УДК 373.5.091.33:[51:53]
DOI: 10.31652/2412-1142-2019-53-33-39

Є. І. Калашникова, Київ, Україна / Y. I. Kalashnikova, Kiev, Ukraine
І. В. Калашников, Вінниця, Україна / I. V. Kalashnikov, Vinnitsia, Ukraine

ЯК ВІДЧУТИ МАТЕМАТИКУ?

Анотація. *У статті розглядаються міждисциплінарні зв'язки математики та фізики. Зокрема, пояснюючи на уроках фізики, фізичну концепцію «рівноваги системи», ми формулюємо чотири очевидні твердження: 1) сукупність декількох врівноважених систем є врівноваженою системою; 2) для того, щоб дві сили перебували у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб вони мали загальну лінію дії, однакову величину і протилежні напрямки; 3) силу, що діє на тіло, можна довільним чином переносити уздовж її лінії дії; 4) якщо на тіло діють три непаралельних сили, що лежать в одній площині і тіло знаходиться у рівновазі, то їхні лінії дій перетинаються в одній точці. Використовуючи їх, ми доводимо нетривіальні теореми шкільної математики, а саме: (бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці; медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці; висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці; теорема Чеви).*

Використовуючи доведення теорем, наведених у даній публікації в навчальному процесі, можна розраховувати на підвищення інтересу школярів до вивчення як фізики, так і математики, що є необхідним, враховуючи сучасні тенденції при вивченні цих дисциплін школярами.

Внаслідок поєднання методів математики та фізики помічено, що школярі краще розуміють не лише процес взаємопроникнення одних природничих наук в інші, а й те, що за допомогою математики і фізики можна вирішувати дуже складні прикладні задачі.

Ключові слова. *Міжпредметні зв'язки, зв'язок математики та фізики, рівновага системи, медіана, теорема про перетин медіан трикутника, теорема про перетин бісектрис трикутника, теорема про перетин висот трикутника, теорема Чеви.*

HOW TO FEEL MATHEMATICS?

Annotation. *In article, interdisciplinary relations of mathematics and physics was considered. In particular, when we were explaining in the physics classes, the physical concept of "equilibrium of the system," we formulated four obvious statements : 1) the set of several balanced systems is a balanced system; 2) in order for the two forces to be in equilibrium, it is necessary and sufficient that they have a common line of action, of the same magnitude and opposite directions; 3) the force acting on the body can be arbitrarily carried along its line of action; 4) if the body has three nonparallel forces acting on the same plane and the body is in equilibrium, then their lines of action intersect at one point. Using them, we proved the non-trivial theorems of school mathematics, namely: (the bisectors of the internal angles of the triangle intersect at the same point, the medians of an arbitrary triangle intersect at one point, the height of an arbitrary triangle intersect at one point, Chevy's theorem).*

Using in the educational process, the proofs of the theorems given in this publication, we can count on the increasing the interest of students in studying physics and mathematics, which is necessary, looking on the current trends in the study of these disciplines by students.

As a result of the combination of methods of mathematics and physics, it is noted that students better understand not only the process of interpenetration of some natural sciences to others, but also that with mathematics and physics, you can solve very difficult applied problems.

Key words. *Interdisciplinary connections, the connection between mathematics and physics, the system equilibrium, the median, the median triangle cross section theorem, the cross section of the triangle bisector, the theorem on the intersection of the heights of the triangle, and the Chevy's theorem.*

Постановка проблеми. Сучасна шкільна освіта має формувати у свідомості учнів адекватну модель навколишнього світу. Кожний навчальний предмет має відтворювати певну частку дійсності, у якій ми живемо, і ці частинки мають об'єднатися в свідомості учня у загальне світосприйняття. Формуванню в учнів цілісного уявлення про навколишнє середовище, взаємозв'язки між фактами і явищами, які спостерігаються в природі й житті суспільства, допомагає здійснення в навчальному процесі міжпредметних зв'язків.

На нашу думку, одним із найважливіших рушійних механізмів прогресу наукового пізнання є взаємодія об'єктів, виділення їх істотних зв'язків і відношень, а також законів їх існування і видозміни. Такий інтеграційний зв'язок явищ можна розглядати як найбільш загальну закономірність існування світу, що вивчається наукою та є результатом і виявом універсальної взаємодії всіх об'єктів і явищ. Інтеграція в навчанні має стати одним із головних напрямів активних пошуків нових педагогічних рішень, які сприяють розвитку творчого потенціалу як окремих учителів, так і колективів освітніх установ з метою ефективнішого впливу на учнів.

Аналіз актуальних наукових досліджень і публікацій. У сучасній освіті проблемам інтеграції навчальних предметів, міжпредметним зв'язкам присвячено досить багато досліджень та публікацій. Слід також розуміти, що проблеми не нові, активно обговорювалися в різні періоди становлення освіти, зокрема в 50-х роках 20 століття [2]. Але наразі проблема є досить актуальною, і на нашу думку, перспективною щодо підвищення компетентності учнів, у плані дисциплін природничого циклу.

Мета статті – звернути увагу на доцільність використання міжпредметного зв'язку математика – фізика під час вивчення шкільної геометрії.

Виклад основного матеріалу. Пригадується випадок. Одного разу знайомий будівельник попросив допомоги при проектуванні арки у формі дуги заданого еліпса. Розрахунки нами були зроблені, але у процесі виготовлення будівельником шаблону виникли деякі труднощі, оскільки було складно зафіксувати форму арки.

Розв'язання було знайдено у такий спосіб. Взяли однорідну дерев'яну планку необхідної довжини завтовшки 1 см., зігнули її відповідно до креслення еліпса, заміряли параметри отриманої дуги, по якій і був зроблений дерев'яний шаблон-опора під арку.

У даній публікації ми хочемо звернути увагу на більш тісні міжпредметні зв'язки математики і фізики, ніж ті, які ми використовуємо у шкільній практиці.

Під тісними міжпредметних зв'язками будемо розуміти зв'язки, які використовуються для розв'язання ключових задач наук, маючи на увазі математику і фізику.

В основу даної публікації покладемо фізичне поняття «рівноваги системи».

Тіло знаходиться в рівновазі, якщо алгебраїчна сума всіх прикладених до цього тіла сил дорівнює нулю.

Також будемо використовувати 4 очевидних твердження.

1. Сукупність декількох врівноважених систем є врівноваженою системою.

2. Для того, щоб дві сили перебували у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб вони мали загальну лінію дії, однакову величину і протилежні напрямки.

3. Силу, що діє на тіло, можна довільним чином переносити уздовж її лінії її дії.

4. Якщо на тіло діють три непаралельних сили, що лежать в одній площині, і тіло знаходиться у рівновазі, то їхні лінії дій перетинаються в одній точці.

Використання положень фізики під час розв'язування математичних задач – ідея не нова, активно її впроваджував Борис Юрійович Коган у 50-х роках, але на разі вона майже не використовується у шкільній практиці.

Розглянемо як, застосовуючи вище відмічені твердження (1 – 4), можна доводити цілком нетривіальні теореми шкільного курсу геометрії.

Теорема 1. Бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай дано трикутник ABC.

На кожну його вершину подіємо однаковими за величиною силами так, як показано на малюнку. Бачимо, що ці сили взаємно врівноважені.

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 0.$$

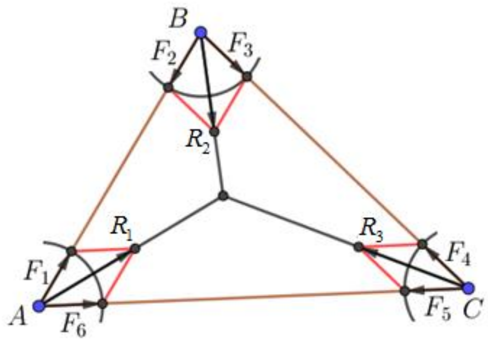

Рис. 1

Отже, врівноважені і їх рівнодіючі сили: R_1, R_2, R_3, тобто $R_1 + R_2 + R_3 = 0$. За твердженням 4 рівнодіючі перетинаються в одній точці. Оскільки вони спрямовані уздовж бісектрис внутрішніх кутів трикутника, то і бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Теорему доведено.

Розглянемо ще одну теорему шкільного курсу математики, яку можна довести у такий спосіб.

Теорема 2. Медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай дано трикутник ABC.

Розглянемо сили $F_1, F_2, ..., F_6$, які прикладено так як показано на малюнку. Нехай вектор кожної з цих сил дорівнює половині довжини сторони, вздовж якої він направлений, наприклад $F_1 = \frac{1}{2}AB$. Тоді рівнодійна сил F_1 і F_6 буде зображуватись медіаною проведеною до сторони BC, рівнодійна сил F_2 і F_3 – медіаною, проведеною до сторони AC, і рівнодійна сил F_4 і F_5 – медіаною, проведеною до сторони AB. А оскільки сили $F_1, F_2, ..., F_6$ взаємно врівноважуються, то медіани трикутника перетинаються в одній точці.

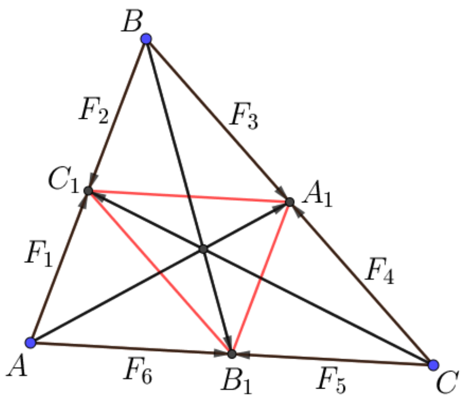

Рис. 2

Теорему доведено.

Теорема 3. Висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай дано трикутник ABC, вздовж сторін якого діють сили $F_1, F_2, ..., F_6$.

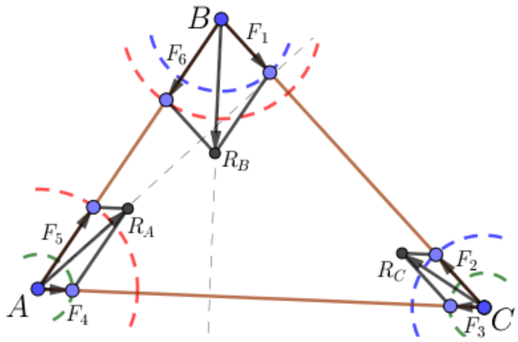

Рис. 3

Виберемо їх таким чином, щоб мали місце рівності

$$F_1 = F_2 = F\cos A \quad (1),$$

$$F_3 = F_4 = F\cos B \quad (2),$$

$$F_5 = F_6 = F\cos C \quad (3),$$

де F – така довільним чином вибрана сила, що виконуються рівності (1) – (3). Оскільки, сили $F_1, F_2, ..., F_6$ взаємно врівноважуються, то лінії дій рівнодійних цих сил R_A, R_B, R_C мають перетинатися в одній точці. Знайдемо напрямок цих рівнодійних.

Додамо наприклад сили F_1 і F_6, які прикладено до вершини *B*. Для цього розкладемо кожну з них на дві складові, одна з яких паралельна стороні *AC* а інша перпендикулярна до неї.

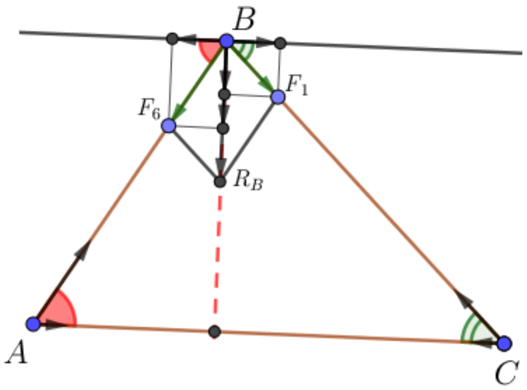

Рис. 4

Першу з цих складових будемо називати горизонтальною, а другу – вертикальною. З рисунка 4 видно, що горизонтальні складові сил F_1 і F_6 рівні $F_1\cos C$ і $F_6\cos A$ відповідно (за означенням косинуса). Але з рівностей (1) – (3) випливає, що $\dfrac{F_1}{F_6} = \dfrac{\cos A}{\cos C}$, звідки

$$F_1\cos C = F_6\cos A$$

Таким чином, горизонтальні складові сил F_1 і F_6 однакові. З цього можна зробити висновок, що вони взаємно знищуються і відповідно рівнодійна сил F_1 і F_6 перпендикулярна до сторони *AC*. Таким чином, сила R_B направлена по висоті опущеної на сторону *AC*.

Діючи аналогічно, приходимо до висновку, що сили R_A і R_C йдуть вздовж двох інших висот трикутника *ABC*. Звідки випливає, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Аналогічно застосовуючи даний метод можна успішно доводити і складніші теореми. Розглянемо, наприклад, доведення теореми Чеви.

Перш ніж розпочати доведення даної теореми встановимо один цікавий факт.

Розглянемо трикутник ABC, на рисунку 5. Нехай вздовж сторін AC і AB діють сили F_1 і F_2, рівнодіюча яких спрямована по прямій AA_1. Проведемо пряму DE, паралельну стороні BC і розкладемо силу F_1 на складові F_1' і F_1'', а силу F_2 на складові F_2' і F_2''.

Враховуючи подібність трикутників, видно, що $\frac{F_1'}{F_1} = \frac{A_1C}{AC}, \frac{F_2'}{F_2} = \frac{A_1B}{AB}$, звідки маємо: $F_1' = F_1\frac{A_1C}{AC}$ і $F_2' = F_2\frac{A_1B}{AB}$.

Оскільки рівнодійна сил F_1 і F_2 направлена вздовж AA_1, то $F_1' = F_2'$, звідси маємо, що:

$$F_1\frac{A_1C}{AC} = F_2\frac{A_1B}{AB},$$

або

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CA}{AB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}. \quad (4)$$

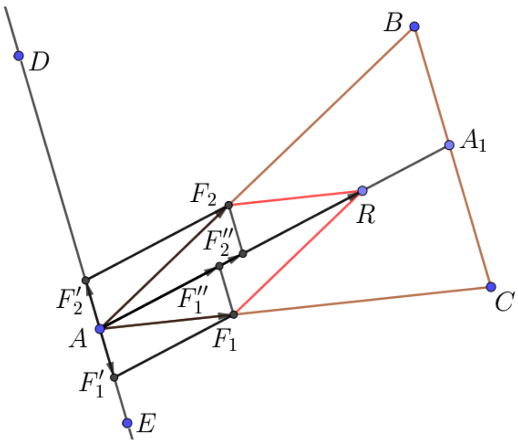

Рис. 5

Даний факт легко запам’ятовується оскільки права частина рівності (4) отримується у результаті обходу трикутника CAB за годинниковою стрілкою, починаючи з вершини C.

Приступимо тепер безпосередньо до доведення теореми.

Теорема Чеви. Для того, щоб відрізки, які сполучають вершини трикутника з точками, взятими на відповідних протилежних їм сторонах, перетинались в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доведення. Розглянемо трикутник ABC.

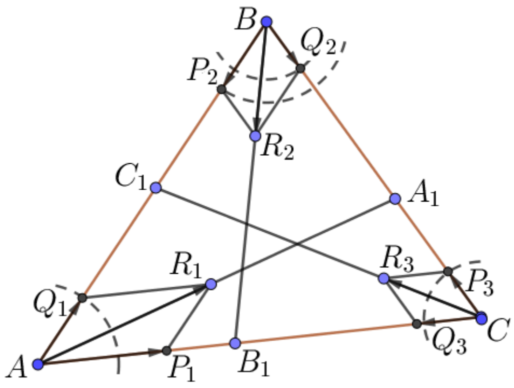

Рис. 6

Відмітимо на його сторонах точки A_1, B_1, C_1 так як показано на рисунку 6 і з'єднаємо їх з протилежними вершинами трикутника. Подіємо на вершини трикутника силами R_1, R_2, R_3, які спрямуємо вздовж прямих AA_1, BB_1, CC_1.

Розкладемо ці сили на складові, що спрямовані по сторонах трикутника. При цьому силу R_1 виберемо довільно, а сили R_2 і R_3 виберемо так, щоб виконувались рівності:

$$P_2 = Q_1 \text{ і } P_3 = Q_2 \quad (5)$$

Використавши рівність 4, матимемо:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{BC}{CA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B}$$

Перемноживши отримані рівності, отримаємо:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{P_3}{Q_3} = \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B}$$

Після спрощення матимемо:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{P_3}{Q_3} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Врахуємо те, що $P_2 = Q_1$ і $P_3 = Q_2$ – рівності (5), і змінивши порядок співмножників отримаємо:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{P_1}{Q_3}.$$

Розглянемо випадок коли $P_1 = Q_3$, тобто сили врівноважені, матимемо:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Якщо сили P_1 і Q_3 врівноважені то знаходитимуться у рівновазі і сили R_1, R_2, R_3, а якщо так, то прямі AA_1, BB_1, CC_1 .перетинаються в одній точці.

Розглянувши випадок коли $P_1 \neq Q_3$, тобто сили неврівноважені, не будуть знаходитимуться у рівновазі і сили R_1, R_2, R_3, тобто прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинатися в одній точці не будуть, і відповідно:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \neq 1.$$

Теорему Чеви доведено.

Висновки і перспективи подальших досліджень. На нашу думку, такий підхід до розв'язування ключових задач математики є досить плідним, оскільки доведення теорем в даній публікації є інтуїтивним зрозумілим та наочним. Використовуючи їх у навчальному процесі, можна посилити інтерес учнів до вивчення як фізики, так і математики, що є потрібним, враховуючи сучасні тенденції вивчення цих дисциплін. Ми думаємо, що учні зрозуміють взаємопроникнення одних природничих наук в інші, і те, що за допомогою їхнього поєднання можна буде розв'язувати дуже складні задачі.

По - іншому кажучи, учні краще усвідомлюватимуть глибину взаємозв'язків між математикою і фізикою, матимуть можливість відчути математику на дотик.

Список використаних джерел

1. Глобін О. І. Міжпредметні зв'язки в умовах профільного навчання математики / Олександр Ігорович Глобін. – Київ: Педагогічна думка, 2012. – 88 с.
2. Коган Б. Ю. Приложение механники к геометрии / Борис Юрьевич Коган. – Москва: Наука, 1965. – 56 с.
3. Мерзляк А. Г. Геометрія, підручик для 8 класу з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2008. – 240 с.