

УДК 517.2

DOI: 10.31652/2412-1142-2024-73-113-124

Тулученко Галина Яківна

доктор технічних наук, професор,

професор кафедри вищої математики,

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,

м. Харків, Україна

ORCIDID ID: 0000-0002-6196-540X

tuluchenko@ukr.net

MAPLET-ЗАСТОСУНОК ДЛЯ РОЗРОБКИ ДИДАКТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ З ТЕМИ «ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ». ЧАСТИНА 1

Анотація. В статті розглядається проблема створення дидактичних матеріалів з певної теми, які мають містити достатньо велику кількість варіантів (10-30 варіантів) рівнозначної складності. В огляді літературних джерел показано, що більшість педагогічно-орієнтованих програмних засобів для підтримки викладання математики в середній та вищій школі орієнтовані на візуалізацію курсу. Програмні засоби, які позиціонуються як призначені для створення дидактичних матеріалів, надають інструменти для їх оформлення, а не розробки самих завдань з можливостями контролю впливу значень вхідних параметрів на складність реалізації певного математичного методу. В навчальних прикладах, які розв'язуються традиційним «ручним» способом важливим є збереження балансу між складністю алгоритму розв'язання задачі та виконуваних при цьому обчислювальних операцій. На прикладі теми: «Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду» автором розроблений Maplet-застосунок «Generator ODE», який дозволяє генерувати звичайні лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з правими частинами спеціального виду за заданими користувачем параметрами. Для розробки математичного забезпечення даного застосунку виведені в явному вигляді залежності коефіцієнтів многочленів у довільному частинному розв'язку від коефіцієнтів многочленів з правої частини диференціального рівняння, коренів характеристичного рівняння та значення параметра α з показника степеня експоненціальної функції з правої частини рівняння. Надалі реалізовано алгоритми генерування диференціальних рівнянь з однозначними цілими коефіцієнтами многочленів як у правій частині рівняння, так і в довільному частинному розв'язку. В статті розглядається права частина рівняння виду

$$f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}.$$

Досліджено випадки, коли вирази довільних частинних розв'язків, що знаходяться за методом невизначених коефіцієнтів та за методом варіації довільних сталих співпадають, та коли вони відрізняються на сталий доданок. Вказана особливість дозволяє залучити евристичні прийоми в аналізі розв'язків диференціальних рівнянь вказаного виду. Макетування інтерфейсу розробленого застосунку виконано за допомогою спеціалізованого пакету MapletBuilder, який входить до складу СКМ Maple. Обчислювальні алгоритми реалізовані в програмному середовищі СКМ Maple.

Ключові слова: лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду; педагогічно-орієнтовані програмні засоби; Maplet-застосунок; спеціалізований пакет MapletBuilder.

1. ВСТУП

Найбільш поширеними педагогічноорієнтованими програмними засобами для підтримки викладання математики, головним чином, є засоби, призначені для підтримки викладання шкільного курсу елементарної математики [1 -6]. Вища школа в цьому випадку послуговується можливостями універсальних систем комп'ютерної математики таких як MathCad, MATLAB, Maple, Mathematica та інших [7 - 9]. Також існує неймовірна кількість інтернет-ресурсів, які орієнтовані не тільки на отримання розв'язків задач з певної теми, а й формування покрокового розв'язання цих задач.

Всі ці застосунки об'єднує така особливість, що їх кінцевим навіть не користувачем, а «кінцевим споживачем» інформації з цих застосунків є учень або студент [6 - 9]. Застосунки розв'язують задачі з наперед заданими значеннями параметрів.

Постановка проблеми. У повсякденній практиці викладача є актуальною інша задача, а саме: створення дидактичних матеріалів з великою кількістю рівнозначних за складністю варіантів завдань. При цьому має зберігатися прийнятна складність арифметичних розрахунків, з тим, щоб складність обчислень не перевершила складність алгоритму розв'язання поставленої задачі.

Вказану проблему викладачі вищої математики розв'язують здебільшого індивідуально, покладаючись на власний досвід та доступні літературні джерела.

Мета статті полягає в обґрунтуванні математичного забезпечення розробленого автором Maple-застосунку, призначеного для створення варіантів завдань на розв'язання звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь II порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального виду.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$ay'' + by' + cy = f(x). \quad (1)$$

Як відомо, загальним розв'язком рівняння (1) є сума будь-якого частинного розв'язку цього рівняння $y_{\text{ч}}$ і загального розв'язку $y_{\text{одн}}$ відповідного однорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{загал}} = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}. \quad (2)$$

У випадку, коли права частина рівняння (1) має так званий спеціальний вид, для пошуку довільного частинного розв'язку з формули (2) можна використовувати два методи: метод невизначених коефіцієнтів та метод варіації довільних сталих.

Існують випадки рівнянь (1), коли пошук довільного частинного розв'язку за допомогою обох вказаних методів приводить до одного і того самого виразу. Це найбільш очікуваний результат. Але існують випадки, коли за допомогою цих методів визначаються частинні розв'язки, які мають відмінні доданки. Така ситуація викликає певний інтерес у студентів і дозволяє залучити евристичні прийоми під час викладання цієї теми.

Разом з тим виникає методична проблема розробки дидактичних матеріалів для організації самостійної роботи студентів з розв'язання диференціальних рівнянь (1) для випадків, коли частинні розв'язки, знайдені за допомогою двох методів однакові або мають відмінності. При цьому кількість варіантів завдань, що потребують розробки коливаються в традиційних межах 10-30 варіантів. Крім того, з методичних міркувань, значення коефіцієнтів рівняння (1) мають визначати прийнятну складність при виконанні «ручних» розрахунків.

Розглянемо математичне забезпечення програмного застосунку, який в цьому випадку може прийти на допомогу викладачу.

У даній публікації розглянемо праву частину рівняння (1) виду

$$f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}, \quad (3)$$

тобто окремий випадок правої частини загального виду $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен довільного степеня n . Звернення до окремого випадку обумовлено забезпеченням прийнятної громіздкості розрахунків у навчальному прикладі.

Для створення варіантів завдань логічно розглянути ситуацію, коли викладачем задаються корені характеристичного рівняння k_1 і k_2 та параметр α .

Для спрощення аналізу розв'язків диференціального рівняння (1) будемо формувати диференціальне рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = (Ax + B)e^{\alpha x}, \quad (4)$$

де $p = -(k_1 + k_2)$, $q = k_1 \cdot k_2$.

Виведемо залежності значень коефіцієнтів довільного частинного розв'язку, який отримують при застосуванні кожного з методів.

Випадок 1. Параметр α не співпадає з коренями характеристичного рівняння ($\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$), які є дійсними та різними.

Метод невизначених коефіцієнтів. За методом невизначених коефіцієнтів довільний частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{ч}} = (Mx + N)e^{\alpha x}. \quad (5)$$

Після обчислення першої та другої похідної від функції (5) та підстановки виразу самого частинного розв'язку (5) та його похідних до рівняння (4) отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x & | & (\alpha - k_1)(\alpha - k_2)M = A \\ x^0 & | & (2\alpha - k_1 - k_2)M + (\alpha - k_1)(\alpha - k_2)N = B \end{cases} \quad (6)$$

З системи (6) будемо мати:

$$\begin{cases} M = \frac{A}{(\alpha - k_1)(\alpha - k_2)} \\ N = \frac{1}{(\alpha - k_1)(\alpha - k_2)} \cdot \left(B - \frac{2\alpha - k_1 - k_2}{(\alpha - k_1)(\alpha - k_2)} \cdot A \right) \end{cases} \quad (7)$$

Метод варіації довільних сталих.

Оскільки за домовленістю корені характеристичного рівняння дійсні та різні, то в методі варіації довільних сталих використовуються базисні функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$. Тоді система для відшукування виразів похідних від довільних сталих має вигляд:

$$\begin{pmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (Ax + B)e^{\alpha x} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а її корені дорівнюють:

$$\begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Ax + B}{k_1 - k_2} \cdot e^{(\alpha - k_1) \cdot x} \\ -\frac{Ax + B}{k_1 - k_2} \cdot e^{(\alpha - k_2) \cdot x} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Самі вирази для довільних сталих послідовно знаходяться в результаті виконання операції інтегрування:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(k_1 - k_2)(\alpha - k_1)^2} \cdot ((\alpha - k_1) \cdot Ax + (\alpha - k_1) \cdot B + A) \cdot e^{(\alpha - k_1) \cdot x} \\ \frac{1}{(k_1 - k_2)(\alpha - k_2)^2} \cdot ((\alpha - k_2) \cdot Ax + (\alpha - k_2) \cdot B + A) \cdot e^{(\alpha - k_2) \cdot x} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \cdot y_1 \\ C_2 \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(k_1 - k_2)(\alpha - k_1)^2} \cdot ((\alpha - k_1) \cdot Ax + (\alpha - k_1) \cdot B + A) \cdot e^{\alpha \cdot x} \\ \frac{1}{(k_1 - k_2)(\alpha - k_2)^2} \cdot ((\alpha - k_2) \cdot Ax + (\alpha - k_2) \cdot B + A) \cdot e^{\alpha \cdot x} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y_4 &= \frac{1}{(\alpha - k_1)^2 (\alpha - k_2)^2} \cdot ((\alpha - k_1) \cdot (\alpha - k_2) \cdot Ax + (\alpha - k_1) \cdot (\alpha - k_2) \cdot B - (2\alpha - k_1 - k_2) \cdot A) \cdot e^{\alpha x} = \\ &= \frac{1}{(\alpha - k_1)(\alpha - k_2)} \cdot \left(Ax + B - \frac{2\alpha - k_1 - k_2}{(\alpha - k_1)(\alpha - k_2)} \cdot A \right) \cdot e^{\alpha x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Із залежності (12) стає очевидним, що в цьому випадку коефіцієнти довільного частинного розв'язку виражаються через коефіцієнти многочлена з правої частини (4) досліджуваного диференціального рівняння за тими ж формулами (7), що і в методі невизначених коефіцієнтів.

У випадку, коли параметр α не співпадає з коренями характеристичного рівняння для рівняння (4), обидва методи: метод невизначених коефіцієнтів та метод варіації довільних сталих – приводять до формування одного і того самого довільного частинного розв'язку.

Відзначимо, що формули (7) дозволяють регулювати складність виконуваних розрахунків за формулами (8-12) і створити достатньо велику кількість прикладів для заданих значень k_1 , k_2 , α .

Випадок 2. Параметр α співпадає з одним із різних дійсних коренів характеристичного рівняння для рівняння (4). Без порушення загальності підходу будемо вважати, що параметр α співпадає з коренем характеристичного рівняння, який позначено k_1 .

У цьому випадку вказані методи приводять до формування частинних розв'язків, які відрізняються одним доданком.

Метод невизначених коефіцієнтів. За методом невизначених коефіцієнтів довільний частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_4 = x(Mx + N)e^{k_1 x}, \quad (13)$$

тобто многочлен, що входить до складу виразу (13) є неповним многочленом другого степеня.

Виконавши всі необхідні перетворення, отримуємо такий зв'язок між коефіцієнтами правої частини заданого диференціального рівняння та коефіцієнтами шуканого довільного розв'язку:

$$\begin{cases} M = \frac{A}{2 \cdot (k_1 - k_2)} \\ N = \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \cdot (B \cdot (k_1 - k_2) - A) \end{cases} \quad (14)$$

Метод варіації довільних сталих. Оскільки за домовленістю корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тому і в цьому випадку в методі варіації довільних сталих використовуються базисні функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$. Тоді система для відшукування виразів похідних від довільних сталих має вигляд:

$$\begin{pmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (Ax + B)e^{k_1 x} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а її корені дорівнюють:

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Ax+B}{k_1-k_2} \\ -\frac{Ax+B}{k_1-k_2} \cdot e^{(k_1-k_2)x} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

Самі вирази для довільних сталих послідовно знаходяться в результаті виконання операції інтегрування:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}Ax^2+Bx}{k_1-k_2} \\ -\frac{1}{(k_1-k_2)^3} \cdot (A(k_1-k_2)x - A + (k_1-k_2)B) \cdot e^{(k_1-k_2)x} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \cdot y_1 \\ C_2 \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}Ax^2+Bx}{k_1-k_2} \cdot e^{k_1x} \\ -\frac{1}{(k_1-k_2)^3} \cdot (A(k_1-k_2)x - A + (k_1-k_2)B) \cdot e^{k_1x} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

$$y_u = \left(\frac{A}{2 \cdot (k_1-k_2)} \cdot x^2 + \left(\frac{B}{k_1-k_2} - \frac{A}{(k_1-k_2)^2} \right) \cdot x + \frac{A}{(k_1-k_2)^3} - \frac{B}{(k_1-k_2)^2} \right) \cdot e^{k_1x}. \quad (19)$$

Порівнюючи формули (14) і (19), бачимо, що частинний розв'язок, який знайдений за методом варіації довільних сталих містить на один доданок більше, а саме на доданок:

$$Term_1 = \left(\frac{A}{(k_1-k_2)^3} - \frac{B}{(k_1-k_2)^2} \right) \cdot e^{k_1x}. \quad (20)$$

Очевидно, що перетворення (15-19) є найбільш простими, коли корені характеристичного рівняння відрізняються на 1.

Випадок 3. Параметр α співпадає з обома однаковими дійсними коренями характеристичного рівняння для рівняння (1) $k_1 = k_2$.

Метод невизначених коефіцієнтів. За методом невизначених коефіцієнтів довільний частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_u = x^2 (Mx + N) e^{k_1x}, \quad (21)$$

тобто многочлен, що входить до складу виразу (21) є неповним многочленом третього степеня.

Також виконавши всі необхідні перетворення, отримуємо такий зв'язок між коефіцієнтами правої частини заданого диференціального рівняння та коефіцієнтами шуканого довільного розв'язку:

$$\begin{cases} M = \frac{A}{6} \\ N = \frac{B}{2} \end{cases} \quad (22)$$

Метод варіації довільних сталих

Оскільки за домовленістю корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, то в методі варіації довільних сталих використовуються базисні функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = x e^{k_1 x}$. Тоді система для відшукування виразів похідних від довільних сталих має вигляд:

$$\begin{pmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & (1 + k_1 x) e^{k_1 x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (Ax + B) e^{k_1 x} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

а її корені дорівнюють:

$$\begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \cdot (Ax + B) \\ Ax + B \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Самі вирази для довільних сталих послідовно (23-27) знаходяться в результаті виконання операції інтегрування:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2\right) \\ \frac{1}{2}Ax^2 + Bx \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \cdot y_1 \\ C_2 \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2\right) \cdot e^{k_1 x} \\ \left(\frac{1}{2}Ax^2 + Bx\right) \cdot x \cdot e^{k_1 x} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$y_q = \left(\frac{A}{6} \cdot x^3 + \frac{B}{2} \cdot x^2\right) \cdot e^{k_1 x}. \quad (27)$$

Із залежності (27) зрозуміло, що в цьому випадку коефіцієнти довільного частинного розв'язку виражаються через коефіцієнти многочлена з правої частини (4) досліджуваного диференціального рівняння за тими ж формулами (22), що і в методі невизначених коефіцієнтів.

Випадок 4. Параметр α не співпадає з коренями характеристичного рівняння, які є комплексними ($k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$).

Метод невизначених коефіцієнтів. Оскільки права частина рівняння (4) залишилися незмінною як і обмеження на параметр α , тому частинний розв'язок будемо шукати у вигляді (5). Вирази (7) для коефіцієнтів набудуть іншого вигляду, оскільки характеристичне рівняння не має дійсних коренів у цьому випадку:

$$\begin{cases} M = \frac{A}{(\alpha - a)^2 + b^2} \\ N = \frac{1}{(\alpha - a)^2 + b^2} \cdot \left(B - \frac{2(\alpha - a)}{(\alpha - a)^2 + b^2} \cdot A \right) \end{cases} \quad (28)$$

Метод варіації довільних сталих.

Оскільки за домовленістю корені характеристичного рівняння комплексні та різні, тому в методі варіації довільних сталих використовуються базисні функції $y_1 = e^{ax} \cos bx$ та $y_2 = e^{ax} \sin bx$. Тоді система для відшукування виразів похідних від довільних сталих має вигляд:

$$\begin{pmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) & e^{ax} (b \cos bx + a \sin bx) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (Ax + B)e^{ax} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

а її корені дорівнюють:

$$\begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b} \cdot (Ax + B) \cdot \sin bx \cdot e^{(a-a) \cdot x} \\ \frac{1}{b} \cdot (Ax + B) \cdot \cos bx \cdot e^{(a-a) \cdot x} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Очевидно, що обчислення невизначених інтегралів від виразів (30) є занадто громіздкими, окрім частинних випадків як $\alpha = a$ або $A = 0$. Якщо ці перетворення (29-30) таки виконати за допомогою команд `simplify`, `factor`, `collect` у СКМ Maple, то остаточно приходимо до виразів виду (28). Отже, в цьому випадку обома методами знаходиться один і той самий частинний розв'язок. Але варто відзначити, що для навчальних прикладів, які передбачають застосування методу варіації довільних сталих, доцільним є складання рівнянь, коефіцієнти яких будуть забезпечувати як раз окремі випадки для виразів (30)

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На підставі викладених теоретичних відомостей автором розроблений Maplet-застосунок [10] «Generator ODE», який дозволяє генерувати звичайні лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з правими частинами спеціального виду за заданими користувачем параметрами.

Застосунок має відкриту конфігурацію і може доповнюватися новими модулями генерування диференціальних рівнянь. У даній статті розглянуті випадки генерування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь II порядку з правою частиною виду (3).

За допомогою верхнього меню користувач обирає випадок із викладених вище, для якого він бажає згенерувати варіанти відповідного диференціального рівняння.

Для випадку 1 користувач задає корені характеристичного рівняння та коефіцієнти для правої частини диференціального рівняння виду (3) (рис. 1). Після натискання кнопки «Calc» застосунок обчислює коефіцієнти p і q диференціального рівняння та вирази загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку, знайденого за методом невизначених коефіцієнтів або варіації довільних сталих (оскільки в цьому випадку ці розв'язки співпадають).

Після натискання кнопки «Show variants» з'являється таблиця (рис. 2), в якій пропонуються цілі значення коефіцієнтів A і B з правої частини неоднорідного диференціального рівняння з проміжку від -9 до 9 , які приводять до цілих значень коефіцієнтів M і N у частинному розв'язку, який знаходиться за формулою (12). Коефіцієнти p і q диференціального рівняння та параметр α з показника степені експоненти залишаються при цьому незмінними.

Для зручності використання застосунку передбачено запобігання помилковим введенням вхідних параметрів, тобто виконується перевірка типів введених значень. Також виконується перевірка відповідності введених значень випадку, що розглядається. Для випадку 1 перевіряється, що введені значення коренів характеристичного рівняння є дійсними та різними, а також, що параметр α не співпадає з коренями характеристичного рівняння. У разі виявлення помилкових дій користувача у вікні «Comments» з'являється відповідне повідомлення. При виявленні невідповідності введених даних числовому типу з'являються стандартні повідомлення від СКМ Maple, що містяться в окремих службових вікнах.

Для зручності використання застосунку передбачена кнопка «Clear», при натисканні якої очищуються всі вікна з вхідною та вихідною інформацією.

Для випадку 2, коли параметр α співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння, передбачені відповідні зміни в інтерфейсі вікна для реалізації цього випадку. А саме: передбачається, що параметр α співпадає саме з першим коренем характеристичного рівняння (рис. 3). Також змінюється вигляд довільного частинного розв'язку. При генеруванні варіантів диференціального рівняння обчислюються коефіцієнти частинного розв'язку за методом варіації довільних сталих за формулою (19) (рис. 4). Якщо застосовувати метод невизначених коефіцієнтів, тоді, як зазначалося вище, доданок T (формула (20)) дорівнює нулю.

Рис. 1. Інтерфейс роботи застосунку для випадку 1

Nº	A	B	M	N
1	-8	-8	4	2
2	-8	-6	4	1
3	-8	-4	4	0
4	-8	-2	4	-1
5	-8	0	4	-2
6	-8	2	4	-3
7	-8	4	4	-4
8	-8	6	4	-5
9	-8	8	4	-6
10	-6	-9	3	3
11	-6	-7	3	2
12	-6	-5	3	1
13	-6	-3	3	0
14	-6	-1	3	-1
15	-6	1	3	-2
16	-6	3	3	-3
17	-6	5	3	-4
18	-6	7	3	-5
19	-6	9	3	-6
20	-4	-8	2	3
21	-4	-6	2	2
22	-4	-4	2	1
23	-4	-2	2	0
24	-4	0	2	-1
25	-4	2	2	-2
26	-4	4	2	-3
27	-4	6	2	-4
28	-4	8	2	-5
29	-2	-9	1	4
30	-2	-7	1	3
31	-2	-5	1	2
32	-2	-3	1	1
33	-2	-1	1	0
34	-2	1	1	-1
35	-2	3	1	-2
36	-2	5	1	-3
37	-2	7	1	-4
38	-2	9	1	-5
39	0	-8	0	4
40	0	-6	0	3

Рис. 2. Приклад таблиці з запропонованими варіантами коефіцієнтів для диференціального рівняння та його частинного розв'язку

Рис. 3. Частина інтерфейсу вікна для випадку 2

Nº	A	B	M	N	T
1	-6	-8	-1	-2	2/3
2	-6	-5	-1	-1	1/3
3	-6	-2	-1	0	0
4	-6	1	-1	1	-1/3
5	-6	4	-1	2	-2/3
6	-6	7	-1	3	-1
7	0	-9	0	-3	1
8	0	-6	0	-2	2/3
9	0	-3	0	-1	1/3
10	0	0	0	0	0
11	0	3	0	1	-1/3
12	0	6	0	2	-2/3
13	0	9	0	3	-1
14	6	-7	1	-3	1
15	6	-4	1	-2	2/3
16	6	-1	1	-1	1/3
17	6	2	1	0	0
18	6	5	1	1	-1/3
19	6	8	1	2	-2/3

Рис. 4. Приклад таблиці з запропонованими варіантами коефіцієнтів для диференціального рівняння та його частинного розв'язку

Зміни в інтерфейсі вікон, що реалізують випадки 3 і 4 проілюстровані на рис. 5 і 6.

Case 3: Roots are real and repeated, alpha=k1=k2

ODE: $y'' + py' + qy = (Ax + B)e^{\alpha x}$

Input

Roots of characteristic equation: $k1=k2=$

Right part of ODE: $A=$ $B=$ $Alpha=k1=k2$

Output

Coefficients: $p=$ $q=$

Homogeneous general solution: $(C1x + C2)e^{(3x)}$

Any particular solution: $x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)e^{(3x)}$

Recommended

Right parts of ODE: $f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}$

Any particular solutions: $y_p = x^2(Mx + N)e^{\alpha x}$

[Show variants](#)

Recommends

Nº	A	B	M	N
1	-6	-8	-1	-4
2	-6	-6	-1	-3
3	-6	-4	-1	-2
4	-6	-2	-1	-1
5	-6	0	-1	0
6	-6	2	-1	1
7	-6	4	-1	2
8	-6	6	-1	3
9	-6	8	-1	4
10	0	-8	0	-4
11	0	-6	0	-3
12	0	-4	0	-2
13	0	-2	0	-1
14	0	0	0	0
15	0	2	0	1
16	0	4	0	2
17	0	6	0	3
18	0	8	0	4
19	6	-8	1	-4
20	6	-6	1	-3
21	6	-4	1	-2
22	6	-2	1	-1
23	6	0	1	0
24	6	2	1	1
25	6	4	1	2
26	6	6	1	3
27	6	8	1	4

OK

Рис. 5. Частина інтерфейсу вікна, що реалізує випадок 3

Case 4: Roots are complex

ODE: $y'' + py' + qy = (Ax + B)e^{\alpha x}$

Input

Complex roots of characteristic equation: $k1=a+ib$ and $k2=a-ib$

$a=$ $b=$

Right part of ODE: $A=$ $B=$ $Alpha=$

Output

Coefficients: $p=$ $q=$

Homogeneous general solution: $e^{(3x)}(C1 \cos(2x) + C2 \sin(2x))$

Any particular solution: $\left(x + \frac{1}{5}\right)e^{(2x)}$

Recommended

Right parts of ODE: $f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}$

Any particular solutions: $y_p = (Mx + N)e^{\alpha x}$

[Show variants](#)

Recommends

Nº	A	B	M	N
1	-5	-8	-1	-2
2	-5	-3	-1	-1
3	-5	2	-1	0
4	-5	7	-1	1
5	0	-5	0	-1
6	0	0	0	0
7	0	5	0	1
8	5	-7	1	-1
9	5	-2	1	0
10	5	3	1	1
11	5	8	1	2

OK

Рис. 6. Частина інтерфейсу вікна, що реалізує випадок 4

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розроблений Maplelet-застосунок «Generator ODE» має зручний для свого призначення інтерфейс. Застосунок реалізує два режими використання:

1) для заданих значень коефіцієнтів заданого рівняння формуються та візуалізуються загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння та довільний частинний розв'язок, знайдений за методом невизначених коефіцієнтів;

2) для заданих коренів характеристичного рівняння та значення параметра α з правої частини спеціального виду генерується множина можливих варіантів рівняння, в якому коефіцієнти многочлена з правої частини рівняння та коефіцієнти многочлена з довільного частинного розв'язку є однозначними цілими числами.

Останні обмеження забезпечують прийнятну складність обчислень при «ручному» розв'язанні таких рівнянь, що особливо важливо в умовах обмеженого часу виконання розв'язання, наприклад, під час проведення контрольної роботи.

Виведені в явному вигляді залежності між коефіцієнтами многочлена з правої частини рівняння та коефіцієнтами довільного частинного розв'язку: (7), (14), (22), (28) – дозволяють передбачати складність розрахунків при знаходженні коефіцієнтів довільного частинного розв'язку за методом невизначених коефіцієнтів.

З цих же формул є очевидними співвідношення між параметрами, що задаються викладачем, коли кількість згенерованих варіантів рівнянь має бути великою. Наприклад, для розглянутого в статті випадку 1 велика кількість рівнянь з цілими коефіцієнтами в многочленах правої частини та довільного частинного розв'язку генерується, коли абсолютна величина різниці між параметром α та одним з коренів характеристичного рівняння дорівнює 1.

Окремо звернемо увагу на випадок 2, коли частинні розв'язки, які знайдені за методом невизначених коефіцієнтів та методом варіації довільних сталих відрізняються на сталий доданок (20). Ця ситуація дозволяє ставити перед студентами евристичні запитання з пропозицією або знайти помилку в розрахунках, або обґрунтувати причину розбіжностей у отриманих частинних розв'язках.

Логічним продовженням досліджень є доповнення Maplelet-застосунку модулями, які дозволяють генерувати варіанти вказаного диференціального рівняння з правою частиною, що містить тригонометричні функції синус та косинус.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / За ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.
- [2] Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк; науковий редактор М. І. Жалдак. Кривий Ріг : Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. 324 с.
- [3] Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., Lavicza, Z. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. 2009. 28(2). P. 135-146. Retrieved from <https://www.learntechlib.org/primary/p/30304/>
- [4] Ball L., Drijvers P., Ladel S. et al. Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education. Springer, 2018. 440 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4>
- [5] Hillmayr D., Zienwald L., Reinhold F., Hofer Sarah I., Reiss K. M. The Potential of Digital Tools to Enhance Mathematics and Science Learning in Secondary Schools: A Context-Specific Meta-Analysis. *Computers & Education*. 2020. V. 153. 25 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897>
- [6] Fang Wang, Xiaoli Ni, Mengzhu Zhang, Jingjie Zhang. Educational Digital Inequality: A Meta-Analysis of the Relationship between Digital Device Use and Academic Performance in Adolescents. *Computers & Education*. 2024. V. 213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2024.105003>
- [7] Співаковський О.В., Львов М.С. та ін. Педагогічні технології та педагогічно– орієнтовані програмні системи: предметно–орієнтований підхід. Комп'ютер у школі та сім'ї. 2002. №2 (20). С. 17–21.
- [8] Semenikhina O., Proshkin V., Naboka O. Application of Computer Mathematical Tools in University Training of Computer Science and Mathematics Pre-service Teachers. *International Journal of Research in E-learning*. 2020. Vol. 6 (2). P. 1–23. DOI: <https://doi.org/10.31261/IJREL.2020.6.2.06>

- [9] Yao-Ting Sung, Kuo-En Chang, Tzu-Chien Liu. The Effects of Integrating Mobile Devices with Teaching and Learning on Students' Learning Performance: A Meta-Analysis and Research Synthesis. *Computers & Education*. 2016. V. 94. P. 252-275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2015.11.008>
- [10] Overview of the Maplets Package. Retrieved from <https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=MapletsPackage&cid=719>

MAPLET-APPLICATION FOR THE DEVELOPMENT OF DIDACTIC MATERIALS ON THE SUBJECT "LINEAR NONHOMOGENEOUS SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND THE RIGHT-HAND SIDE OF A SPECIAL KIND". PART 1

Tuluchenko Halyna Yakivna

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Higher Mathematics,
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",
Kharkiv, Ukraine
ORCIDID ID: 0000-0002-6196-540X
tuluchenko@ukr.net

Abstract. The article considers the problem of creating didactic materials on a certain topic, which should contain a sufficiently large number of options (10-30 options) of equivalent complexity. The literature review shows that the majority of pedagogically oriented software tools for supporting the teaching of mathematics in secondary and higher education are focused on course visualization. Software tools, which are positioned as intended for the creation of didactic materials, provide tools for their design, rather than the development of the tasks themselves with the ability to control the influence of the values of the input parameters on the complexity of implementing a certain mathematical method. In educational examples that are solved in the traditional "manual" way, it is important to maintain a balance between the complexity of the algorithm for solving the problem and the computational operations performed at the same time. On the example of the topic: "Linear nonhomogeneous differential equations of the second order with constant coefficients and the right-hand side of a special form", the author developed the Maplet-application "Generator ODE", which allows you to generate ordinary linear nonhomogeneous differential equations with the right-hand parts of a special form according to the parameters specified by the user. To develop the mathematical support for this application, the dependencies of the coefficients of polynomials in an arbitrary partial solution on the coefficients of polynomials from the right-hand side of the differential equation, the roots of the characteristic equation, and the value of the parameter α from the exponent of the power of the exponential function from the right-hand side of the equation were derived in an explicit form. Further, algorithms for generating differential equations with single-valued integer coefficients of polynomials both in the right-hand side of the equation and in an arbitrary partial solution were implemented. This article considers the right-hand side of an equation in the form $f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}$. Cases were studied when the expressions of arbitrary partial solutions obtained by the method of undetermined coefficients and by the method of variation of arbitrary constants coincide, and when they differ by a constant term. This feature allows you to use heuristic methods in learning when solving differential equations of the specified type. The layout of the interface of the developed application was made using the specialized MapletBuilder package, which is included in the Maple SCM. Computing algorithms are implemented in the software environment of the Maple SCM itself.

Keywords: linear nonhomogeneous second order differential equations with constant coefficients and a right-hand side of a special form; pedagogically oriented software tools; Maplet-application; specialized MapletBuilder package.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] Kramarenko T. H. *Mathematics Lessons with a Computer. A Guide for Teachers and Students* / Ed. M. I. Zhaldak. Kryvyi Rih: Vydavnychiy dim, 2008. 272 p. (In Ukrainian)
- [2] *Innovative Information and Communication Technologies for Teaching Mathematics: a Study Guide* / V. V. Korol'skyi, T. H. Kramarenko, S. O. Semerikov, S. V. Shokaliuk; Ed. M. I. Zhaldak. Kryvyi Rih: Knyzhkove vydavnytstvo Kyrieievskoho, 2009. 324 c. (In Ukrainian)
- [3] Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., Lavicza, Z. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. 2009. 28(2). P. 135-146. Retrieved from <https://www.learntechlib.org/primary/p/30304/>. (In English)
- [4] Ball L., Drijvers P., Ladel S. et al. *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. Springer, 2018. 440 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4> (In English)