

НАУКОВО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРОБЛЕМ НАВЧАННЯ, ВИХОВАННЯ І РОЗВИТКУ УЧНІВ У ЗАКЛАДАХ ДОШКІЛЬНОЇ, ПОЧАТКОВОЇ ТА СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

УДК 37.091.33:510.7]:514

DOI: 10.31652/2412-1142-2025-77-62-71

Матяш Ольга Іванівна

доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і методики навчання математики,
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
м. Вінниця, Україна
ORCID ID: 0000-0002-7149-9545
matyash_27@ukr.net

Крутоус Тетяна Петрівна

кандидат педагогічних наук, доцент, проректор з науково-педагогічної роботи,
Вінницький кооперативний інститут,
м. Вінниця, Україна
ORCID ID: 0000-0002-7367-6058
tania83berezuk@gmail.com

Кусій Мирослава Ігорівна

кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки,
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
м. Львів, Україна
ORCID ID: 0000-0003-3120-1975
kusijmiroslava@gmail.com

Матяш Андрій Дмитрович

аспірант Наукового інституту аспірантури і докторантури
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
м. Вінниця, Україна
ORCID ID: 0009-0006-6244-1620
matyashandrey1987@gmail.com

ДОВЕДЕННЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОГО МИСЛЕННЯ У НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. У статті пояснюється необхідність підвищення уваги до проблеми формування умінь здобувачів освіти доводити твердження, як важливого інструменту розвитку їхнього мислення. Однією із найголовніших функцій математичної освіти (і шкільної, і вищої), в епоху використання штучного інтелекту, має стати формування та розвиток мислення, зокрема критичного. Обґрунтування необхідності пошуку шляхів розв'язання проблеми навчання здобувачів освіти доведенням здійснено на основі аналізу й узагальнення відповідних вітчизняних та зарубіжних публікацій. Хоча доведення є важливою частиною навчання математики, багато досліджень показали, що учні та студенти, навіть майбутні вчителі математики, часто мають труднощі з обґрунтуваннями тверджень, доведеннями. За останні майже тридцять років багато фахівців з математичної освіти різних країн почали переосмислювати місце та роль математичних доведень в шкільній програмі. Основна ідея полягає в заклику до вчителів математики надавати всім учням значні можливості та досвід у роботі з математичними доведеннями. Учитель несе основну відповідальність за встановлення та узгодження того, що вважається прийнятним математичним поясненням і обґрунтуванням. Найвагомішим аргументом щодо необхідності нині підвищити увагу в Україні до проблеми формування умінь учнів доводити твердження, як важливого

інструменту розвитку мислення учнів у процесі навчання, є сучасна увага до цього питання Міжнародної комісії з питань викладання математики (ICMI). На трьох останніх міжнародних Конгресах (ICME) з навчання математики (2012, 2016, 2021) працювали окремі дослідницькі групи, в яких центром дискусії була проблема формування умінь доводити твердження, як важливого інструменту розвитку мислення. На міжнародному рівні посилюються заклики до того, щоб доведення стали наскрізною складовою шкільного курсу математики. Знання математичного доведення вважається багатьма закордонними дослідниками ключовим елементом предметної підготовки, яким має володіти сучасний вчитель математики.

Ключові слова: розвиток мислення; навчання доведенням; математична освіта; майбутні учителі математики.

1. ВСТУП

Сучасний світ змінюється надзвичайно швидко. Глобалізація, стрімкий розвиток технологій, невизначеність ринку праці вимагають від молодих людей здатності швидко адаптуватися до нових умов. Нещодавно у наше життя, зокрема в освітні процеси, увірвалися різні моделі штучного інтелекту (ШІ), зокрема ChatGPT. Попри численні переваги, які надають технології, виникають певні потенційні проблеми, які потрібно врахувати для забезпечення ефективної інтеграції ШІ. Зокрема, здобувачі освіти часто використовують ШІ для швидкого отримання відповідей, не докладаючи зусиль до осмислення чи запам'ятовування знань. Як зазначає група авторів під керівництвом академіка Р.С.Гуревича [1], вища освіта знаходиться у центрі глибоких змін, які несуть із собою як величезні можливості, так і ризики. Одна з найголовніших функцій університетів полягає у розвитку неординарності мислення, творчої ініціативи, вміння критикувати навіть усталені доктрини [1]. Погоджуючись із вказаним твердженням, також зазначимо, що однією із найголовніших функцій математичної освіти (і шкільної, і вищої) в епоху застосування ШІ має стати формування та розвиток мислення здобувачів освіти, зокрема критичного.

Постановка проблеми. Навчання математики завжди передбачало розвиток прийомів розумової діяльності, однак нині важливо переосмислити пріоритетність цілей математичної освіти та шляхів їх реалізації. Зокрема, місце і роль в математичній освіті навчання здобувачів освіти доводити математичні твердження. Нині спостерігається певна тенденція до зниження ролі доведень у навчанні математики. Результатом зниження ролі доведень у навчанні математики є недостатній розвиток логічного мислення, його абстрактності, дедуктивності та евристичності у певної частини здобувачів освіти, тобто не виконується одне із завдань шкільної математичної освіти [2]. В епоху стрімкого проникнення ШІ в наше життя така ситуація, на нашу думку, є загрозовою. Наша стурбованість зросла після опитування майбутніх учителів математики щодо місця і ролі доведення тверджень у процесі навчання геометрії. Ми запропонували здобувачам вищої освіти обрати один із запропонованих нами варіантів відповіді:

- Доведення математичних фактів на уроках геометрії в школі:
 - 1) Має бути головною метою вчителя математики;
 - 2) Має бути одним із завдань навчання геометрії;
 - 3) Має бути присутнім в окремих випадках;
 - 4) Не слід перевантажувати учнів доведеннями, оскільки це важко ними сприймається і знижує бажання вивчати геометрію;
 - 5) Можна не гаяти час на доведення, оскільки це не потрібно для ЗНО (МНТ) з математики;
 - 6) Якщо доводити твердження, то це забирає надто багато часу на уроці, а його не вистачає для формування знань та умінь з математики. Тому доведення можна проводити, якщо є для цього час на уроці.

На жаль, більше половини опитаних майбутніх учителів математики обирали провокативні варіанти 3-6. Пояснення зводилися до того, що важко сприймається здобувачами освіти, низька мотивація навчання, недостатньо часу на уроках математики для

формування компетентностей, зокрема, досвіду застосування математичних знань та умінь. Найбільш поширений аргумент – під час ЗНО (НМТ) з математики відсутні завдання на доведення. Результати вказаного опитування спонукали нас до вивчення, аналізу й узагальнення вітчизняних та зарубіжних публікацій щодо проблеми навчання учнів доведенням та актуальності цієї проблеми у контексті сучасних завдань розвитку мислення здобувачів освіти. Доведення є центральним у математичній практиці, проте постійною проблемою є те, що учні різного віку мають труднощі у навчанні доведенням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відразу ж зазначимо, що проблема навчання учнів доведенням не є широко обговорюваною на рівні наукових публікацій в Україні, у порівнянні з іншими актуальними проблемами формування математичної компетентності учнів у школі. Наш аналіз публікацій українських методистів-математиків за останні 25 років дозволяє стверджувати, що з 2000 року по 2008 рік були одноосібні статті, що стосуються навчання учнів доводити твердження, Б. Сиваківського [3], І. Сверчевської [4], Т. Гришиної [5]. З 2012 року по 2021 рік можна вказати статті С. Ракова [6], І. Акуленко та Т. Максименко [7]. К. Недялкової [8], С. Іванової [2]. Після 2021 року публікацій українських методистів-математиків про навчання учнів доводити твердження не вдалося віднайти.

І. Сверчевська, на основі аналізу в методичній літературі різних підходів до проблеми навчання учнів доведенню, та виходячи з цілі – поєднати сувору логіку та доступність під час доведенні тверджень, стверджує, що навчання доведенням має такі складники: навчання готовим доведенням та їх відтворенню; навчання самостійному пошуку доведень (за зразком вивчених доведень, за вказаним учителем методом, за власним методом); спростування запропонованого доведення [4]. Б. Сиваківський аналізує проблему різних доведень одного твердження в шкільному курсі геометрії [3]. Т. Гришина розглядає рівневу організацію роботи учнів над теоремою [5].

Досить глибоко і в сучасному контексті розглядається питання ролі доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп'ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії у статті Сергія Анатолійовича Ракова [6]. Автор зауважує, що доведення у сучасному курсі математики посідають все меншу роль, все більш популярними стають видання «Геометрія у таблицях», «Алгебра у таблицях», в яких подаються зведені у таблиці довідкові матеріали зі шкільного курсу математики, наводяться типові задачі і алгоритми їх розв'язування. Все це знаходить відображення у зовнішньому незалежному оцінюванні знань з математики – починаючи з 2010 року з нього вилючені задачі з розгорнутою формою відповіді, і одним з мотивів такого вилучення був факт, що більшість учасників тестування до розв'язування цих задач у 2008 і 2009 роках не приступала [6].

Хоча основний зміст статті [6] С. Ракова зосереджений на описі можливостей комп'ютерних математичних систем, зокрема програмного засобу «Динамічна геометрія», виокремимо окремі тези автора, що стосуються ролі доведень у навчанні математики: «без доведень математика перетворюється у збірку фактів і типових алгоритмів розв'язування типових задач» [6], «доведення відіграють важливу роль у навчанні на компетентнісних засадах» [6], «переконливе доведення індивідуальне, звідси впливає потреба в різних способах доведень» [6]. Використання комп'ютерних математичних систем завдяки можливостям моделювання, зазначає С. Раков, підвищує ефективність пошуку доведень та їх представлення [6]. Вказана стаття С. Ракова опублікована майже 15 років тому.

І. Акуленко та Т. Максименко вивчали питання навчання учнів доведенню теорем у 2017 році, з точки зору вчителів практиків. У статті [7] описано результати опитування вчителів математики щодо сучасного стану навчання доведень теорем у практиці навчання геометрії основної школи. Проведене дослідження показало, що існують суттєві прогалини і недоліки у практиці навчання теорем у школі, робота із навчання доведенням теорем проводиться не систематично [7].

Після 2020 року питання навчання учнів доводити твердження піднімалося лише у статтях С. В. Іванової [2] та К. Недялкової [8] викладачок Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Ушинського.

С. Іванова зазначає, що одна з важливих закономірностей методики навчання математики полягає в тому, що рівень навчання багато в чому визначається як насиченістю курсу математики теоретичними положеннями, які передбачено обов'язково доводити (теореми, опорні задачі-факти), так і відповідним ступенем навчання доведенням: сформованістю в учнів умінь використовувати різні методи під час доведення тверджень; виправляти помилки у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження та інше [2]. Обґрунтовано, що чітка організація навчання доведення теорем різними методами та способами, яка містить їх порівняння, вибір раціональнішого, роботу щодо конкретизації та узагальнення та інше, сприяє розвитку логічного мислення учнів. Авторка статті повідомляє, що на тренінгах з учителями-математиками на базі Одеського приватного ліцею «Мрія» обговорювалися особливості реалізації творчого підходу вчителя до вибору способу доведення твердження з урахуванням рівня навчання учнів, а також організація роботи щодо навчання учнів використанню різних способів доведення [2].

К. Недялкова стверджує, що наразі постає проблема підвищення інтересу здобувачів середньої освіти до доказових міркувань – з одного боку; а з іншого – вдосконалення фахової підготовки майбутніх учителів математики з огляду на визначену проблему [8]. Авторка зосереджує увагу на дослідженні шляхів вдосконалення фахової підготовки майбутніх учителів математики і формування відповідної складової їхньої методичної компетентності щодо навчання учнів доводити математичні твердження.

Мета даної статті полягає в обґрунтуванні необхідності підвищення уваги до проблеми формування умінь учнів доводити твердження, як важливого інструменту розвитку мислення учнів у процесі навчання геометрії.

2. МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні застосовувався комплекс методів дослідження: ретроспективний і порівняльний аналіз педагогічних джерел з метою з'ясування змісту основних понять дослідження; аналіз, систематизація та узагальнення результатів досліджень, відображених у публікаціях зарубіжних та вітчизняних науковців; спостереження; опитування, узагальнення для формулювання висновків. Використано також багаторічний досвід авторів у навчанні учнів математики.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вище ми зазначали, що проблема навчання учнів доведенням на рівні наукових публікацій не є широко обговорюваною в Україні. На відміну від вказаного, в закордонних публікаціях ми виявили багато різнопланових статей щодо проблеми навчання учнів доводити твердження, а також місця і ролі доведень для розвитку мислення учнів у процесі навчання. Ми проаналізували більше тридцяти статей авторів із різних країн і вибрали шість з них для аргументації ключових тез закордонних досліджень щодо доведення як важливого інструменту розвитку мислення здобувачів освіти у процесі навчання геометрії.

Доведення є серцевиною математичного мислення та дедуктивного міркування. Крім того, доведення є важливою складовою розуміння математики [9]. Доведення є ядром математичного мислення [10]. Неможливо вивчати математику, не вивчаючи математичних доведень і їхніх способів. Роль доведення для здобувача математичної освіти визначає рівень зрілості в процесі математичного мислення [9]. Це пояснюється тим, що доведення вимагає використання математичних знань і їхнього представлення у вигляді логічного міркування, тобто потребує цілісного процесу математичного мислення.

Доведення є центральним у математичній практиці, проте постійною проблемою є те, що учні різного віку мають труднощі у навчанні доведенням [11]. Дослідники математичної освіти припускають, що надмірна залежність від прикладів для обґрунтування істинності тверджень є фактором, що сприяє труднощам учнів. Хоча міркування на основі прикладів зазвичай розглядаються як перешкода у навчанні доведенню, Eric Knuth, Orit Zaslavsky, Amy Ellis [11] розглядають міркування на основі прикладів як важливий об'єкт дослідження та стверджують, що приклади відіграють суттєву роль у розвитку, дослідженні та розумінні гіпотез, а також у подальших спробах доведення цих гіпотез.

Результати багатьох досліджень свідчать про те, що процес навчання доведень студентів закладів вищої освіти ще не досяг очікуваного рівня [9]. Виникає необхідність в оптимізації процесу формування вмінь побудови доведення для покращення рівня доведень у майбутніх учителів математики в курсі геометрії. Серед основних труднощів, які виникали у майбутніх учителів при доведенні, були: початок доведення, розуміння концепції та використання символів або мови при складанні доведення [9].

За останні майже тридцять років багато фахівців з математичної освіти різних країн почали переосмислювати місце та роль математичних доведень в шкільній програмі. У результаті акценти зміщуються від того, що часто сприймалося як надмірна залежність від строгих формальних доведень, до розуміння доведення як переконливої аргументації [10]. Основна ідея полягає в заклику до вчителів математики надавати всім учням значні можливості та досвід у роботі з математичним доведенням. Учитель несе основну відповідальність за встановлення та узгодження того, що вважається прийнятним математичним поясненням і обґрунтуванням [12].

Для характеристики розуміння учнями математичного доведення пропонується використовувати чотири рівні доведення: наївний емпіризм, ключовий експеримент, типовий приклад і розумовий експеримент:

- на першому рівні учень вважає твердження істинним, спираючись на невелику кількість випадків;
- на другому рівні учень більш явно звертається до питання узагальнення, розглядаючи нетиповий приклад (наприклад, крайній випадок);
- на третьому рівні учень формулює аргументацію на основі «типового прикладу» — тобто прикладу, який репрезентує цілий клас об'єктів;
- на четвертому рівні учні починають відриватися від конкретних прикладів і переходять від практичних до теоретичних доведень.

Вказана структура дає змогу не лише динамічніше досліджувати природу математичного доведення, а й сприяє обговоренню сильних і слабких сторін учнівських обґрунтувань [12].

Студентам потрібно розвивати необхідні навички доведення для побудови коректного доведення. Зазначені навички особливо важливі для майбутніх учителів, адже вчитель має мати глибоке розуміння природи та ролі доведення для ефективного викладання [13].

Більше того, мотивація вчителів математики до навчання доведенням у школі полягає в тому, що учні матимуть змогу опановувати систему математичних знань і здобувати розуміння, чому твердження є істинними. Крім цього, доведення розвивають логічне мислення, уміння спілкуватися та розв'язувати математичні задачі. Хоча доведення є важливою частиною навчання математики, багато досліджень показали, що учні та студенти часто мають труднощі з побудовою доведення. Т. Siswono [13], зокрема, вважає, що проблеми із розумінням математичних доведень спричинені недостатнім досвідом проведення доведень у процесі навчання. Знання математичного доведення вважається багатьма закордонними дослідниками ключовим елементом предметної підготовки яким має володіти вчитель математики.

Більшість дослідників, які вивчали знання вчителів щодо математичних доведень, зосереджувалися на питанні прийняття вчителями емпіричних або дедуктивних аргументів

як чинних доведень. Знання вчителя про доведення насправді не обмежується лише розумінням того, як будувати чинні доведення. У ширшому сенсі воно охоплює як змістовий, так і педагогічний аспекти знання про доведення [13]. Т. Siswono вказує на складові знання про доведення, що включають: знання визначення доведення, розпізнавання доведень і недоведень, побудову математичних доведень, а також розуміння ролі доведень у математиці. Перші три компоненти описують основні характеристики предметного знання про математичне доведення, тоді як останній компонент стосується аспектів викладання доведення, зокрема: перевірки або підтвердження учнівського мислення щодо істинності відомого твердження, аналізу учнівських міркувань і пояснення їхніх рішень, чому те чи інше твердження є істинним, підтвердження учнівських гіпотез і розвиток нових математичних ідей [13].

Найвагомішим аргументом щодо необхідності підвищення уваги до проблеми формування умінь учнів доводити твердження, як важливого інструменту розвитку мислення учнів у процесі навчання геометрії, вважаємо увагу до цього питання Міжнародної комісії з питань викладання математики (ICMI). ICMI — це міжнародна організація, що працює під егідою Міжнародного математичного союзу (IMU). ICMI об'єднує педагогів з математики, дослідників і освітян з різних країн для співпраці і покращення якості математичної освіти. Кожен 4 роки під егідою ICMI проводиться ICME (International Congress on Mathematical Education) — це міжнародний конгрес, який збирає тисячі фахівців зі всього світу. Мета ICMI сприяти розвитку і поліпшенню навчання математики у світі на всіх рівнях освіти.

ICMI організовує дослідження з методики навчання математики. Особливо важливими є дослідницькі напрями, такі як ICMI Studies, присвячені актуальним темам у математичній освіті. З 2008 року започаткована ICMI Studies 19: Доведення і процес доведення в математичній освіті.

G.Hanna [10] обґрунтовує актуальність Studies 19 наступним чином: документ «Принципи та стандарти» Національної ради викладачів математики (NCTM) та низка інших навчальних документів з математики підвищили статус доведення у шкільній математиці в кількох освітніх системах по всьому світу. Цей оновлений навчальний акцент на доведення спровокував сплеск наукових публікацій, присвячених викладанню та навчанню доведень на всіх рівнях освіти. Таке переосмислення ролі доведення в навчальній програмі та його взаємозв'язку з іншими формами пояснення, ілюстрації та обґрунтування (включаючи динамічне графічне програмне забезпечення) вже призвело до появи кількох теоретичних підходів, викликало численні обговорення і навіть палкі дискусії.

Основоположний принцип, що лежить в основі доведення, охоплює широкий спектр ситуацій поза межами математики та становить фундамент людського міркування. Його простота, однак, прихована за складністю й глибиною таких понять, як: «чітко сформулювати припущення», «відповідний аргумент» і «коректне міркування» [10]. Концепція «розвивального доведення» у дослідженні має три ключові характеристики: доведення і процес доведення в навчальних програмах можуть забезпечити довготривалий зв'язок із дисциплінарною природою доведення, яку поділяють професійні математики; доведення і процес доведення можуть стати способом мислення, який поглиблює математичне розуміння і розвиває ширші аспекти людського міркування; доведення і процес доведення одночасно є фундаментальними й складними, і мають розвиватися поступово, починаючи з початкових класів [10].

З 2008 року ICMI-дослідження організовувалися навколо 7 тем, які охоплювали широкий спектр поглядів на навчання й викладання доведення в різних контекстах — символічному, вербальному, візуальному, технологічному та соціальному. В межах кожної з семи тем виокремлювалися найважливіші питання для досліджень. Таких питань було сформульовано 53. Наведемо окремі з цих питань:

- ✓ Чи можуть уявлення про роль доведення в емпіричних науках бути корисними у викладанні геометрії?

- ✓ Які ролі у процесі доведення відіграють: розв’язування задач, евристики, інтуїція, візуалізація, процедурні та концептуальні знання, логіка і верифікація?
- ✓ Який попередній досвід роботи з доведеннями мають студенти, і як викладачі можуть його враховувати у своїй педагогічній діяльності?
- ✓ Як спроектувати навчальні можливості для майбутніх учителів математики, щоб вони могли набути знань (навичок, розуміння, ставлень), необхідних для ефективного навчання доведенням та розвитку мислення?

На міжнародних конгресах ICME-12 (Південна Корея, 2012), ICME-13 (Німеччина, 2016), ICME-14 (Китай, 2021) працювали окремі дослідницькі групи, в яких центром дискусії була проблема формування умінь доводити твердження, як важливого інструменту розвитку мислення. Наприклад, на ICME-14 (Шанхай, 11–18 липня 2021) працювала дослідницька група №16 «Міркування, аргументація та доведення в математичній освіті». Обговорювалися питання аргументації та доведення в математичній освіті на всіх рівнях: школа, університет, професійна підготовка вчителів. Зокрема, поступ до формалізації доведення; використання комп’ютерної підтримки; порівняльне дослідження стратегій доведення в підручниках різних країн; навички вчителів щодо аргументації тощо.

На міжнародному рівні неодноразово висловлювалися заклики до того, щоб міркування і доведення стали наскрізною складовою шкільного курсу математики. Важливо, щоб зусилля у відповідь на ці заклики ґрунтувалися на розумінні тих можливостей для міркування і доведення, які вже існують, зокрема в геометрії середньої школи, де такі можливості є поширеними, але ще недостатньо вивченими [14].

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Якість шкільної математичної освіти є похідною від її цілей і завдань [15]. У зв’язку із стрімким проникненням штучного інтелекту в освітні системи, цілі і завдання математичної освіти мають бути переосмислені. Система методичної підготовки вчителів математики в педагогічному університеті відповідно має забезпечити умови для формування та розвитку здатності майбутніх учителів математики до ефективною методичної діяльності в сучасних умовах [16]. Готовність і здатність майбутнього вчителя математики до розв’язування задач методичної діяльності в навчанні учнів геометрії залежить від сформованості відповідних методичних умінь [17]. Серед методичних умінь вчителя математики завжди важливим було уміння забезпечити розвиток прийомів розумової діяльності учнів у процесі навчання. У цій статті ми пояснюємо, що тенденція (зменшення уваги до навчання учнів доводити твердження, розв’язувати задачі на доведення), яка спостерігається в українській практиці навчання математики є тривожною і не виправданою. На міжнародному рівні якраз посилюються заклики до того, щоб доведення стали наскрізною складовою шкільного курсу математики. Знання математичного доведення вважається багатьма закордонними дослідниками ключовим елементом предметної підготовки яким має володіти сучасний вчитель математики.

Перспективи дослідження вбачаємо у розробці та обґрунтуванні конкретних методичних вказівок та рекомендацій щодо підвищення ролі доведень у навчанні математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Гуревич Р., Коношевський Л., Коношевський О., Воевода А., Люльчак С. (2024). Інтеграція штучного інтелекту в сферу освіти: проблеми, виклики, загрози, перспективи. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training: Methodology Theory Experience Problems*, 72, 170–186. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-72-170-186>
- [2] Іванова С. (2021). Шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження. https://www.researchgate.net/publication/353156888_SLAHI_VDOSKONALENNA_METODIKI_NAVCANN_A_UCNIV_DOVODITI_MATEMATICNI_TVERDZENNA

- [3] Сиваківський П. О. (2000). До проблеми різних доведень одного твердження в шкільному курсі геометрії. *Математика в школі*, (3), 36–39.
- [4] Сверчевська І. А. (2005). Компетентісний підхід до навчання учнів доведенням тверджень про геометричні тіла. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*, (25), 213–215. <https://core.ac.uk/download/pdf/12081826.pdf>
- [5] Гришина Т. (2002). Рівнева організація роботи над теоремою. *Математика в школі*, (1), 20–23.
- [6] Раков С. А. (2012). Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп'ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, (12), 16–29. <https://sj.udp.edu.ua/index.php/kosn/article/view/216/180>
- [7] Акуленко І. А., Максименко Т. І. (2017). Навчання учнів доведень теорем (погляд учителів). *Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки»*, (13–14), 7–15.
- [8] Недялкова К. В. (2020). Навчання учнів доводити математичні твердження як складник методичної компетентності вчителя математики. *Science, society, education: topical issues and development prospects: Abstracts of the 5th International scientific and practical conference*. Харків, Україна, 463–470. <http://dSPACE.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/7765/1/Nedyalkova%20tezy.pdf>
- [9] Hartono, S., Siswono, T. Y. E., & Ekawati, R. (2024). From informal to formal proof in geometry: a preliminary study of scaffolding-based interventions for improving preservice teachers' level of proof. *Mathematics Teaching Research Journal*, 16(2). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1442179.pdf>
- [10] Hanna, G., & De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education (Discussion Document). *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 329–336. https://www.researchgate.net/publication/225442264_ICMI_Study_19_Proof_and_proving_in_mathematics_education
- [11] Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2017). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53(4). https://www.researchgate.net/publication/318320969_The_role_and_use_of_examples_in_learning_to_prove
- [12] Knuth, E. J., & Elliott, R. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher Learning and Teaching PK-12*, 91(8). https://www.researchgate.net/publication/234684883_Characterizing_Students'_Understandings_of_Mathematical_Proof
- [13] Siswono, T. Y. E., Hartono, S., & Kohar, A. W. (2020). Deductive or inductive? Prospective teachers' preference of proof method on an intermediate proof task. *Journal on Mathematics Education*, 11(3), 417–438. <https://doi.org/10.22342/jme.11.3.11846.417-438>
- [14] Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 51–79. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.857802>
- [15] Матяш О. І. (2016). Геометрична компетентність як складова математичної компетентності учнів. *Математика в рідній школі*, (3), 28–32.
- [16] Матяш О. І., Ольшевський В. (2015). Сучасні проблеми формування та розвитку методичних компетентностей майбутнього вчителя математики. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training: Methodology Theory Experience Problems*, (43), 392–396.
- [17] Матяш О. І. (2014). *Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики* : дис. ... д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)». Київ. 568 с.

PROOF AS A TOOL FOR DEVELOPING MATHEMATICAL THINKING IN GEOMETRY EDUCATION

Matiash Olha Ivanivna

Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,

Professor of the Department of Algebra and Methods of Teaching Mathematics,

Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine

ORCID ID: 0000-0002-7149-9545

matyash_27@ukr.net

Krutous Tetiana Petrivna

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor,

Vice-Rector for Academic and Pedagogical Work,

Vinnytsia Cooperative Institute, Vinnytsia, Ukraine

ORCID ID: 0000-0002-7367-6058

tania83berezuk@gmail.com

Kusii Myroslava Ihorivna

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Mechanics,
Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine
ORCID ID: 0000-0003-3120-1975
kusijmiroslava@gmail.com

Matias Andrii Dmytrovych

Postgraduate Student of the Scientific Institute of Postgraduate and Doctoral Studies,
Mykhailo Kotsiubynskyi Vinnytsia State Pedagogical University, Vinnytsia, Ukraine
ORCID ID: 0009-0006-6244-1620
matyashandrey1987@gmail.com

Abstract. The article explains the necessity of increasing attention to the issue of developing students' abilities to construct proofs, as an essential tool for fostering their thinking. One of the most important functions of mathematics education—both at the school and university levels—in the era of artificial intelligence, should be the development of thinking, particularly critical thinking. The justification for the need to address the problem of teaching students to prove mathematical statements is based on the analysis and synthesis of relevant national and international publications. Although proof is a fundamental component of mathematics education, numerous studies have shown that students—even preservice mathematics teachers—often struggle with justifying and proving statements. Over the past three decades, many mathematics education experts around the world have begun to reconsider the place and role of mathematical proof in the school curriculum. The central idea is a call for mathematics teachers to provide all students with meaningful opportunities and experiences in working with mathematical proofs. Teachers bear the primary responsibility for establishing and aligning what is considered acceptable mathematical explanation and justification. The most compelling argument for increasing attention in Ukraine to the issue of developing students' proof skills—as a vital instrument in the development of mathematical thinking—is the current emphasis placed on this topic by the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). At the three most recent International Congresses on Mathematical Education (ICME) held in 2012, 2016, and 2021, dedicated research groups focused on the development of proof skills as a key factor in fostering students' thinking. At the international level, there is growing support for making proof a central and continuous component of the school mathematics curriculum. Many international researchers consider knowledge of mathematical proof to be a key element of subject-matter competence required of today's mathematics teachers.

Keywords: development of thinking; learning through proof; mathematics education; preservice mathematics teachers.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] Gurevych R., Konoshevskiy L., Konoshevskiy O., Voievoda A., Liulchak S. (2024). Intekhratsiia shchuchnoho intelektu v sferu osvity: problemy, vyklyky, zahrozy, perspektyvy. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training: Methodology Theory Experience Problems*, 72, 170–186. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-72-170-186>
- [2] Ivanova S. (2021). Shliakhy vdoskonalennia metodyky navchannia uchniv dovodyty matematychni tverdzhennia. https://www.researchgate.net/publication/353156888_SLAHI_VDOSKONALENNA_METODIKI_NAVCANNIA_UCNIV_DOVODITI_MATEMATICNI_TVERDZENNA
- [3] Syvakivskiy P. O. (2000). Do problemy riznykh doveden' odnogo tverdzhennia v shkil'nomu kursu heometrii. *Matematyka v shkoli*, (3), 36–39.
- [4] Sverchevska I. A. (2005). Kompetentisnyi pidkhid do navchannia uchniv dovedenniam tverdzhenn' pro heometrychni tila. *Visnyk Zhytomirskoho derzhavnoho universytetu imeni Ivana Franka*, (25), 213–215. <https://core.ac.uk/download/pdf/12081826.pdf>
- [5] Hryshyna T. (2002). Rivneva orhanizatsiia roboty nad teoremoiu. *Matematyka v shkoli*, (1), 20–23.
- [6] Rakov S. A. (2012). Rol' doveden' u navchanni matematyky ta yikh pidtrymka zasobamy komp'iuternoho modeliuvannia u paketakh dynamichnoi heometrii. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriiia 2: Komp'iuterno-orientovani systemy navchannia*, (12), 16–29. <https://sj.edu.ua/index.php/kosn/article/view/216/180>
- [7] Akulenko I. A., Maksymenko T. I. (2017). Navchannia uchniv doveden' teorem (pohliad uchyteliv). *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriiia «Pedagogichni nauky»*, (13–14), 7–15.
- [8] Nediaklova K. V. (2020). Navchannia uchniv dovodyty matematychni tverdzhennia yak skladnyk metodychnoi kompetentnosti vchytelia matematyky. *Science, society, education: topical issues and development prospects: Abstracts of the 5th International scientific and practical conference*. Kharkiv, Ukraine, 463–470. <http://dSPACE.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/7765/1/Nedyalkova%20tezy.pdf>