УДК 323.5.091.33:514.112
DOI: 10.31652/2412-1142-2019-53-23-29

Л.А. Вотякова, О.С. Туржанська, Д.С. Колеснік, м. Вінниця, Україна
L.A. Votiakova, O.S. Turzhanska, D.S. Kolesnik, Vinnitsia, Ukraine

ПОСТАНОВКА КОМПЛЕКСНИХ ЗАДАЧ ЧЕРЕЗ ЗБІР І СИСТЕМАТИЗАЦІЮ ІНФОРМАЦІЇ НАВКОЛО ФАКТУ НАЯВНОСТІ «ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ»

Анотація. *У статті розглянуто підхід до формування банку задач, в основі якого лежить збір і вивчення фактів і властивостей, пов'язаних із так званим «золотим перерізом». Як свідчить історія розвитку математики активізаторами пошуку нової інформації слугують не тільки проблеми, висунуті певними математичними школами або ж провідними професіоналами-математиками, а й певні конкретні факти й конкретні проблеми.*

Такого типу активізатори відіграють ведучу роль у підвищенні ефективності вивчення спеціальної літератури (можливо глибокого лише в частині, що стосується даного факту) і набуття практичних навичок добору потрібної інформації та оцінці її вагомості. А це, у свою чергу, створює основу для інтенсифікації розумового розвитку і перетворення того, хто добирає інформацію, у господаря інформаційного багатства.

Ключові слова: *банк задач, «золотий переріз», числа Фібоначчі, послідовність, пропорція, інформаційне середовище, комплексні задачі.*

© Л.А. Вотякова, О.С. Туржанська, Д.С. Колеснік, 2019

SETTING COMPLEX TASKS BY COLLECTION AND SYSTEMIZATION OF INFORMATION ABOUT THE FACT EXISTENCE OF "GOLDEN SECTION"

Abstract. *The article deals with the approach to the formation of a task bank, which is based on the collection and study of facts and properties associated with the so-called "golden section". As the history of the development of mathematics proves the activists of the search for new information, not only problems put forward by certain mathematical schools or by leading mathematicians, but also certain concrete facts and specific problems.*

Such types of activators play a leading role in increasing the effectiveness of studying specialized literature (perhaps deep only in part relating to this fact) and acquiring practical skills in the selection of the required information and the assessment of its importance. And this, in turn, creates the basis for the intensification of mental development and transformation of the person who obtains information from the owner of information riches.

Key words: *bank of tasks, "golden section", Fibonacci numbers, sequence, proportion, information environment, complex problems.*

Постановка проблеми. Наша мета – показати метод формування банку задач шляхом збору і систематизації інформації навколо факту наявності «золотого перерізу».

Аналіз попередніх досліджень. Для прикладу, розглянемо конкретну ситуацію, що навчає, у якій студенти вчаться аналізувати й систематизувати інформацію. У книзі Д. Піндоу [1, с. 76] процитований великий Іоган Кеплер (1571-1630): "Геометрія має два великі скарби. Перший — це теорема Піфагора, другий — поділ відрізка у середньому і крайньому відношенні. Перше можна порівняти з мірою золота, друге можна назвати коштовним каменем". Там само у [1, с. 73] зазначено, що поділ відрізка у середньому і крайньому відношенні був пізніше названий «золотим перерізом», а Лука Пачоллі називав це відношення «божественною пропорцією». Цікаві факти!

Звернемось до математичної енциклопедії. Читаємо: "Золотий переріз» (гармонійне ділення, ділення у крайньому і середньому відношенні) – ділення відрізка *a* так, що більша частина *x* є середнім пропорційним між довжиною усього відрізком *a* і меншою його частини *a–x*, тобто

$$a : x = x : (a - x). \qquad (1)$$

Далі термін «золотий переріз» увів Леонардо да Вінчі (згадується ще у «Началах Евкліда»). Принципи «золотого перерізу» або близькі до нього пропорційні відношення лягли в основу композиційної побудови багатьох витворів світового мистецтва (головним чином витворів архітектури античності і епохи Відродження).

У цій же праці крім терміну "золотий переріз" згадується ще один термін "числа Фібоначчі". Виявляється, що ці поняття мають досить цікаві властивості і застосування, описані у різній літературі [2-5].

Виклад основного матеріалу. Якщо повернутись до рівності (1) очевидно, що *x* додатний корінь рівняння

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

а саме, $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 0{,}61803a$. Геометрично «золотий переріз» відрізка *AB* (рис. 1) будується так: будуємо прямокутний трикутник *ABD* за катетами $AB = a,\ BD = \frac{a}{2}$. На гіпотенузі *AD* від точки *D* відкладаємо відрізок $DE = \frac{a}{2}$, а на відрізку *AB* від точки *A* відкладемо відрізок $AC = AE$. Точка *C* шукана. Надалі будемо позначати через τ ($\tau o \mu \eta$ – переріз) відношення

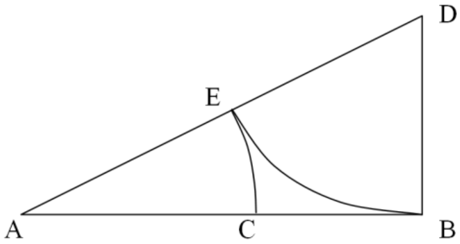

Рис. 1

$$\tau = \frac{a}{\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}618.$$

Нехай точка С є точкою золотого перерізу відрізка *AB.* Якщо на відрізку *BC* як на основі побудувати рівнобедрений трикутник з бічною стороною *AC,* сполучити точки *D* і *A* (рис.2), то, позначивши величину кута *BAD* через *x,* маємо:

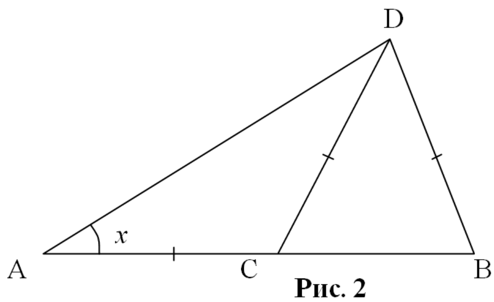

Рис. 2

$AC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos x$ і $\cos x = \frac{AD}{2AC}$. А у трикутнику *ABD* $AC^2 = AB^2 + AD^2 - \frac{AB \cdot AD^2}{AC}$,

$AB^2 - AC^2 = \frac{AD^2}{AC}(AB - AC)\cdot$

Звідси $AB + AC = \frac{AD^2}{AC}$ або $AD^2 = AB \cdot AC + AC^2 = AB^2$. Отже, трикутник *ABD* рівнобедрений, а тому $\angle BAD = 36^\circ$, тобто обґрунтована можливість побудови циркулем і лінійкою кута у 36°. Знайдемо значення синуса і косинуса кута 36°. Оскільки $\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$, а $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$, то $\sin 72^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \left(1 - 2\sin^2 18^\circ\right)$ або $\cos 18^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \left(1 - 2\sin^2 18^\circ\right)$ один із коренів рівняння $8x^3 - 4x + 1 = 0$. З трьох його коренів $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ очевидно, що $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2\tau}$. Звідси

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\cdot$$

Якщо тепер у колі радіуса *R* взяти два взаємно перпендикулярні діаметри (один з кінцем у точці A_1 (рис. 3), відрізок *OE* поділити навпіл і з точки *B* відкласти відрізок $BC = BA_1$, то

$BC = BA_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}R$, $OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$, $A_1C = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}R = 2R\sin 36^\circ$

тобто A_1C рівна за довжиною стороні вписаного правильного п'ятикутника.

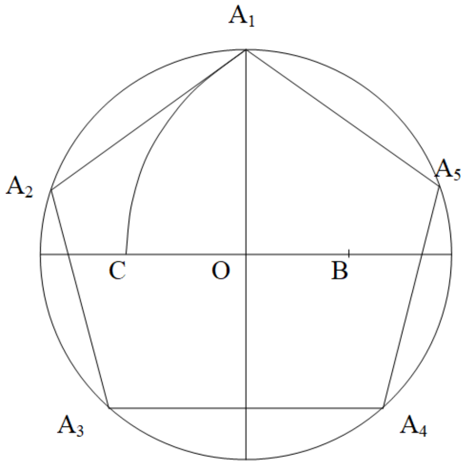

Рис. 3

Сторона вписаного правильного десятикутника

$a_0 = 2R\sin 18^\circ$ або $a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R = \frac{R}{\tau}$.

З другого боку, (рис. 3)

$$OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R = \frac{R}{\tau},$$

тобто сторона вписаного правильного десятикутника дорівнює більшій частині радіуса кола, який поділений «золотим перерізом».

Розглянемо найпростіший нескінченний ланцюговий дріб.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$$

Його значення визначається з рівняння

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

тобто значення цього дробу дорівнює τ. Очевидно, що для такого дробу

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1},\ \frac{P_1}{Q_1} = 1 + \frac{1}{1},\ \frac{P_2}{Q_2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2},\ \frac{P_3}{Q_3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3}.$$

Гіпотеза. $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} + Q_{n-2}}$, причому $P_{n-2} = Q_{n-1}$.

Метод математичної індукції дозволяє обґрунтувати, що остання формула справедлива для *n* = 2,3,..., якщо $P_1 = 2, \quad Q_0 = Q_1 = 1$. Таким чином, члени послідовності $\frac{P_n}{Q_n}$ виражаються через члени послідовності (u_n), яка означається рекурентно

$$u_1 = u_2 = 1, \; u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \; n = 3,4,...,$$

тобто послідовність вихідних дробів записується у вигляді

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}, ...$$

Послідовність (u_n) називають рядом Фібоначчі, а її члени числами Фібоначчі. Очевидний зв'язок між золотим відношенням і числами Фібоначчі, а саме

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

тобто для великих *n*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \tau$$

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618033989,$$

$$\frac{u_{10}}{u_9} = 1,6175, \; \frac{u_{20}}{u_{19}} = 1,61803096, \; \frac{u_{30}}{u_{29}} = 1,618033989, \; \frac{u_{40}}{u_{39}} = 1,618033989.$$

Цілком природно перевірити, чи не можна послідовність (u_n) задати явно n-й член як функцію від натурального n. Для цього слід знайти послідовність, яка є розв'язком рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},$$

і задовольняє умови $u_1 = u_2 = 1$.

Інструментарій розв’язування рівнянь такого типу розроблено у теорії різницевих рівнянь (дискретний аналог диференціальних рівнянь). Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді

$$u_n = r^n.$$

Підставивши u_n у рівняння , маємо, що r є коренем рівняння

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

тобто

$$r_1 = \tau, \quad r_2 = -\frac{1}{\tau}.$$

Таким чином, розв'язками рівняння є геометричні прогресії

$$(u_n) = (\tau^n), \quad (u_n) = (-1)^n (\tau)^{-n}$$

Однак ні одна з них не задовольняє початкові умови $u_1 = u_2 = 1$. Разом з тим очевидно, що лінійна комбінація знайдених розв'язків

$$(u_n) = (c_1 \tau^n + c_2 (-1)^n \tau^{-n})$$

є розв'язком рівняння. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} c_1\tau + c_2\dfrac{1}{\tau} = 1 \\ c_1\tau - c_2\dfrac{1}{\tau} = 1 \end{cases}$$

отримуємо $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Як результат, приходимо до формули Біне

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\tau^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}\tau^{-n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\tau^{-n} = 0$, то для великих *n*

$$u_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\tau^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n,$$

або $\ln u_n \approx 0,48n - 0,80$.

Числа Фібоначчі володіють невичерпною кількістю цікавих властивостей. Ось, для прикладу, очевидні властивості:

$1^\circ\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1,$

$2^\circ\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n},$

$3^\circ\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1.$

А записавши перших n чисел Фібоначчі у вигляді

$$\begin{aligned} &u_1 = u_2, \\ &u_2 = u_3 - u_1, \\ &u_3 = u_4 - u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_n = u_{n+1} - u_{n-1}, \end{aligned}$$

домноживши ці рівності відповідно на $u_1, u_2, \ldots, u_n$ і склавши їх, отримаємо

$4^\circ\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2 = u_n u_{n+1}.$

Скориставшись методом математичної індукції, можемо переконатись, що

$5^\circ\ \ u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1},$

$6^\circ\ \ u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$

$7^\circ\ \ u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}.$

А з основного рекурентного співвідношення випливає, що визначник, порядку вище 2, сформований з послідовних чисел Фібоначчі, дорівнює 0. Як приклад

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \\ 55 & 89 & 144 \end{vmatrix} = 0',$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 & 34 \\ 55 & 89 & 144 & 233 \\ 377 & 610 & 987 & 1597 \end{vmatrix} = 0.$$

Можна виявити зв'язок між біномними коефіцієнтами і числами Фібоначчі

$$\begin{array}{lllllll} & \underline{1} & & & & & \\ 1 & \underline{1} & \underline{2} & & & & \\ 1 & 1 & \underline{3} & \underline{5} & & & \\ 1 & 2 & 1 & \underline{8} & \underline{13} & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \underline{21} & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \ldots & & & & & & \end{array}$$

А скориставшись тотожністю

$$\left(1-t-t^2\right)\left(1+t+2t^2+\ldots+u_{n+1}t^n+\ldots\right)=1,$$

з якої випливає, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}t^n$$

на інтервалі $\left(-\frac{1}{\tau};\frac{1}{\tau}\right)$ збігається і його сума дорівнює $\frac{1}{1-t-t^2}$. Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}t^n = \frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(t+t^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+t\right)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n+k}$$

і $u_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots$ (формула Люка).

Зауваження 1. З останніх цифр чисел Фібоначчі не можна формувати таблицю Випадкових чисел, бо вони повторюються з періодом 60.

Зауваження 2. Числа Фібоначчі можуть складати основу своєрідної системи числення.

Нехай $u_1=1,\ u_2=2,\ \ u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\ \ n=3,4,\ldots,$. Можна довести, що будь-яке натуральне число *N* можна подати у вигляді

$$N=\sum_{k=0}^{n} a_k u_k\ ,$$

де $a_k=0$ або 1, $a_k a_{k+1}=0$, $k\geq 1$, n – номер найбільшого з чисел Фібоначчі, яке не перевищує N, тобто $N=a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1\left(\Phi\right)$.

Як приклад, 1 = 1(Ф), 2 = 10(Ф), 3 = 100(Ф), 4 = 101(Ф), 5 = 1000(Ф),
6 = 1001(Ф), 7 = 1010(Ф), 8 = 10000(Ф), 9 = 10001(Ф), 10 = 10010(Ф),
50 = 34 +13 + 3 = 10100200(Ф).

Число τ може «з’явитись» у самих несподіваних місцях .

Для прикладу розв’яжемо рівняння

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^n+(n+x)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n+2x\right)^n. \qquad (2)$$

Будемо виходити з рівняння

$$\left(n^n+(n+x)^n\right)=\left(n+2x\right)^n,$$

яке еквівалентне рівнянню

$$1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{2x}{n}\right)^n.$$

Скориставшись тим фактом, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

рівняння (2) переписуємо у вигляді

$$1+e^x=e^{2x},$$

розв'язком якого є $\ln\tau$.
І звичайно ж, за допомогою цього методу можна формулювати безліч геометричних задач.

Висновки. Фактично на всіх етапах навчання участь студентів, а після і вчителів (викладачів) у постановці задач досить невелика. Адже більшість задач систематизована у вигляді збірників або ж присутні у посібниках теоретичного характеру, пов'язані між собою тематично і призначені для закріплення теоретичного матеріалу або ж ілюстрації певних методів і прийомів з метою закріплення навичок у їх застосуваннях.

Зробити задачу засобом формування уміння визначати мету дослідження та його основні завдання можна, якщо ставити у ній мету, залишаючи невизначеними вхідні дані [7].

Як результат, конкретизація таких даних приводить до постановки конкретних задач, а варіація ними дає можливість формувати банк (цикл) задач.

Список використаних джерел:

1. Піндоу Д. Геометрія і мистецтво/ Д.Піндоу// - М.: Мир, 1979. – 320 с.
2. Кокстер Г.С. Введение в геометрию/ Г.С.Кокстер//- М.: Наука, 1966. – 648с.
3. Реньи А. Трилогия о математике/ А.Реньи// –М.: Мир, 1980. -376 с.
4. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи/ Н.Н. Воробьев// 6-е изд. доп. –М.: Наука, 1992.- 144с.
5. Болл У. Математические эссе и развлечения/ У.Болл, Г.Кокстер// – М.: Мир, 1986. – 474с.
6. Huntley H.E. The divine proportion a study in Mathematical Benty/ H.E. Huntley// - NewYork, 1970.
7. Вотякова Л.А. Постановка комплексних задач / Л.А. Вотякова, Я.В. Шмулян // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Випуск №48, 2017 – с. 97-102.