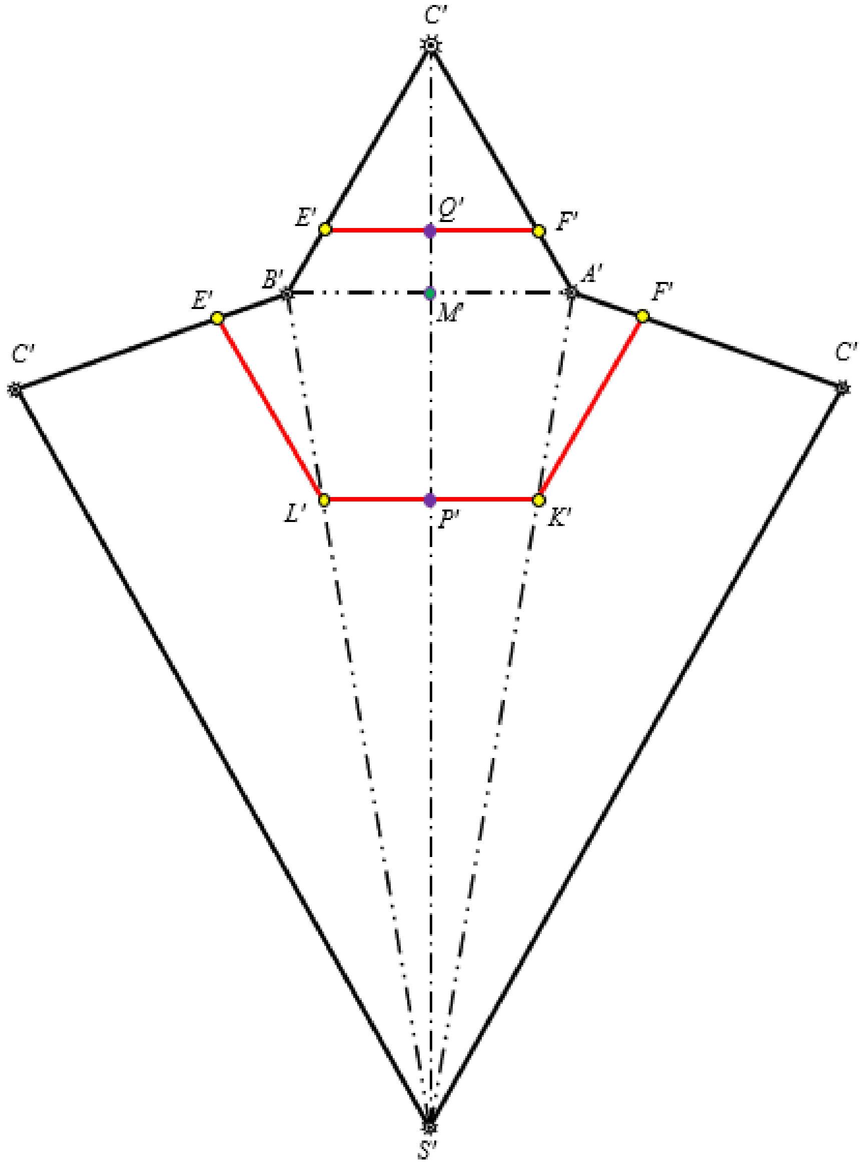

Рис. 4

Що стосується оцінки точності виконаних побудовних операцій, підставляємо довжини відрізків a = 4,8 см, m = 3,6 см у формулу (**), щоб отримати оригінальне числове значення відношення бічної поверхні до площі основи піраміди. Далі з рисунка 3 знімаємо шляхом якомога більш точного (комп'ютерного) замірювання розміри потрібних елементів для обчислення $S_б$ і $S_о$ та їх частки і відомим методом знаходимо абсолютну й відносну похибки реалізованого конструктивізму.

Задача 3.. *Сторона основи правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рівна a, бічне ребро – 2a. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через точку M на бічному ребрі BB_1 паралельно діагоналі основи AC та перехресній із нею діагоналі призми BD_1*, якщо $BM : MB_1 = 1 : 3$.

Розв'язуючи дану задачу на **кресленні-картині**, точку M на ребрі BB_1 вибирають будь-де, однак решту побудов потрібно виконувати категорично строго (рис. 5).

Отже, найперше, січну площину слід перезадати двома прямими, які перетинаються. Це логічно випливає з умови. Одну з цих прямих m проведемо через задану точку M паралельно до діагоналі призми BD_1. Оскільки m належить діагональному перерізу призми BB_1D_1D, вона перетинає діагональ основи B_1D_1 у деякій точці $N \equiv N_1$. Тепер через цю точку проведемо іншу пряму n паралельно AC (A_1C_1), котра разом із прямою m визначатиме площину перерізу $\mathbf{\Sigma}(m \cap n)$. Перезадання січної площини завершено.

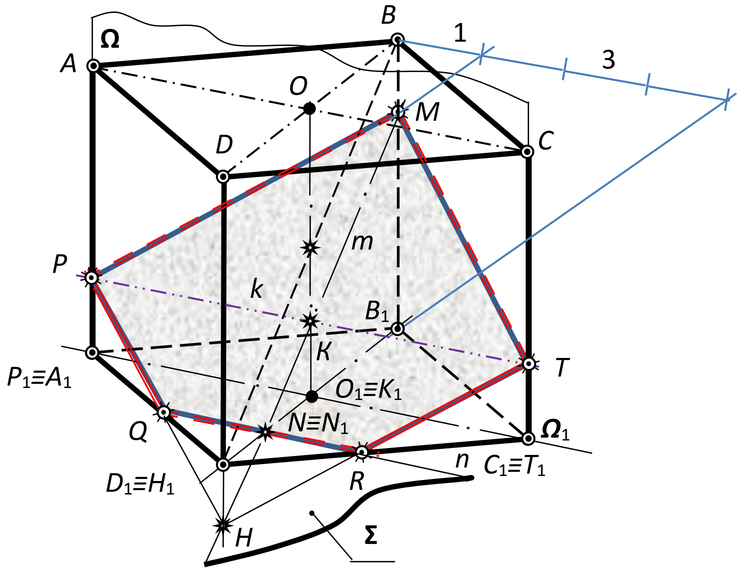

Рис. 5

Пряма n є слідом площини перерізу на площині основи призми $A_1B_1C_1D_1$, тому вона висікає на сторонах основи A_1D_1, C_1D_1 дві вершини шуканої фігури Q і R. Ще дві вершини (окрім M, Q і R) належать бічним ребрам призми AA_1 і CC_1, що очевидно. На рисунку 5 здійснено побудову точок P і T методом ребер. Подамо метод, в основу якого покладено першу основну позиційну задачу на перетин прямої з площиною, покроково. 1). Зафіксуємо площину-посередник $\mathbf{\Omega}(AA_1 \parallel CC_1)$, що задана парою паралельних прямих. 2). Побудуємо пряму перетину площин $\mathbf{\Sigma}$ і $\mathbf{\Omega}$. Для цього досить знайти одну їх спільну точку K у перетині прямої $MN \equiv m$ площини $\mathbf{\Sigma}$ із прямою OO_1, яка належить також площині $\mathbf{\Omega}$ ($K = MN \cap OO_1$), та провести пряму k паралельно A_1C_1 і QR. Адже, за другою ознакою належності прямої площині, k належить і площині $\mathbf{\Sigma}$, і площині $\mathbf{\Omega}$ ($k \parallel A_1C_1 \parallel QR$). 3). У перетині прямої k з ребрами AA_1 і CC_1 матимемо точки P і T. З'єднавши послідовно точки замкненою ламаною, отримаємо п'ятикутник перерізу $QPMTR$.

На рисунку нами візуалізовано також більш простий шлях побудови точок P і T. Розпишіть за кроками і обґрунтуйте його самостійно.

Помічаємо, що фігура $QPMTR$ симетрична відносно діагонального перерізу призми BB_1D_1D. Окрім того, її складовими є рівнобічна трапеція $PQRT$ і рівнобедрений трикутник MPT, а відрізок MN (сума висот трапеції і трикутника) точкою K розділена у відношенні 2 : 1. Це випливає із подібності трикутників BD_1B_1 і MNB_1. Звідси ж маємо: $D_1N : NB_1 = 1 : 3$, тобто точка N – середина відрізка D_1O_1, а QR є середньою лінією трикутника $D_1A_1C_1$. Оскільки $A_1C_1 = PT = a\sqrt{2}$, $QR = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Довжину відрізка MN знаходимо у трикутнику MB_1N, в якого $MB_1 = \frac{3}{2}a$, $B_1N = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$, за теоремою Піфагора: $MN = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$. Тому, врахувавши наведені міркування, маємо: $MK = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$, $MN = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$. Остаточно, за формулами площ трапеції $PQRT$ і трикутника MPT, отримаємо результат: $S_{QPTR} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$, $S_{\Delta MPT} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ $S_{QPMTR} = \frac{7\sqrt{3}}{8}a^2$. (*)

Площу перерізу, як функцію параметра a, знайдено формально-логічними міркуваннями.

Можна продемонструвати дещо інший шлях до результату, зокрема, із застосуванням теореми про площу ортогональної проекції п'ятикутника на площину основи призми [1, п. 34, с. 51, 52]. Спробуйте реалізувати такий прийом.

Очевидно, що задачу варто було відразу сформулювати в суто геометричному стилі, додавши конструктивізму, адже не побудувавши правильно і наочно-образно переріз, непросто з'ясувати його форму, а отже, – знайти площу фігури, що утворилася в результаті перерізу. Таким чином, у подальшому ми плануємо працювати із зображенням призми як з **кресленням-моделлю**. Частину побудовних операцій уже виконано. Зокрема, точку M на BB_1 знайдено (рис. 5) з використанням узагальненої теореми про пропорційні відрізки та чітко встановлено форму п'ятикутника $QPMTR$.

Поставимо такі завдання: 1). Знайти площу фігури перерізу не лише обчислювально, але й побудовно. 2) Оцінити точність виконання рисункових операцій на картинній площині. 3) Побудувати розгортку призми і нанести на ній лінію перерізу.

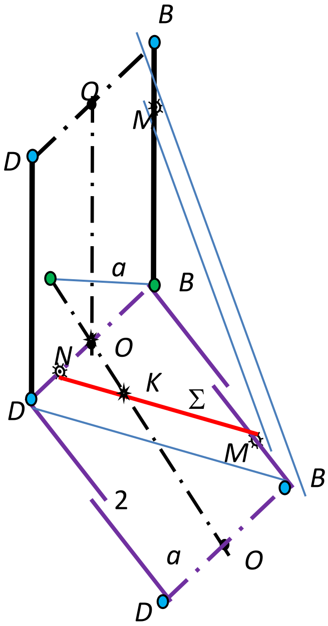

Рис. 6, *а*

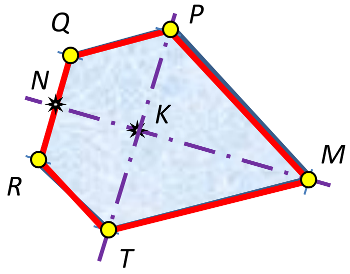

Рис. 6, *б*

На наш погляд, **графічний** метод на шляху до результату доцільно реалізувати двома послідовними суміщеннями елементів призми з картинною площиною. На першому кроці, скориставшись виносними кресленнями, «покладемо» на площину зображень діагональний переріз призми BB_1D_1D. В якості відрізка нульового рівня та істинної довжини обираємо діагональ основи призми $D_1B_1 = a\sqrt{2}$ (рис. 6, *а*). Маючи діагональ квадрата D_1B_1 в основі призми, легко знаходимо його бічну сторону a ($B_0B_1 = 2a$), що дозволяє зобразити прямокутник $B_1B_0D_0D_1$ разом із сумою висот рівнобічної трапеції $PQRT$ і рівнобедреного трикутника MPT ($NK + KM_0$) у натуральну величину. Важливо «побачити», що на рисунку 6, *а* п'ятикутник перерізу $QPMTR$ виродився у відрізок $\Sigma_0(N\text{-}K\text{-}M_0)$.

Другим обертанням (на 90°) навколо осі NM_0 «кладемо» на поле креслення (рис. 6, *б*) п'ятикутник перерізу, адже всі потрібні для цієї операції елементи (NK, KM, PT і RQ) є в наявності на рисунку 6, *а*.

Щоб дати відповідь на завдання під номером 2, потрібно спочатку у формули (*) підставити рисункове значення a (в нашому випадку a = 1,9 см) і підрахувати всі площі з точністю, приміром, до другого знаку. Наступним кроком ретельно з рисунка 6, *б* заміряти (за допомогою комп'ютера) довжини вказаних чотирьох відрізків і обчислити за відомими формулами площі рівнобічної трапеції та рівнобедреного трикутника і просумувати їх. У нашому випадку $\Delta S_{\text{QPMTR}} = 0{,}01$ см^2, $\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = 0{,}18\%$.

Розгортку призми пропонуємо побудувати самостійну, знявши всі потрібні розміри з рисунка 6. Задачу розв'язано **графічним** методом.

Завершуючи, подаємо умови трьох (порівняно простих) задач. Геометризуйте їх і унаочніть, додавши конструктивного змісту; з'ясуйте питання перезадавання площин перерізу та розв'яжіть задачі графічно (графоаналітично).

№ 1. Дано чотирикутну піраміду *SABCD*. Потрібно через точку *K* на ребрі *SA* провести переріз піраміди, який мав би форму паралелограма.

№ 2. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 6, 8 і 10 см. Переріз призми відтинає від бічних ребер, які проходять через вершини двох більших кутів основи, відрізки по 12 см кожний, та нахилений до площини основи під кутом α ($\cos\alpha = \frac{4}{5}$). Знайдіть об'єм і площу повної поверхні зрізаної призми.

№ 3. У правильній чотирикутній піраміді кут між суміжними бічними гранями рівний 2α, а площа діагонального перерізу – *S*. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У стереометричних задачах на обчислення, в яких фігурують перерізи, часто доводиться зводити задавання січної площини, що забезпечується умовою, до одного із базових способів. Інакше задачу важко розв'язати. Набуття досвіду таких операцій приходить до учасників освітнього процесу через практику конструктивізму – геометризацію та унаочнення традиційних для ЗЗСО текстів обчислювальних задач.

Конструктивні методи розв'язування задач розвивають візуальну грамотність, здатність міркувати і виражати зображеннями власні думки, додають розуміння сутності закономірних стереометричних ситуацій, зв'язків між визначальними елементами фігур, які торують шлях до очікуваного результату, спонукаючи суб'єкта навчання до творчо-розвивального наочно-образного уявлення і логічного мислення.

Важливими у стереометрії є вміння і навички доречного використання перетворень фігур, зокрема внутрішнього проекціювання, що спрошує взаємне розміщення залучених до пошуків результату елементів. Незамінним помічником у конструктивних операціях виявився метод суміщення з картинною площиною, що уможливлює представлення в оригінальному вигляді форми і (за потреби) розмірів плоских фігур чи обраної комбінації їх елементів, що у свою чергу дозволяє обґрунтовано виконувати закономірно візуалізовані метричні операції всередині (чи на виносних кресленнях) заданого просторового об'єкту.

У перспективі подальших досліджень, плануємо системне напрацювання методичних прийомів розв'язування і алгоритмізації обчислювальних стереометричних задач графічним та графоаналітичним методами з покроковою екранізацією процесу моделювання у відомих програмних середовищах та мультимедійному просторі. Аналізуючи, попередньо з'ясовано, що для таких цілей доречно використовувати програми комп'ютерної математики (Mathcad Pro, Maple, Mathematica тощо) та деякі інші динамічні середовища.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: підручник для 10-11 класів середньої школи. 4-те вид. К.: Освіта, 1998. 128 с.

[2] Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: навч. посіб. для студ. математ. спец. ВПНЗ. Житомир: вид-во ЖДУ ім. І Франка, 2010. 367 с.

[3] Ленчук И. Г., Павлов А. В. Об одном аналитическом методе построения развёрток не развёртываемых поверхностей вращения 2-го порядка. Прикладная геометрия и инженерная графика. К.: «Будівельник», 1978. Вып. 26. С. 7-10.

[4] В. Г. Кремень, & В. В. Ільїн, (2020). «Презентація візуальної грамотності в освітньому процесі та її експлуатація в культурі мислення». Інформаційні технології і засоби навчання, 75(1), 1-12. [Електронний ресурс]. Доступно: https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3660.

[5] Сборник задач по математике для поступающих во втузы: учеб. пособие. В. К. Егерев и др.; под ред. М. И. Сканави. – 5-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1988. 431 с.

CONSTRUCTION MODELING STEREOMETRIC PROBLEMS WITH CROSS-SECTIONS

Lenchuk Ivan Grigorievich
Doctor of Pedagogy sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Geometry
Zhytomyr State University named after Ivan Franko., Zhytomyr, Ukraine
ORCID ID: 0000-0003-1923-9540
lench456@gmail.com

Abstract. Today, in the senior classes of I of GSE, in geometry lessons, they solve mainly problems of a computational nature, without their high-quality accompaniment with a drawing. But drawing is the main tool in geometry. A similar approach to teaching the first of the sciences has led to the fact that students of pedagogical universities have little command of problem solving skills, do not know practical (applied) geometry, and do not know how to properly operate with spatial figures. Within the framework of this article, we propose to radically change the approach to teaching and learning, first of all, for future mathematics teachers, by increasing the drawing loads by geometrizing ordinary computing problems, significantly adding constructivism by formulating their conditions with an emphasis on practicality. Only one type of problems has been demonstrated - with sections of spatial bodies by a plane, which can be solved not only computationally, but also by constructions, in particular graphically (or graphically analytically), obtaining results of practical meaning through the visualization of step-by-step algorithms in finding distances, angles, areas of plane figures, etc., that is, working on a picture plane (notebook, blackboard, computer or any other multimedia tool). It is not recommended to reject the computational version of the solution of the problem, but using the graphic-analytical method, to use certain results of calculations in order to optimize the drawing operations. Five basic methods of specifying a plane in space are presented, which are substantiated by logical considerations in stereometry textbooks for I of GSE. The fact is that students (learners) do not have a very good command of the questions of possible ways of specifying a plane in the conditions of computational problems, do not have the proper skills to redefine a secant plane, to reduce it to one of the possible basic ways, and, finally, do not understand that without such a redefinition it is impossible to solve the problem. Revealed the applied side of the discipline «Geometry», because the planar sections, deployment of surfaces are widely used in various industries.

Key words: stereometry; geometrization and constructivism of tasks; graphic and graphic-analytical methods.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

[1.] Pohoryelov O. V. (1998). Heometriya: Stereometriya: Pidruchnyk dlya 10-11 klasiv seredn′oyi shkoly [Geometry: Stereometry: Textbook for 10-11 grades of high school]. K.: Osvita. [in Ukrainian].

[2.] Lenchuk I. (2010). Konstruktyvna stereometrija v zadachakh [Constructive stereometry in problems]: navchanyi posibnyk dlia studentiv matematychnykh spetsialnostei VPNZ. Zhutomyr: vud-vo ZhDU im. I. Franka. [in Ukrainian].

[3.] Lenchuk I., Pavlov A. (1978). Ob odnom analiticheskom metode postroyeniya razvortok ne razvortyvayemykh poverchnosteiy vraschenija 2-ho porjadka [On one analytical method for constructing deployment non-deployable surfaces of revolution of the 2nd order]. K.: «Budível'nik». [in Ukrainian].

[4.] V. G. Kremen′, & V. V. Il′yin, (2020). «Prezentatsiya vizual′noyi hramotnosti v osvitn′omu protsesi ta yiyi ekspluatatsiya v kul′turi myslennya». Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya, 75(1), 1-12. [Elektronnyy resurs]. Dostupno: https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3660. [in Ukrainian].

[5.] V. K. Yegerev, B. A. Kordemskiy, V. V. Zaytsev i dr.; pod red. M. I. Skanavi (1988). Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh vo vtuzy. [Collection of problems in mathematics for applicants to technical colleges]. Ucheb. posobiye. M.: Vysshaya shkola. [in Russian].